مقرر الإشارات والنظم

قسم هندسة الروبوت والأنظمة الذكية

د. السموءل صالح

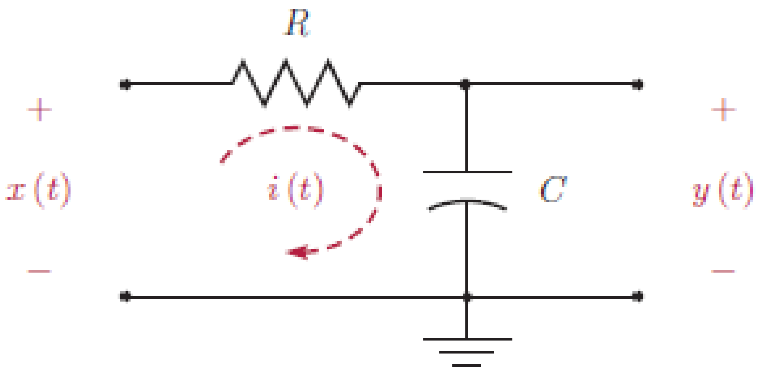
م. أوشين داؤد

محاضرة العملي الأسبوع ٤

الفصل الثاني ٢٠٢٢/٢٠٢١

The response of a system

اوجد الاستجابة لهذا النظام من اجل إشارة الدخل المبينة في الشكل
علماً ان المعادلة التفاضلية (معادلة تفاضلية مرتبة أولى ذات معاملات
ثابتة غيرمتجانسة) تحل وفق القاعدة :



R = 1 Ω and C = 1/4 F

the output at time t = 0 is y (0) = 0

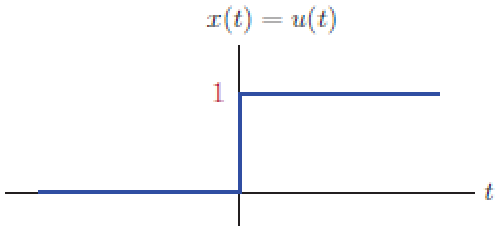
The differential equation

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha\, y(t) = r(t), \qquad y(t_0): \text{ specified}$$

is solved as

$$y(t) = e^{-\alpha(t-t_0)}\, y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\, r(\tau)\, d\tau$$

The input signal



(b)

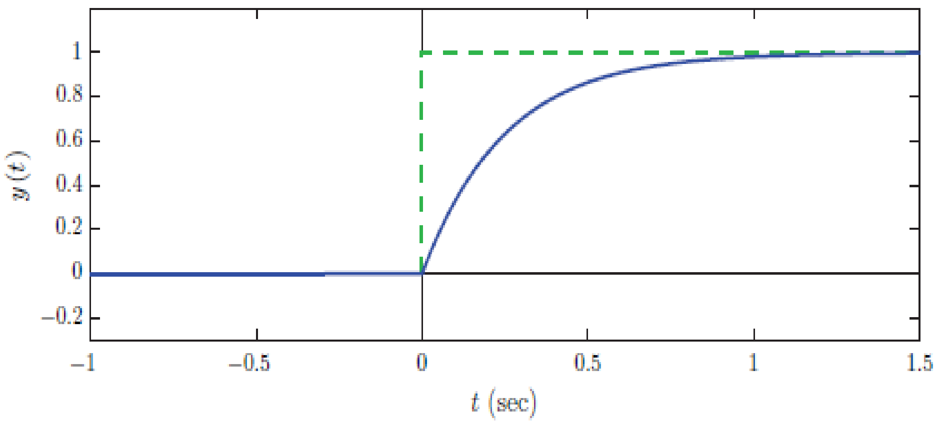
The response of a system

دراسة الاستجابة لدخل غير صفري :

$$u(t) = \frac{1}{4}\frac{dy(t)}{dt} + y\ (t) \rightarrow \boldsymbol{4u(t)} = \frac{\boldsymbol{dy(t)}}{\boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{4y\ (t)}$$

$$y(t) = 4\int_0^t e^{-4(t-\tau)}u(t)d\tau = 4e^{-4(t)}u(t)\int_0^t e^{-4(-\tau)}d\tau = \frac{4}{4}e^{-4(t)}u(t)\left[e^{4\tau}\Big|_0^t\right] =$$

$$= e^{-4(t)}u(t)\left[e^{4(t)} - 1\right] = \left(1 - e^{-4(t)}\right)u(t)$$



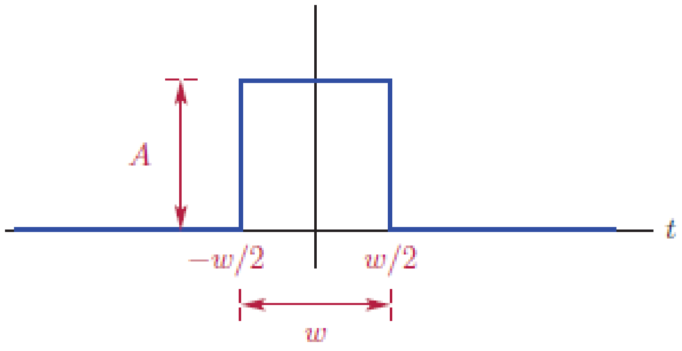
The output signal

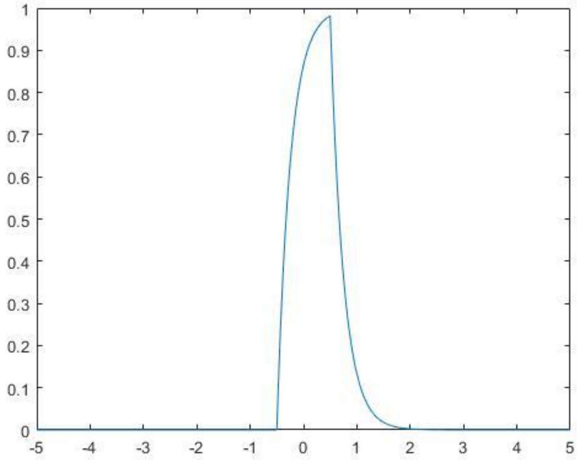
The response of a system:

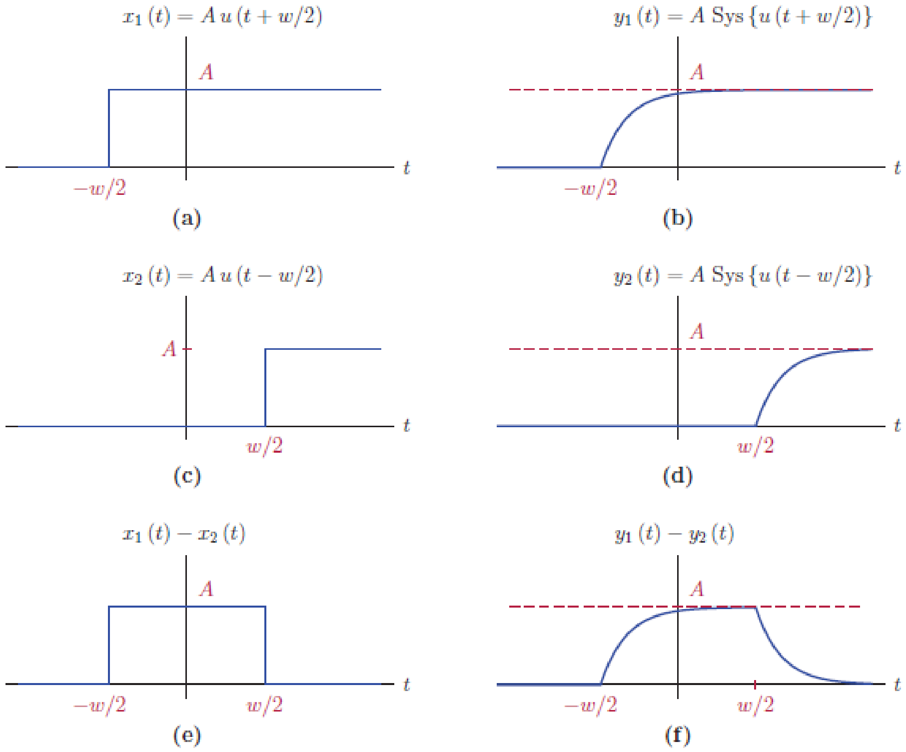
Using linearity to determine the response of the RC circuit

كيف سنوجد الاستجابة للنظام المفترض من أجل الاشارة المبينة في الشكل :

$x(t) = A\,\Pi(t/w)$

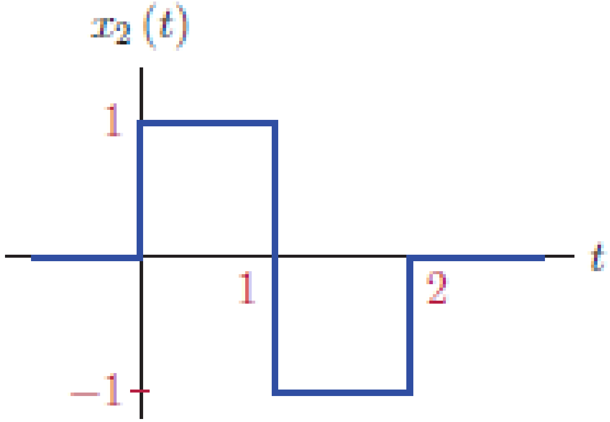


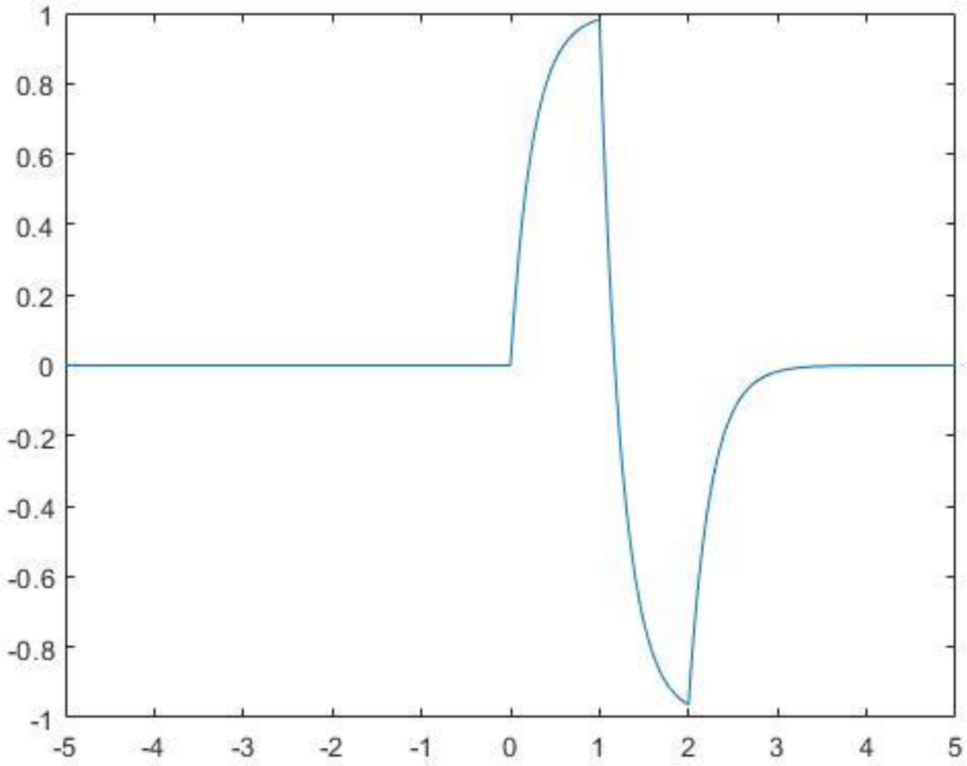




The response of a system

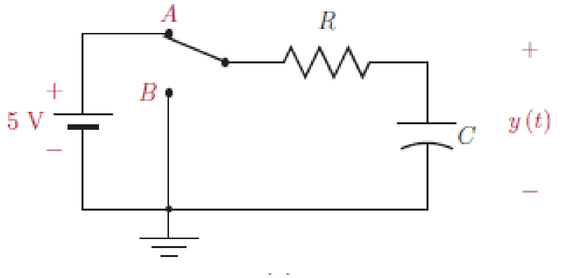
كيف سنوجد الاستجابة للنظام المفترض من أجل الاشارة $x2(t)$ المبينة في الشكل :

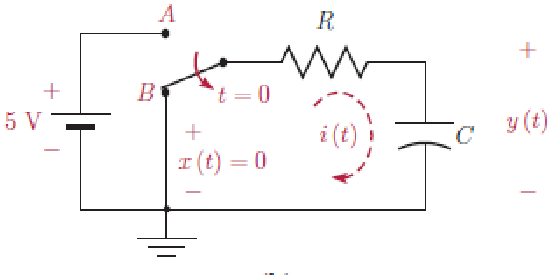




The natural response of a system

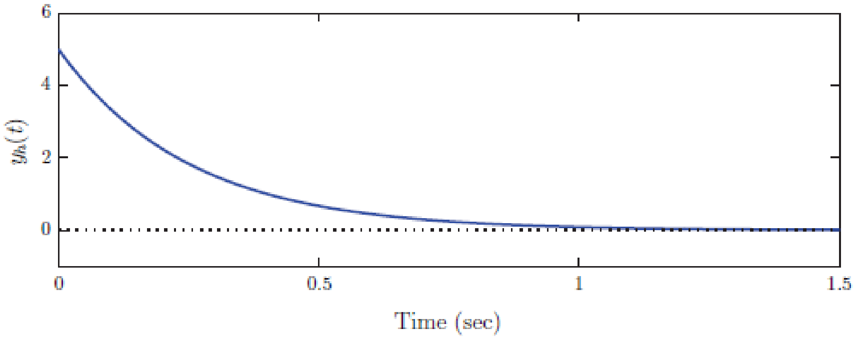
اوجد الاستجابة لدخل صفري لهذا النظام :





$$y(0) = 5$$

R = 1 Ω and C = 1/4 F



$$x(t) = v_R + v_C$$

$$x(t) = i(t)R + y(t)$$

$$i(t) = C\,\frac{dv_c(t)}{dt} = C\,\frac{dy(t)}{dt}$$

$$x(t) = RC\,\frac{dy(t)}{dt} + y\,(t) \rightarrow \frac{1}{RC}x(t) = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y\,(t)$$

$$\boldsymbol{\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 0 \rightarrow \quad \lambda y(t) + 4y(t) = 0 \rightarrow \lambda = -4}$$

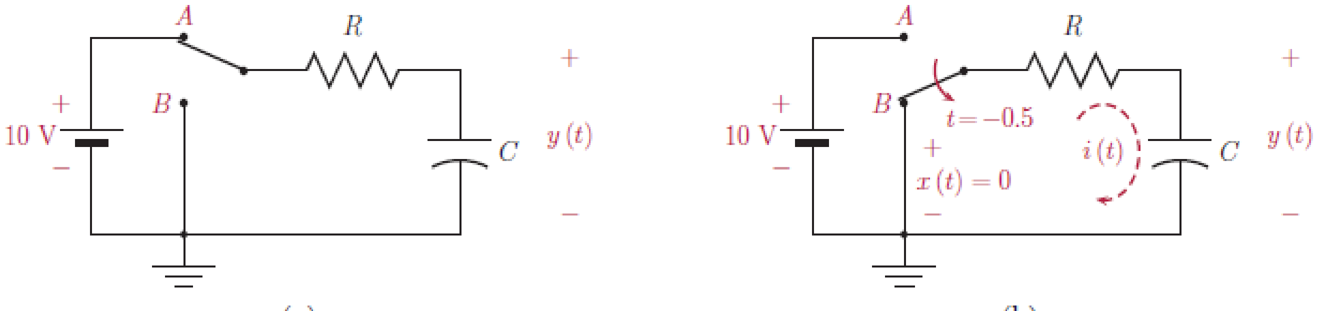
$$\boldsymbol{y(t) = \ ce^{\lambda t}}$$

$$\boldsymbol{y(0) = \ ce^{-4(0)} \rightarrow c = 5} \qquad \frac{1}{RC} = 4, \tau = RC$$

$$\boldsymbol{y(t) = \ 5e^{-4t}}$$

The natural response of a system

أعد الحل السابق من أجل الدارة المبينة في الشكل :
لاحظ تغيير لحظة فصل القاطع عن المنبع



(a) (b)

R = 1 Ω and C = 1/4 F

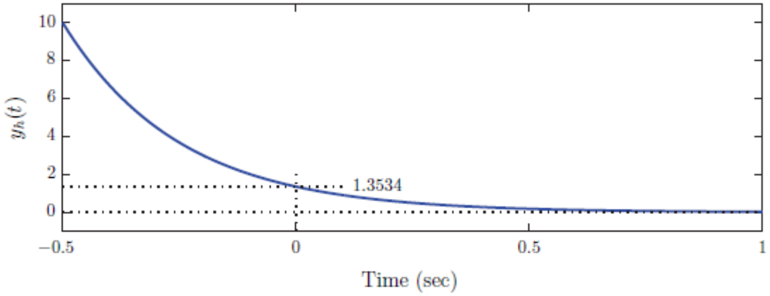
$y(-0.5) = 10$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 0 \rightarrow \quad \lambda y(t) + 4y(t) = 0 \rightarrow \lambda = -4$$

$$y(t) = ce^{\lambda t}$$

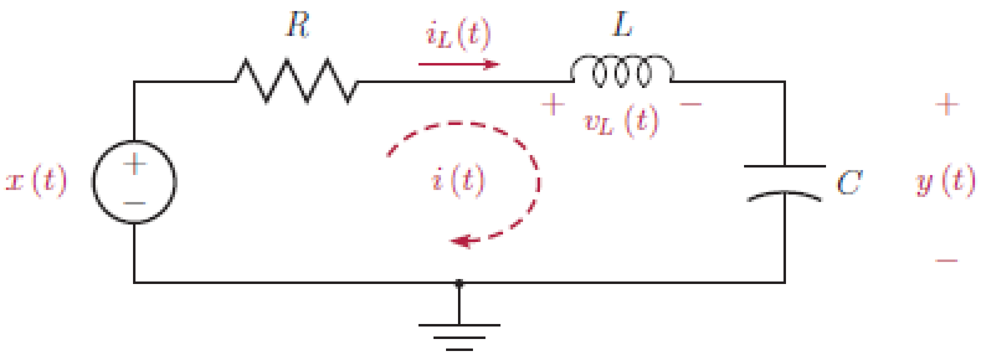
$$y(-0.5) = 10 = ce^{-4(-0.5)} \rightarrow c = \frac{10}{e^2}$$

$$y(t) = \frac{10}{e^2} e^{-4t}$$



The natural response of a system

تمرين : اوجد الاستجابة لهذا النظام :



R = 5 Ω, L = 1 H and C = 1/6 F.

At time t = 0, the initial inductor current is i (0) = 2 A and the initial capacitor voltage is y (0) = 1.5 V

$$x(t) = v_R + v_L + v_C$$

$$x(t) = i(t)R + \frac{Ldi(t)}{dt} + y(t)$$

$$i(t) = C\,\frac{dv_c(t)}{dt} = C\,\frac{dy(t)}{dt}$$

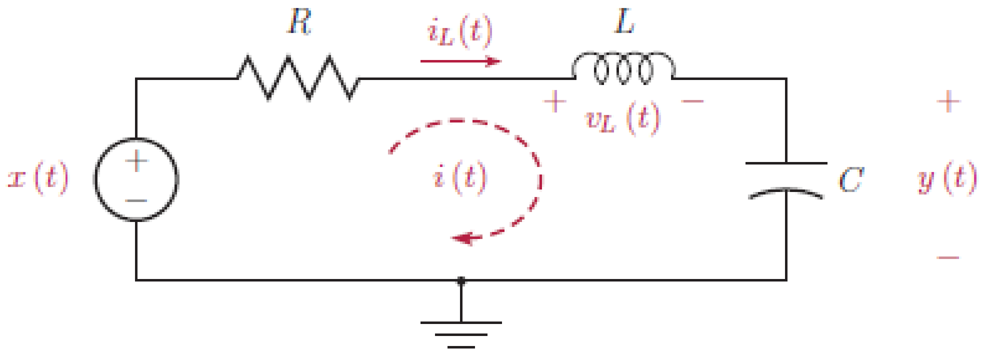
$$x(t) = LC\frac{d^2y(t)}{d^2t} + RC\,\frac{dy(t)}{dt} + y\,(t)$$

$$\frac{1}{LC}x(t) = \frac{d^2y(t)}{d^2t} + \frac{R}{L}\,\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC}y\,(t)$$

$$\lambda^2 y(t) + \frac{R}{L}\lambda y(t) + \frac{1}{LC}y\,(t) = 0$$

The natural response of a system

دراسة الاستجابة لدخل صفري :



R = 5 Ω, L = 1 H and C = 1/6 F.

At time t = 0, the initial inductor current is i (0) = 2 A and the initial capacitor voltage is y (0) = 1.5 V

$$\lambda^2 y(t) + 5\lambda y(t) + 6y\,(t) = 0$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda 1 = -2\ ;\ \lambda 2 = -3}$$

Distinct real roots

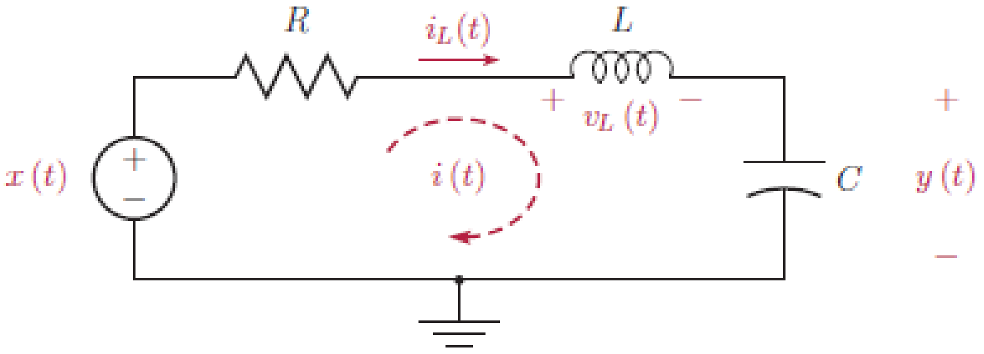
$$\boldsymbol{y(t) = \ c1e^{\lambda 1t} + c2e^{\lambda 2t}}$$

$$y(t) = \ c1e^{-2t} + c2e^{-3t}$$

$$y(0) = \ c1 + c2 = 1.5$$

$$i(0) = \frac{Cdv_c\,(t)}{dt} \rightarrow 2 = \frac{1}{6}(-2c1e^{-2t} - 3c2e^{-3t})|_{t=0} \ \ {-}{-}{-}{\rightarrow}\ \ 12 = -2c1 - 3c2$$

The natural response of a system



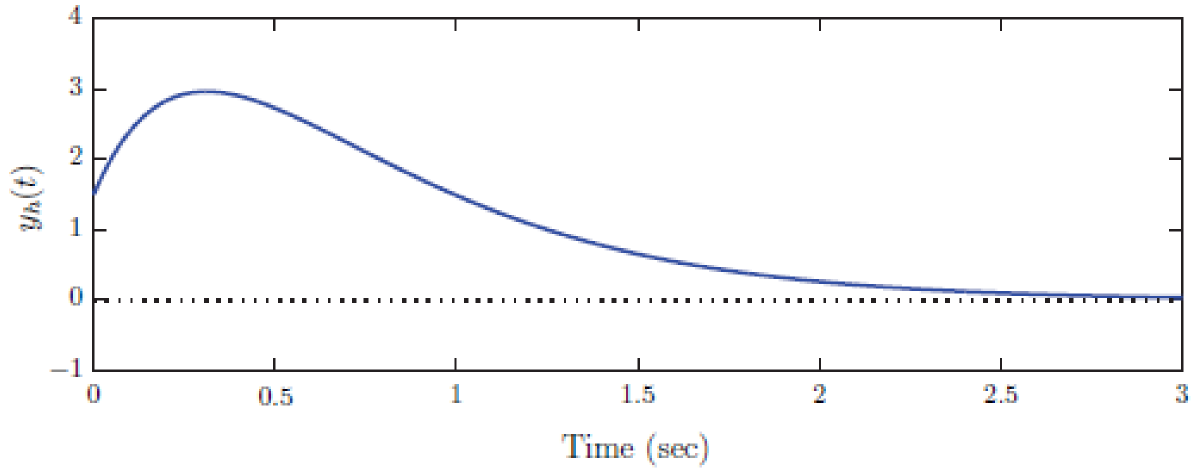
R = 5 Ω, L = 1 H and C = 1/6 F.

At time t = 0, the initial inductor current is i (0) = 2 A and the initial capacitor voltage is y (0) = 1.5 V

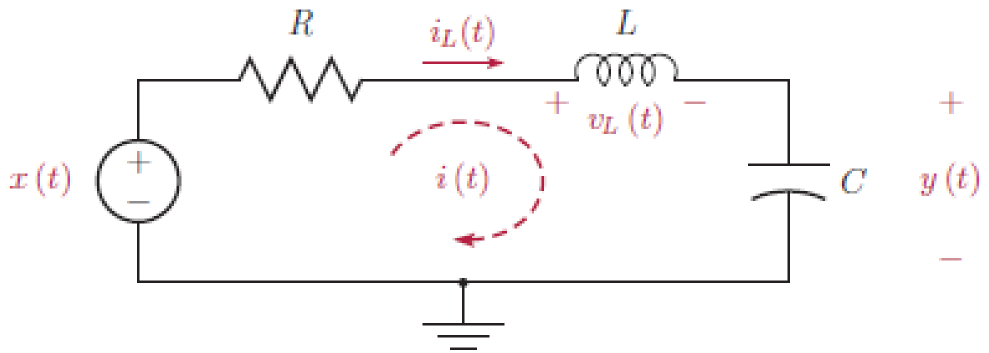
$$c1 + c2 = 1.5$$
$$-2c1 - 3c2 = 12$$

$$c1 = 16.5; c2 = -15$$

$$y(t) = \ \ 16.5e^{-2t} - 15e^{-3t}$$



The natural response of a system



R = 6 Ω, L = 1 H and C = 1/9 F.

At time t = 0, the initial inductor current is i (0) = 0.5 A, and the initial capacitor voltage is y (0) = 2 V

تمرين : اعد الحل لإيجاد الاستجابة لهذا النظام من اجل المعطيات الجديدة :

دراسة الاستجابة لدخل صفري :

$$\lambda^2 y(t) + 6\lambda y(t) + 9y\,(t) = 0$$

$$(\lambda + \mathbf{3})^2 = 0 \qquad \boldsymbol{\lambda 1 = \lambda 2 = -3}$$

Repeated real roots

$$\boldsymbol{y(t) = \ (c1 + c2t)e^{-3t}}$$

$$\boldsymbol{y(0) = \ \big(c1 + c2(0)\big)e^{-3(0)} = 2 \rightarrow c1 = 2}$$

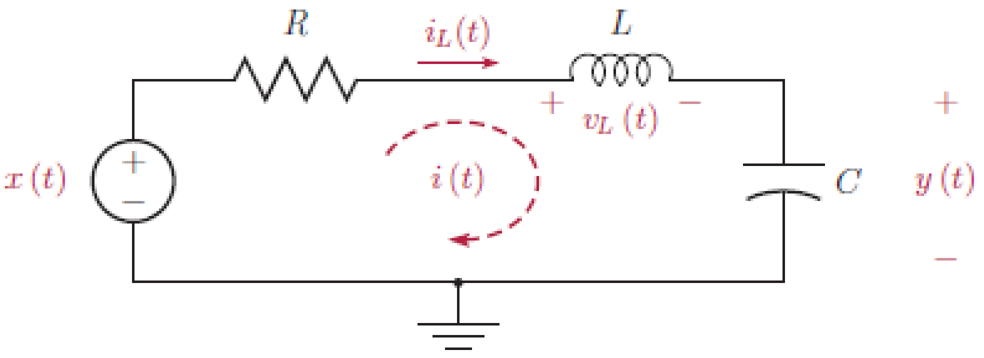
$$\boldsymbol{i(0) = C\,d\frac{y(0)}{dt} \rightarrow \frac{dy(0)}{dt} = 4.5}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy(t)}{dt} = c2e^{-3t}\text{-}3\ e^{-3t}(c1 + c2t)}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy(0)}{dt} = c2\text{-}3\ (2) = 4.5 \ \rightarrow c2 = 10.5}$$

$$\boldsymbol{y(t) = \ (2 + 10.5t)e^{-3t}}$$

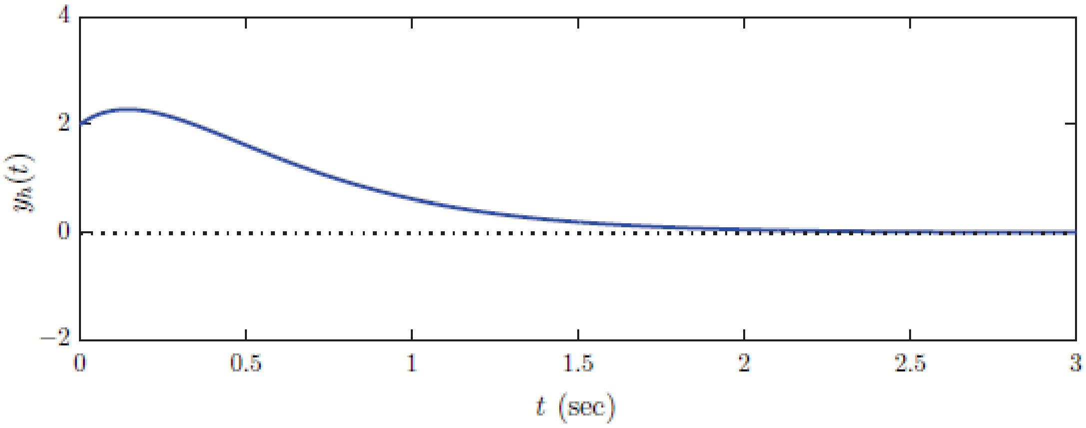
The natural response of a system



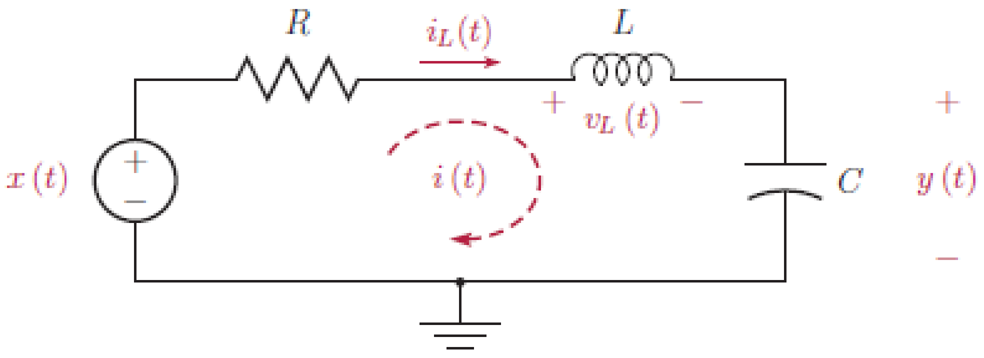
R = 6 Ω, L = 1 H and C = 1/9 F.

At time t = 0, the initial inductor current is i (0) = 0.5 A, and the initial capacitor voltage is y (0) = 2 V

$$y(t) = (2 + 10.5t)e^{-3t}$$



The natural response of a system



R = 0 Ω, L = 1 H and C = 1/9 F.

At time t = 0, the initial inductor current is i (0) = 0.5 A, and the initial capacitor voltage is y (0) = 2 V

تمرين : اعد الحل لإيجاد الاستجابة لهذا النظام من اجل المعطيات الجديدة :

$$x(t) = LC\frac{d^2y(t)}{d^2t} + y\,(t)$$

$$\frac{1}{LC}x(t) = \frac{d^2y(t)}{d^2t} + \frac{1}{LC}y\,(t)$$

$$\frac{1}{LC}x(t) = \lambda^2 y(t) + \frac{1}{LC}y\,(t)$$

دراسة الاستجابة لدخل صفري :

$$\lambda^2 y(t) + 9y\,(t) = 0$$

$$\frac{1}{LC} = 9, w0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$(\lambda^2 + \mathbf{9}) = 0$$

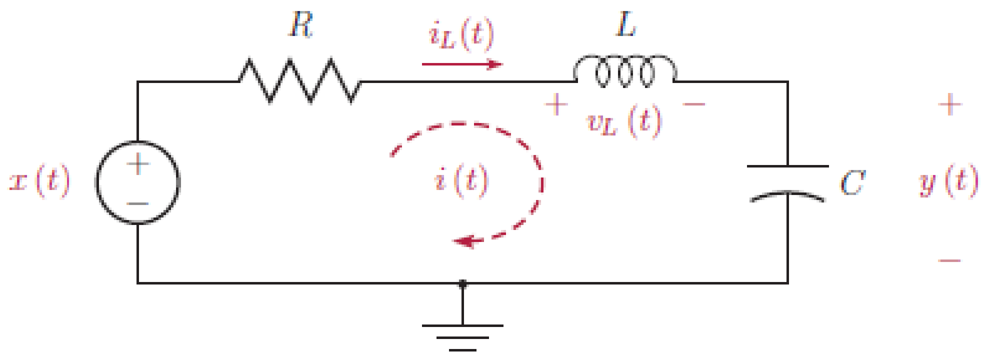
$$\lambda\mathbf{1} = +\boldsymbol{j3}, \qquad \lambda\mathbf{2} = -\boldsymbol{j3}$$

Complex roots

$$y(t) = c1e^{\lambda 1t} + c2e^{\lambda 2t}$$

$$y(t) = c1e^{+\boldsymbol{j3t}} + c2e^{-\boldsymbol{j3t}}$$

The natural response of a system



R = 0 Ω, L = 1 H and C = 1/9 F.

At time t = 0, the initial inductor current is i (0) = 0.5 A, and the initial capacitor voltage is y (0) = 2 V

$$y(0) = 2 = c1e^{+j3(0)} + c2e^{-j3(0)} \rightarrow \boldsymbol{c1 + c2 = 2}$$

$$i(0) = C\, d\frac{y(0)}{dt} \rightarrow \frac{dy(0)}{dt} = 4.5$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 3jc1e^{+j3t} - 3jc2e^{-j3t}$$

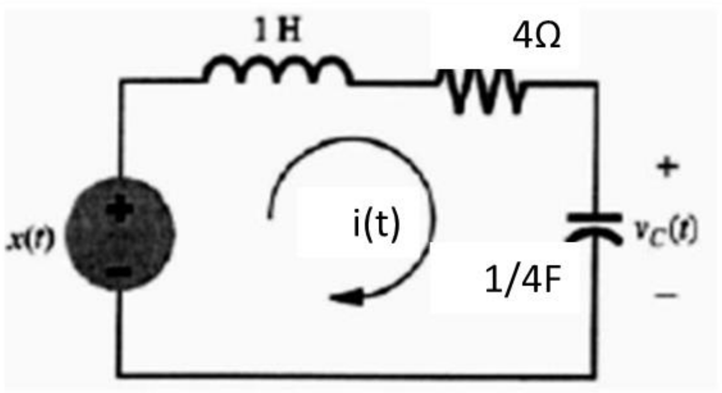
$$\frac{dy(0)}{dt} = 4.5 = 3jc1e^{+j3(0)} - 3jc2e^{-j3(0)} \rightarrow \boldsymbol{4.5 = 3j(c1 - c2)}$$

$$\boldsymbol{c1 + c2 = 2}$$

$$\boldsymbol{4.5 = 3j(c1 - c2)}$$

$$\boldsymbol{y(t) = 2cos\,(3t) + 1.5sin(3t)}$$

The natural response of a system



تمرين : لديك الدارة التالية:

- اوجد المعادلة المميزة لهذه الجملة
- واوجد الاستجابة الزمنية لها
- ثم اوجد استجابتها من اجل دخل صفري .

لإيجاد المعادلة التفاضلية المميزة للجملة السابقة حسب قانون كيرشوف للجهود:

$$v(t) = Ri(t) + L\,di(t)/dt + \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt$$

نشتق مرة واحدة بالنسبة للزمن :

$$\frac{dv(t)}{d(t)} = \frac{Rdi(t)}{dt} + L\,d^2\,i(t)/dt^2 + (1/c) * i(t)$$

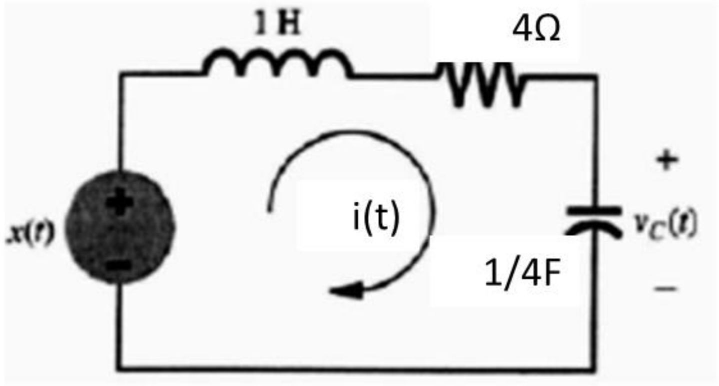
فتصبح المعادلة:

$$\lambda\,v(t) = R\,i(t)\lambda + \lambda^2 Li(t) + \left(\frac{1}{c}\right) * i(t) = i(t)(R\lambda + \lambda^2 L + 1/c)$$

الاستجابة الزمنية :

$$H(t) = i(t)\,/\,v(t) = \lambda/(R\lambda + \lambda^2 L + 1/c)$$

The natural response of a system



إيجاد الاستجابة لدخل صفري :

نجعل $RD + D^2L + 1/c = 0$ أي $4D + D^2 + 4 = 0$

حل هذه المعادلة $\lambda = -2$ وهو جذر مضاعف فيكون الحل العام من الشكل:

$$i_0\,(\mathrm{t}) = (\mathrm{c}1 + c2t)e^{\lambda t} \qquad (*)$$

من الشروط الابتدائية $i_0\,(0) = 1$ نحسب قيمة الثابت c1 :

$$1 = (c1 + c2(0))e^{-2(0)}$$

فتكون قيمة الثابت c1=1 ولحساب الثابت c2 يجب استخدام قيمة المشتق الابتدائية:

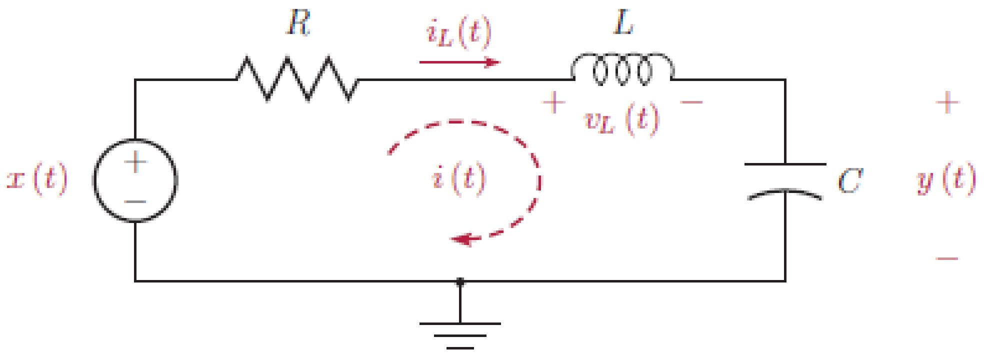
$$i_0'(t) = -3$$

باشتقاق العلاقة (*) الموضحة أعلاه والتعويض بقيمة c1 و ب t=0 وقيمة المشتق يكون c2 = -1 فيكون الحل العام هو :

$$i_0\,(\mathrm{t}) = (1 - t)e^{-2t}$$

The natural response of a system

تمرين إضافي

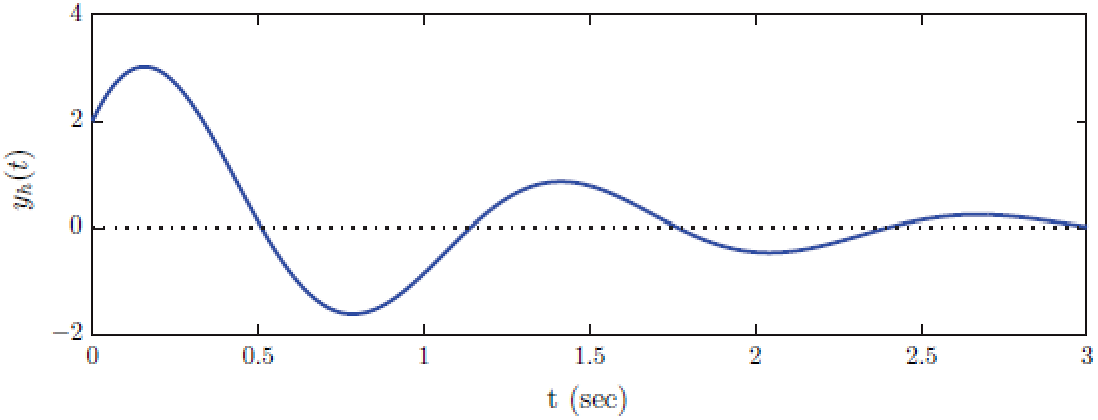


. At time $t = 0$, the initial inductor current is $i(0) = 0.5$ A, and the initial capacitor voltage is $y(0) = 2$ V. No external input signal is applied to the circuit, therefore $x(t) = 0$.

Determine the output voltage $y(t)$ if

a. the element values are $R = 2\ \Omega$, $L = 1$ H and $C = 1/26$ F,

$$y_h(t) = 2\,e^{-t}\cos(5t) + 3\,e^{-t}\sin(5t)$$



(a)

The natural response of a system

تمرين إضافي

لديك المعادلات التفاضلية المتجانسة التالية :
استخرج المعادلة المميزة من كل منها ثم اوجد الحل بالاعتماد على القيم الابتدائية المبينة واقترح الدارة المناسبة لكل معادلة.

a. $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0\,, \quad y(0) = 3\,, \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

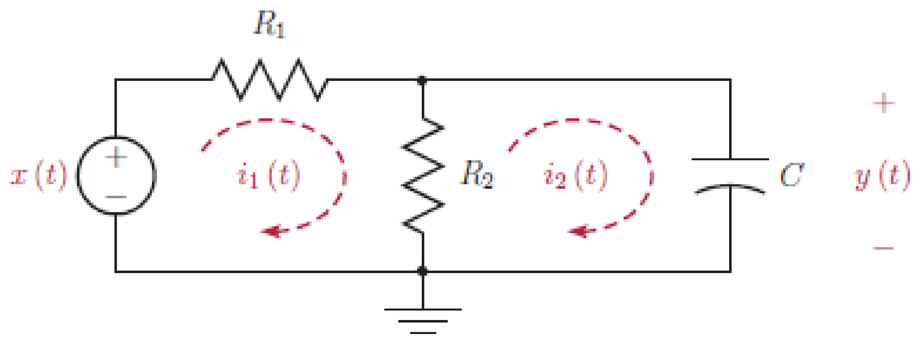
b. $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 0\,, \quad y(0) = -2\,, \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 1$$

c. $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - y(t) = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = -2$$

The natural response of a system

تمرين إضافي

اوجد المعادلة التفاضلية الواصفة لعمل الدارة الكهربائية التالية



R1=R2 = 1 Ω and C = 1/4 F

$$y(0) = 5$$

$$x(t) = v_{R1} + v_{R2} = i1\,(t)R1 + \big(i1(t) - i2(t)\big)R2$$

$$y(t) + R2\big(i2(t) - i1(t)\big) = 0 \qquad i1(t) = \frac{C\,dy(t)}{dt} + \frac{1}{R2}y(t)$$

$$y(t) = \ vc \rightarrow i2(t) = \frac{C\,dy(t)}{dt} \qquad y(t) + R2\left(\frac{C\,dy(t)}{dt} - i1(t)\right) = 0$$

$$x(t) = R1(\frac{C\,dy(t)}{dt} + \frac{1}{R2}y(t)) + \left(\frac{C\,dy(t)}{dt} + \frac{1}{R2}y(t) - \frac{C\,dy(t)}{dt}\right)R2$$

$$x(t) = R1\frac{C\,dy(t)}{dt} + \frac{(R2 + R1)}{R2}y(t)$$

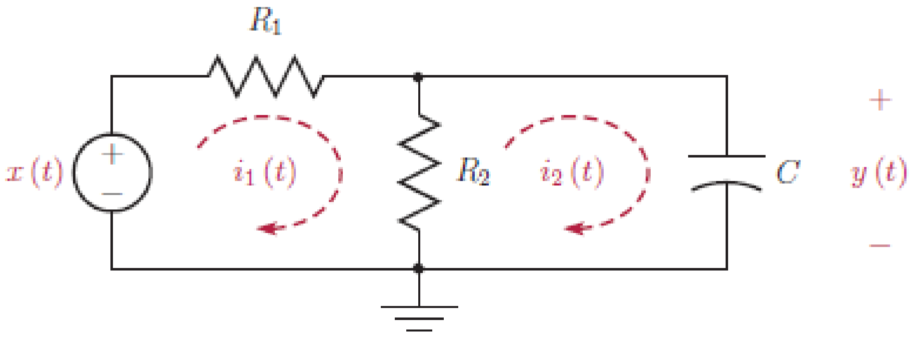
$$\boxed{\frac{1}{R1C}x(t) = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{(R2 + R1)}{R2R1C}y(t)}$$

The natural response of a system

إيجاد الاستجابة لدخل صفري:

R1=R2 = 1 Ω and C = 1/4 F

$$y(0) = \ 5$$



$$\frac{1}{R1C}x(t) = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{(R2+R1)}{R2R1C}y(t)$$

$$4x(t) = \frac{dy(t)}{dt} + 8y(t)$$

$$0 = \frac{dy(t)}{dt} + 8y(t)$$

$$\lambda y(t) + 8y(t) = 0 \rightarrow \lambda = -8$$

$$y(0) = \ ce^{-8(0)} \rightarrow c = 5$$

$$y(t) = \ 5e^{-8t}$$

The End