الإحصاء- المحاضرة الثالثة

Statistics for robot engineering- Lecture 3

Dr Fadi KHALIL

Doctor lecturer in statistics and programing

في هذه المحاضرة سيتم التطرق لـ

- مفهوم المتغير العشوائي Random variable
- التوقع الرياضي لمتغير عشوائي Expectation for a random variable
- التوقع الرياضي لمجموع متغيرات عشوائيةExpectation for a sum of random variables .
- التباين لمتغير عشوائي Variance for a random variable
- التباين لمجموع متغيرات عشوائية Varianc for a sum of random variables.
- التباين لمجموع متغيرات عشوائية Varianc for a sum of random variables.
- التباين المشترك لمتغيرين covariance of two variables

10- التوقع الرياضي والتباين لمتغيرعشوائي Expectation and variance of a random variable:

يُعرّف المتغير العشوائي random variable بأنّه تعبير رقمي عن نتائج ظاهرة أو تجربة ما والتي تهم صاحب القرار أو القائم على دراسة معينة. ومن شروط المتغير العشوائي أنّه يأخذ قيمة واحدة فقط تقترن بلحظة ما أو مفردة ما (observation). مثلاً لا يمكن أن يأخذ متغير الطول لطالب ما في لحظة زمنية معينة قيمتين !!!!. بالمقابل من الممكن أن يأخذ هذا المتغير قيمتين لطالبين في لحظة زمنية معينة.

وبما إنّ أي قيمة يمكن أن يأخذها متغير عشوائي ما تتحدد عن طريق مخرجات تجربة ما يتم تعيين احتمال معين لها.

مثلاً في تجربة رمي حجر النرد يمكن تعريف متغير عشوائي Y_i يعبر عن الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي، بالتالي يمكن لـ Y أن يأخذ القيم مع الاحتمالات الآتية:

Y_i	1	2	3	4	5	6	Σ
$P(Y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

من الممكن أن يتم تعريف قيم المتغير العشوائي واحتمالها بشكل آخر وفقاً لهدف التجربة أو الدراسة كما في المثال الآتي:

بفرض أنّ شخص ما قام بشراء جهازين إلكترونيين، كل واحد منهما إمّا أن يكون تالف باحتمال 0.3 أو صالح للاستخدام 0.7، بالتالي يمكن تعريف متغير عشوائي X_i يعبر عن عدد الأجهزة صالحة الاستخدام والذي يأخذ القيم:

X_i	0	1	2	Σ
$P(X_i)$	0.09	0.42	0.49	1

عموماً يمكن تصنيف المتغيرات العشوائي ضمن نوعين من المتغيرات وهما : **المتغيرات المنقطعة** discrete variables وهي التي تكون قيمها الممكنة عبارة عن قيم صحيحة وتكون لاحتمالها النقطي ذو أهمية بمعنى آخر من أجل أي متغير عشوائي منقطع X_i يكون احتمال أن يأخذ قيمة معينة x_i:

$$p(x_i) = p(X_i = x_i)$$

ويكون مجموع الاحتمالات الكلية لجميع القيم الممكنة التي يأخذها المتغير X_i:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_{i_i}) = 1$$

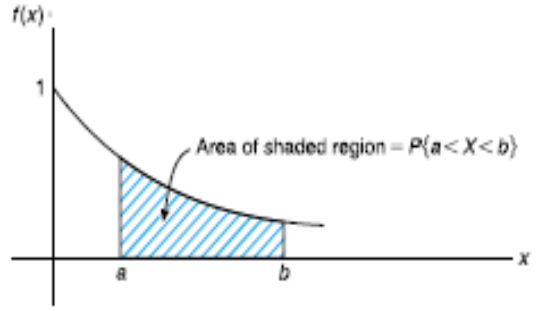
أمّا النوع الثاني من المتغيرات فهي المتغيرات المستمرة continuous random vaiables وهي المتغيرات التي يكون قيمها الممكنة مستمرة ضمن مجال. بمعنى آخر من أجل أي متغير عشوائي مستمر X_i يكون احتمال أن يأخذ المتغير قيمة نقطية $f(x_i)$ غير مهمّاً (أو صغيراً جداً) مقارنة باحتمال أن يقع ضمن مجال $[a, b]$، والذي يساوي:

$$p(a \le X_i \le b) = \int_a^b f(x_i)dx$$

حيث :

$$f(x_i)dx = p[x_i < X_i < x_i + dx]$$

ويمكن توضيح هذا الاحتمال بالشكل الآتي:



يلاحظ أن مصطلح "العشوائية" يقترن مع مصطلح "المتغير" وهو يعبر عن وجود عدم تأكد في معرفة القيمة التي سيأخذها المتغير، ولكن من خلال التجارب والمعرفة المسبقة لدى الباحث يمكن معرفة أمرين، الأول مجال القيم التي يمكن أن تقع ضمنه قيم المتغير، ثانياً، احتمال أن يأخذ المتغير قيمة معينة ضمن هذا المجال، يطلق على هذه الصيغة التي تربط القيم الممكنة لمتغير عشوائي مع احتمالها بالتوزيع الإحتمالي probability distrbution والتي يكون هدفه هو إظهار احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة ما. يمكن التعبير عن هذه الصيغة بثلاث حالات، صيغة رياضية، صيغة جدولية، أو صيغة بيانية.

وإن أي تعبير بياني عن التوزيع الاحتمالي يكون عبارة عن محورين، الأول محور أفقي لقيم المتغير، و الآخر محور عمودي للاحتمالات. وبربط القيم مع احتمالها بيانياً يظهر التوزيع الاحتمالي بنوعيه المنقطع والمستمر.

تتضمن أدبيات الإحصاء العديد من التوزيعات الإحتمالية الخاصة بأنواع متعددة من المتغيرات منها ما هو منقطع (مثل توزيع بيرنولي Bernoulli، الثنائي Binomial، بواسونPoisson ، فوق الهندسي hypergemotric). ومنها ما هو مستمر (مثل التوزيع الطبيعي والطبيعي المعياري standard normal distribution and normal، ستيودنت student distribution).

من ناحية أخرى إنّ تعدد قيم المتغير العشوائي واقترانها مع احتمالات معينة يظهر أهمية وضرورة لتوقع القيمة التي يأخذها هذا المتغير وهو ما نطلق عليه بالتوقع الرياضي لمتغير عشوائي.

10-1- التوقع الرياضي لمتغير العشوائي Expectation of a random variable:

يعتبر توقع المتغير العشوائي من أهم مفاهيم نظرية الاحتمالات، ويقوم على فكرة مفادها أنّه في الوقت الذي يأخذ المتغير العشوائي أكثر من قيمة ممكنة وأنّ كل قيمة ترتبط باحتمال معيّن فإنّ من الممكن إيجاد توقع لقيمة هذا المتغير. بمعنى آخر إنّ القيمة المتوقعة (expected value) لمتغير ما هي مجموع (أو تكامل) القيم الممكنة لها المتغير.

فإذا كان X_i متغير عشوائي يأخذ القيمة الآتية :

$$x_1, x_2, x_3, \dots \dots x_n,$$

فإنّ توقع المتغير $E(X_i)$ يُعطى كما يأتي:

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(X_i = x_i)$$

أي أنّ توقع المتغير العشوائي *Expectation* أو القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي هي حاصل جمع ضرب كل قيمة من قيم المتغير في احتمالها. أو بمعنى آخر إن توقع المتغير العشوائي هو الوسط الحسابي المرجّح لقيم المتغير باحتمالها المرافق.

مثال 15:

إذا كان X_i متغير عشوائي يأخذ قيمتين $0, 1$ باحتمال متساوي $\frac{1}{2}$:

$$p(0) = \frac{1}{2}, \quad p(1) = \frac{1}{2}$$

فإنّ توقع هذا المتغير *expectation* يساوي

$$E(X_i) = 0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

يلاحظ من قيمة التوقع أنّها تساوي الوسط الحسابي المرجّح للقيمتين $0, 1$، وبفرض كان

$$p(0) = \frac{1}{3}, \quad p(1) = \frac{2}{3}$$

يصبح التوقع:

$$E(X_i) = 0 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

بالعودة لمثال حجر النرد يمكن توضيح مفهوم التوقع بشكل أكثر دقة:

إذ تمّ تعريف متغير عشوائي Y_i يعبر عن الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي، والذي يأخذ القيم مع الاحتمالات الآتية:

Y_i	1	2	3	4	5	6	Σ
$P(Y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

وفقاً لما سبق يمكن حساب التوقع الرياضي للمتغير Y_i:

$$E(Y_i) = 1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + 3 * \frac{1}{6} + 4 * \frac{1}{6} + 5 * \frac{1}{6} + 6 * \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

أي أنّ القيمة المتوقعة للمتغير Y_i هي $\frac{7}{2}$. ولكن قد يتم التساؤل هنا أنّه كيف يمكن للمتغير Y_i أن يأخذ هذه القيمة وهي ليست من ضمن أرقام حجر النرد؟؟ الجواب على هذا السؤال يتيح فهم أدق لتوقع المتغير العشوائي، وهو أنّ عند إجراء التجربة عدد كبير جداً من المرّات فإنّ متوسط القيم التي من الممكن أن يأخذها المتغير العشوائي هو $\frac{7}{2}$.

من ناحية أخرى إنّ صيغة التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر *continuous random variable* تشبه إلى حد كبير صيغة التوقع الرياضي لمتغير منقطع *discrete random variable*، ولكن مع استبدال المجموع بالتكامل كون دالة الاحتمالات في المتغير المستمر لا تتعامل مع قيم نقطية، بل مع قيم مجالية (حتى لو كانت صغيرة dx).

$$E(X_i) = \int_a^b x\, f(x) dx$$

مثال 16:

بفرض أنّ شخص ما ينتظر وصول رسالة في وقت ما بعد الساعة الخامسة مساءً، وأنّه لا يستطيع أن ينتظر أكثر من ساعة ونصف، و بفرض أنّ X_i متغير عشوائي يعبر عن عدد الساعات التي ينتظرها بعد الساعة الخامسة حتى استلام الرسالة، فما هو التوقع الرياضي لهذا المتغير؟

يلاحظ أنّ المتغير X_i هو متغير مستمر (عدد الساعات)، وبفرض تابع الكثافة الإحتمالي هو:

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{1.5} & if \quad 0 < x < 1.5 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

فإنّ التوقع الرياضي يُعطى كما يأتي:

$$E(X_i) = \int_0^{1.5} x \frac{1}{1.5} dx$$

$$E(X_i) = \frac{1}{1.5}\int_0^{1.5} x \; dx$$

بما إنّ عكس المشتق *antiderivative* لـ x هو $\frac{1}{2}\,x^2$

$$\frac{1}{1.5}\left(\left[\frac{1}{2}\,x^2\right]^{1.5} - \left[\frac{1}{2}\,x^2\right]^{0}\right)$$

$$\frac{1}{1.5}\left(\left[\frac{1}{2}\,x^2\right]^{1.5}\right) = \frac{1}{1.5}\left(\frac{1}{2}\,1.5^2\right) = 0.75$$

أي أنّ الوقت المتوقع انتظاره بعد الساعة الخامسة مساءاً هو بالمتوسط ثلاث أرباع الساعة.

10-1-1- خواص التوقع الرياضي properties of expectation:

1- التوقع الرياضي لدالة متغيرعشوائي $g(X_i)$:

إذا كان X_i متغير عشوائي مع تابع كثافة احتمالي $p(x_i)$، وكان $g(X_i)$ هو دالة للمتغير X_i،

1- إذا كان X_i متغير منقطع فإنّ :

$$E[g(X_i)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,p(x_i)$$

2- إذا كان X_i متغير مستمر فإنّ :

$$E[g(X_i)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,f(x)dx$$

مثال 17:

بفرض X_i متغير عشوائي يأخذ القيم $0,\ 1,\ 2$ مع الإحتمالات الآتية:

$$p(0) = 0.2, \qquad p(1) = 0.5, \qquad p(2) = 0.3$$

المطلوب:

1- حساب التوقع الرياضي لـ X_i.

2- حساب التوقع الرياضي لـ X_i^2.

1- يلاحظ من القيم التي يأخذها المتغير هو متغير منقطع، وبالتالي يُعطى التوقع:

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(X_i = x_i)$$

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(X_i = x_i)$$

$$E(X_i) = 0 * 0.2 + 1 * 0.5 + 2 * 0.3 = 1.1$$

2- لحساب التوقع الرياضي لـ $E(X_i^2)$ يُستفاد من الخاصية:

$$E[g(X_i)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\, p(x_i)$$

حيث : $g(X_i) = X_i^2$:

X_i	0	1	2
$g(X_i) = X_i^2$	0	1	4
$p(x_i)$	0.2	0.5	0.3

بالتالي:

$$E[g(X_i)] = 0 * 0.2 + 1 * 0.5 + 4 * 0.3 = 1.7$$

مثال 18:

بفرض أنّ X_i متغير عشوائي يعبر عن الوقت (بالساعات) اللازم لإصلاح عطل كهربائي في أحد المصانع، وكان تابع الكثافة الإحتمالي كالآتي:

$$f(x_i) = \begin{cases} 1 & if\ \ 0 < x < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

فإذا كان التكلفة الناتجة عن عطل كهربائي خلال فترة x_i تقدر بـ x_i^3، فما هي التكلفة المتوقعة في حال حدوث عطل كهربائي ما في هذا المعمل؟

الحل: يلاحظ أنّ المتغير X_i يعبر عن عدد الساعات وهو متغير مستمر ويلاحظ أيضاً أنّ زمن إصلاح العطل يتراوح بين *[0, 1]* وبالتالي يُعطى التوقع الرياضي بـ:

$$E(X_i) = \int_0^1 x\, f(x)dx$$

وبما إنّ تكلفة العطل الكهربائي $g(x_i)$ هي تابع أو دالة لزمن إصلاح العطل $g(x_i) = x_i^3$، إذاً يُعطى التوقع الرياضي لتكلفة أي عطل كهربائي بـ:

$$E[g(X_i)] = \int_0^1 g(x)\, f(x) dx$$

أي بالتعويض

$$E[g(X_i)] = \int_0^1 x^3\, dx$$

بما إنّ عكس المشتق *antiderivative* لـ x^3 هو $\frac{1}{4}\, x^4$

$$\left(\left[\frac{1}{4}\, x^4\right]^1 - \left[\frac{1}{4}\, x^4\right]^0\right) = \frac{1}{4}$$

أي أنّ توقع تكلفة أي عطل كهربائي يحصل في هذا المعمل يصل إلى $\frac{1}{4}$.

2- التوقع الرياضي لعدد ثابت مضروب في متغير عشوائي يساوي العدد الثابت مضروب في التوقع الرياضي لهذا المتغير، أي:

$$E(aX_i) = a\, E(X_i)$$

حيث : a يمثل أي عدد ثابت.

3- التوقع الرياضي للمقدار $E(aX_i + b)$ يساوي:

$$E(aX_i + b) = a\, E(X_i) + b$$

4- التوقع الرياضي لمجموع متغيرين عشوائيين X_i، Y_i يساوي مجموع التوقع الرياضي لكل منهما، أي :

$$E(X_i + Y_i) = E(X_i) + E(Y_i)$$

يمكن تعميم هذه الخاصية لتصبح :

$$E\left(X_{i,1} + X_{i,2} + \cdots X_{i,n}\right) = E\left(X_{i,1}\right) + E\left(X_{i,2}\right) + \cdots E\left(X_{i,n}\right)$$

مثال 19:

ما هو التوقع الرياضي لمجموع الرقمين الظاهرين على الوجه العلوي عندي رمي حجري نرد؟

يمكن إيجاد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X_i والذي يعبر عن مجموع الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين لحجري النرد والذي يأخذ القيم :

$$2, 3, 4, 5, \dots \dots 12$$

وذلك عن طريق الصيغة:

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{12} x_i \, p(x_i)$$

ولكن يمكن إيجاد التوقع الرياضي بطريقة أخرى أكثر سهولة،

فإذا كان X_i متغير عشوائي يعبر عن الرقم الظاهر على الوجه العلوي عندي رمي حجر النرد الأول، و كان Y_2 متغير عشوائي يعبر عن الرقم الظاهر على الوجه العلوي عندي رمي حجر النرد الثاني، فإنّ توقع المجموع يساوي:

$$E(X_i + Y_i) = E(X_i) + E(Y_i)$$

حيث تمّ سابقاً في المثال 25 حساب التوقع الرياضي للرقم الظاهر على الوجه العلوي ويساوي 3.5، بالتالي:

$$E(X_i + Y_i) = 3.5 + 3.5 = 7$$

مثال 20:

قامت شركة بناء بتقديم عروض لإنشاء ثلاث مشاريع تبلغ قيمة الأرباح المتوقعة بها 10 آلاف دولار باحتمال قدره 0.2، و 20 ألف دولار باحتمال قدره 0.7، و40 ألف دولار باحتمال قدره 0.4. فما هو التوقع الرياضي لإجمالي الأرباح المنتظرة لهذا الشركة؟

بفرض أنّ $X_{i,1}$ متغير عشوائي يعبر عن قيمة الربح في المشروع الأول، والذي يأخذ قيمة 10 في حال الربح باحتمال قدره 0.2 و 0 في حال عدم وجود ربح باحتمال قدره 0.8، بالتالي التوقع الرياضي للربح في هذا المشروع :

$$E(X_{i,1}) = \sum_{i=1}^{2} x_i \, p(x_i)$$

$$= 10 * 0.2 + 0 * 0.8 = 2$$

كذلك بفرض أنّ $X_{i,2}$ متغير عشوائي يعبر عن قيمة الربح في المشروع الثاني والذي يأخذ قيمة 20 في حال الربح باحتمال قدره 0.7 و 0 في حال عدم وجود ربح باحتمال قدره 0.3، بالتالي التوقع الرياضي للربح في هذا المشروع :

$$E(X_{i,2}) = \sum_{i=1}^{2} x_i\, p(x_i)$$

$$= 20 * 0.7 + 0 * 0.3 = 14$$

كذلك بفرض أنّ $X_{i,3}$ متغير عشوائي يعبر عن قيمة الربح في المشروع الثاني والذي يأخذ قيمة 40 في حال الربح باحتمال قدره 0.4 و 0 في حال عدم وجود ربح باحتمال قدره 0.6، بالتالي التوقع الرياضي للربح في هذا المشروع :

$$E(X_{i,3}) = \sum_{i=1}^{2} x_i\, p(x_i)$$

$$= 40 * 0.4 + 0 * 0.6 = 16$$

وبفرض أنّ Y_i هو التوقع الرياضي لإجمالي الأرباح المتوقع يساوي :

$$Y_i = X_{i,1} + X_{i,2} + X_{i,3}$$

بالتالي يمكن الإستفادة من خاصية التوقع الرياضي:

$$E(Y_i) = E(X_{i,1} + X_{i,2} + X_{i,3})$$

$$E(Y_i) = E(X_{i,1}) + E(X_{i,2}) + E(X_{i,3})$$

$$E(Y_i) = 2 + 14 + 16 = 32$$

بالتالي تتوقع الشركة الحصول على ربح مقداره 32 ألف دولار من استثمارها في المشاريع الثلاث.

5- في مبحث مؤشرات النزعة المركزية يظهر أنّ الخاصية الأهم للمتوسط الحسابي *arithmetic mean* هو استخدامه كوسيلة للتنبؤ بقيمة المتغير العشوائي. وفيما يأتي تفسير لهذه الخاصيّة:

بفرض أنّ X_i متغير عشوائي وأنّه تمّ التنبؤ بأنّ قيمته تساوي c، بالتالي يمكن تقدير خطأ التنبؤ *prediction error* بأنّ مربع الفرق بين القيمة الحقيقية X_i والقيمة المتوقعة c، أي $(X_i - c)^2$. من الخاصية السابقة يمكن الاستدلال بأنّ إذا تمّ تعويض الوسط الحسابي μ بدلاً من c فإنّ توقع قيمة الخطأ ستكون هي الأقل من بين كل القيم الأخرى، ويمكن برهان ذلك كما يأتي:

يقدر توقع خطأ التنبؤ بـ:

$$E(X_i - c)^2$$

فإذا تمّ إضافة أو طرح قيمة المتوسط μ :

$$E(X_i - c)^2 = E\left[(X_i - \mu + \mu - c)^2\right]$$

بفك المتطابقة التربيعية:

$$= E\left[(X_i - \mu)^2 + 2(\mu - c)(X_i - \mu) + (\mu - c)^2\right]$$

بإدخال التوقع إلى داخل القوس:

$$= E\left[(X_i - \mu)^2\right] + E\left[2(\mu - c)(X_i - \mu)\right] + E\left[(\mu - c)^2\right]$$

يمكن الإستفادة من الخاصية $E(aX_i) = a\,E(X_i)$ لإخراج المقدار $2(\mu - c)$ خارج التوقع:

$$= E\left[(X_i - \mu)^2\right] + 2(\mu - c)E\left[(X_i - \mu)\right] + E\left[(\mu - c)^2\right]$$

إنّ المقدار $E\left[(X_i - \mu)\right]$ يساوي:

$$E\left[(X_i - \mu)\right] = E(X_i) - E(\mu) = 0$$

الصفر لأنّ $E(X_i) = \mu$ بمعنى آخر إنّ المتوسط الحسابي μ هو تعبير عن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي $E(X_i)$، بالتالي:

$$E(X_i - c)^2 = E\left[(X_i - \mu)^2\right] + E\left[(\mu - c)^2\right]$$

بالتالي إنّ توقع الخطأ عن القيمة c $E(X_i - c)^2$ يساوي توقع الخطأ عن المتوسط $E\left[(X_i - \mu)^2\right]$ مضافً إليه المقدار $E\left[(\mu - c)^2\right]$ و هو حتما مقدار موجب، أي أنّ:

$$E(X_i - c)^2 \geq E\left[(X_i - \mu)^2\right]$$

بمعنى آخر إنّ توقع الخطأ عن المتوسط (عند استخدام المتوسط كوسيلة للتنبؤ) هو حتماً أصغر من توقع الخطأ عن أي قيمة أخرى. وبالتالي التنبؤ الأفضل لقيمة متغير عشوائي والذي يقلل قيمة مربع خطأ التنبؤ هو المتوسط الحسابي.

10-2- تباين متغيرعشوائي Variance of a random variable:

في المبحث السابق تمّ عرض التوقع الرياضي $E(X_i)$ لمتغير عشوائي expectation والّذي يُعرّف بأنّه الوسط الحسابي لقيم المتغير مرجّحة weighted average باحتمالاتها المرافقة. وإن كان التوقع الرياضي $E(X_i)$ من المقاييس المهمّة التي تعطي معلومات عن خصائص المتغير العشوائي، ولكن في نفس الوقت هو لا يعطي أيّة معلومات عن مقدار تغير أو تشتت هذا المتغير. فعلى سبيل المثال ليكن المتغيرات الثلاث Z_i، Y_i، W_i، مع توابع التوزيع الإحتمالي الآتية:

$$W_i = 0 \qquad with\ \ p(w_i = 0) = 1$$

$$Y_i = \begin{cases} -1 & with\ \ p(y_i = -1) = \frac{1}{2} \\ 1 & with\ \ p(y_i = 1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$Z_i = \begin{cases} -100 & with\ \ p(y_i = -100) = \frac{1}{2} \\ 100 & with\ \ p(y_i = 100) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

عند حساب التوقع الرياضي للمتغيرات الثلاث يلاحظ أنّه يساوي الصفر،

$$E(W_i) = 0 * p(w_i = 0) = 0 * 1 = 0$$

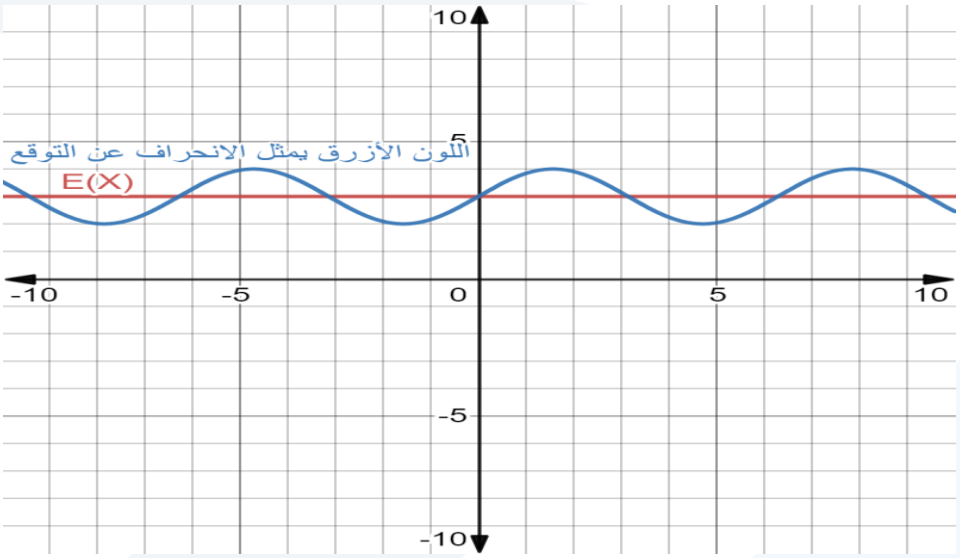
$$E(Y_i) = -1 * p(y_i = -1) + 1 * p(y_i = 1) = -1 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{2} = 0$$

$$E(Z_i) = -100 * p(y_i = -100) + 100 * p(y_i = 100)$$

$$= -100 * \frac{1}{2} + 1000 * \frac{1}{2} = 0$$

ولكن هذه المتغيرات لا تتساوى في التشتت، إذ يلاحظ أنّ المتغير Y_i أكثر تشتتاً من W_i، وهو أقل تشتتاً من Z_i.

وبما إنّه من الممكن أن يأخذ المتغير العشوائي X_i قيماً تدور أو تبتعد أو تختلف عن التوقع $E(X_i)$ الذي يقاس بالمتوسط μ ، بالتالي يعتبر من المنطقي أن يتم قياس تشتت أو تغير X_i عن طريق قياس مقدار البعد أو المسافة بين قيم X_i والتوقع $E(X_i)$ أو μ. يمكن تبسيط الفكرة بالشكل الآتي:



وأحد الطرق الممكنة لقياس هذه المسافة هو أخذ توقع القيمة المطلقة للفرق $E[|X_i - \mu|]$، ولكن قد يكون من الصعوبة التعامل رياضياً مع هذا المقدار، ويعتبر أكثر سهولة اعتماد توقع مربع الفرق بين قيم X_i والتوقع $E(X_i)$ أو μ وهو ما يطلق عليه بتباين المتغير العشوائي، والذي يُعطى:

$$Var\ (X_i) = E[(X_i - \mu)^2]$$

ويمكن اشتقاق صيغة أخرى للتباين كما يأتي:

$$Var\ (X_i) = E[(X_i - \mu)^2]$$

بفك المتطابقة:

$$= E[X_i^2 - 2\mu X_i + \mu^2]$$

بإدخال التوقع:

$$= E[X_i^2] - E[2\mu X_i] + E[\mu^2]$$

بما إنّ $E[\mu^2] = \mu^2$ لأنّ μ^2 يعتبر عدد ثابت وتوقع العدد الثابت هو نفسه (تذكر توقع المتغير W_i في المثال السابق)، كذلك $E[2\mu X_i] = 2\mu E[X_i]$ بالتالي:

$$= E[X_i^2] - 2\mu E[X_i] + \mu^2$$

كذلك $\mu = E[X_i]$:

$$= E[X_i^2] - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= E[X_i^2] - \mu^2$$

أو :

$$Var(X_i) = E[X_i^2] - (\mathrm{E}[X_i])^2$$

بعبارة أخرى إن **تباين متغيرعشوائي يساوي توقع مربع القيم مطروحاً منها مربع توقع القيم.**

ملاحظة: بما إنّ $Var(X_i)$ هو دائما موجب (لكونه رياضياً عبارة عن مربع لمقدار ما)، فإنّ $E[X_i^2] - \mu^2 \geq 0$ بالتالي $E[X_i^2] \geq \mu^2$ أي أنّ **توقع مربع متغيرعشوائي أكبرمن مربع توقع هذا المتغير.**

مثال 21:

ما هو $Var(X_i)$ لمتغير عشوائي X_i يمثل الرقم الظاهر على الوجه العلوي لحجر النرد؟

$$Var(X_i) = E[X_i^2] - (\mathrm{E}[X_i])^2$$

بداية يجب حساب $E[X_i^2]$ وهو توقع مربع القيم :

X_i	1	2	3	4	5	6	Σ
X_i^2	1	4	9	16	25	36	Σ
$P(X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

يتم الاستفادة من خواص التوقع:

$$E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i)$$

$$= 1 * \frac{1}{6} + 4 * \frac{1}{6} + 9 * \frac{1}{6} + 16 * \frac{1}{6} + 25 * \frac{1}{6} + 36 * \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

وقد تبيّن سابقاً أنّ $\mathrm{E}[X_i]$ يساوي $\frac{7}{2}$ بالتالي:

$$Var(X_i) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2.92$$

بالتالي الانحراف المعياري يساوي $SD(X_i) = \sqrt{Var(X_i)} = \sqrt{2.92} = 1.71$

أي في حال إعادة التجربة عدد كبير من المرات فإنّ متوسط الانحراف عن القيمة المتوقعة وهي $\mathrm{E}[X_i] = 3.5$ هو 1.71.

ملاحظة: بما إن X_i يخضع للتوزيع المنتظم $[\alpha,\ \beta] = [1, 6]$ ، فإنّه يمكن حساب:

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$$

بينما التباين $Var(X)$ يُعطى كما يأتي:

$$Var(X) = \frac{(\beta - \alpha + 1)^2 - 1}{12}$$

$$Var(X) = \frac{(6 - 1 + 1)^2 - 1}{12} = \frac{35}{12}$$

وهي نفس القيم السابقة

10-2-1- خواص تباين المتغير العشوائي *Properties of variance of a random variable*:

1- $Var(aX_i) = a^2 Var(X_i)$

2- تباين عدد ثابت يساوي الصفر $Var(b) = 0$

3- $Var(aX_i + b) = a^2 Var(X_i)$

10-2-2- التباين المشترك وتباين مجموع متغيرات عشوائية *covariance and variance of sum of random variabls*:

في مبحث التوقع الرياضي تمّ عرض أنّ توقع مجموع عدة متغيرات عشوائية يساوي مجموع توقع هذه المتغيرات، ولكن عند حساب تباين مجموع متغيرين $Var(X_i + X_i)$ فهل يساوي $Var(X_i) + Var(X_i)$؟

$$Var(X_i + X_i) = Var(2X_i)$$
$$= 4Var(X_i)$$

بالتالي يُلاحظ أنّ $4Var(X_i) \neq Var(X_i) + Var(X_i)$

من ما سبق يمكن القول أنّ تباين مجموع متغيرين عشوائيين يساوي مجموع تباين هذين المتغيرين ولكن مع شرط أن يكون هذين المتغيرين مستقليين.

أي أنّ:

$$Var(X_i + Y_i) = Var(X_i) + Var(Y_i) + Cov(X_i, Y_i)$$

حيث: $Cov(X_i, Y_i)$ هو التباين المشترك بين المتغيرين X_i, Y_i وهو يساوي الصفر في حال كان المتغيرين مستقلين.

ولتوضيح هذا الأمر سيتم عرض **مفهوم التباين المشترك covariance:**

التباين المشترك covariance هو مقياس للعلاقة بين متغيرين عشوائيين، ويصف كيفية تحرك هذين المتغيرين مع بعضهما.

ويُعطى التباين المشترك لمتغيرين عشوائيين X_i، Y_i، $cov(X_i, Y_i)$:

$$cov(X_i, Y_i) = E[(X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y)]$$

حيث، μ_x، μ_y هو المتوسط الحسابي للمتغيرين X_i، Y_i.

يمكن حساب التباين المشترك $cov(X_i, Y_i)$ بصيغة أخرى أكثر سهولة:

$$Cov(X_i, Y_i) = E[(X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y)]$$

$$Cov(X_i, Y_i) = E[X_iY_i - \mu_xY_i - \mu_yX_i + \mu_x\mu_y]$$

$$= E[X_iY_i] - \mu_xE[Y_i] - \mu_yE[X_i] + \mu_x\mu_y$$

$$= E[X_iY_i] - \mu_x\mu_y - \mu_y\mu_x + \mu_x\mu_y$$

$$= E[X_iY_i] - \mu_x\mu_y$$

أو

$$= E[X_iY_i] - E[X_i]E[Y_i]$$

أي أنّ التباين المشترك لمتغيرين يساوي توقع الجداء مطروحاً منه جداء التوقع.

بعض خواص التباين المشترك Properties of coavriance:

1- $Cov(X_i, Y_i) = Cov(Y_i, X_i)$

2- $Cov(aX_i, Y_i) = aCov(X_i, Y_i)$

3- $Cov(X_{i,1} + X_{i,2}, Y_i) = Cov(X_{i1}, Y_i) + Cov(X_{i2}, Y_i)$

مثال 22:

من المعروف أنّ سرعة تحميل الصفحات في النت عبر المواقع الإلكترونية أو ما يعرف بوقت الإستجابة هو أمر هام للمستخدمين وخاصة لمستخدمي الهواتف النقالة. إذ أنّ ارتفاع زمن الإستجابة يؤثر بشكل سلبي على رضا المستخدمين ويزيد من احتمال ترك الموقع لآخر أكثر تنافسية.

ليكن X_i متغير عشوائي يعبر عن قوة الإشارة في النت لأحد المستخدمين، و Y_i متغير عشوائي يعبر عن زمن الاستجابة *response time* لأحد المواقع، من خلال التجربة تمّ قياس تابع الاحتمال المشترك *joint probability distribution* لهذين المتغيرين $f(X_i, Y_i)$ وتمّ تلخيص الاحتمالات في الجدول الآتي:

Y_i وقت الإستجابة (مقاس بالثواني)	X_i قوة الإشارة			
	1	2	3	التوزيع الاحتمالي الهامشي لـ Y_i
4	0.15	0.1	0.05	0.3
3	0.02	0.1	0.05	0.17
2	0.02	0.03	0.2	0.25
1	0.01	0.02	0.25	0.28
التوزيع الاحتمالي الهامشي لـ X_i	0.2	0.25	0.55	1

المطلوب قياس العلاقة بين متغير زمن الإستجابة ومتغير قوة الإشارة.

يعتبر التباين المشترك Cov أحد مقاييس شدة واتجاه العلاقة بين متغيرين عشوائيين، ويُعطى كما يأتي:

$$cov(X_i, Y_i) = E[(X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y)]$$

ويحسب التوقع كما المعتاد بإيجاد مجموع حاصل جداء القيم باحتمالها،

$$cov(X_i, Y_i) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y)\, f(x, y)$$

حيث، $E(X_i) = \mu_x$ متوسط المتغير X_i يساوي 2.35، $E(Y_i) = \mu_y$ متوسط المتغير Y_i يساوي 2.49،

ويتم حساب كل من $E(X_i) = \mu_x$ و $E(Y_i) = \mu_y$ من خلال:

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{3} x_i\, p(x_i)$$

و

$$E(Y_i) = \sum_{i=1}^{4} y_i\, p(y_i)$$

حيث $p(x_i)$، و $p(y_i)$ هما التوزيع الإحتمالي الهامشي *marginal probability distribution* لكل من X_i و Y_i على الترتيب، ويحسب عن طريق جمع الإحتمالات في كل عمود بالنسبة للمتغير X_i و جمع الإحتمالات في كل صف بالنسبة للمتغير Y_i.

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{3} x_i\, p(x_i)$$

$$E(X_i) = 1 * 0.2 + 2 * 0.25 + 3 * 0.55 = 2.35$$

$$E(Y_i) = \sum_{i=1}^{4} y_i\, p(y_i)$$

$$E(Y_i) = 1 * 0.28 + 2 * 0.25 + 3 * 0.17 + 4 * 0.3 = 2.49$$

بالتعويض في :

$$cov(X_i, Y_i) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y)\, f(x, y)$$

ينتج:

$$\begin{aligned} cov(X_i, Y_i) = {} & (1 - 2.35)(1 - 2.49)(0.01) + (2 - 2.35)(1 - 2.49)(0.02) \\ & + (3 - 2.35)(1 - 2.49)(0.25) + (1 - 2.35)(2 - 2.49)(0.02) \\ & + (2 - 2.35))(2 - 2.49)(0.03) + (3 - 2.35)(2 - 2.49)(0.2) \\ & + (1 - 2.35)(3 - 2.49)(0.02) + (2 - 2.35)(3 - 2.49)(0.1) + (3 \\ & - 2.35)(3 - 2.49)(0.05) + (1 - 2.35)(4 - 2.49)(0.15) + (2 \\ & - 2.35)(4 - 2.49)(0.1) + (3 - 2.35)(4 - 2.49)(0.05) \\ & = -0.5815 \end{aligned}$$

10-2-3- التباين المشترك ومعامل الارتباط *Covariance and correlation coefficient*:

يعتبر $cov(X_i, Y_i)$ مقياس للعلاقة بين المتغيرين X_i, Y_i ليس من ناحية الشدة (*strength*) فقط بل من ناحية الاتجاه (*direction*) أيضاً، فالإشارة السالبة لـ $cov(X_i, Y_i)$ تدل على وجود علاقة عكسية بين المتغيرين بمعنى أنّ زيادة أحدهما يؤدي إلى انخفاض الآخر، والإشارة الموجبة تدل على أنّ العلاقة طردية بين هذين المتغيرين، أي أنّ زيادة احدهما تؤدي إلى زيادة الآخر. وهذا يتوافق مع مخطط شكل الانتشار *scatter plot* الذي تمّ التطرق إليه في المبحث الأول حول أساليب التمثيل البياني.

ولكن لقياس العلاقة بين متغيرين هنا مقياس آخر يُسمّى معامل الارتباط *coefficient of correlation* وهو يعتمد على التباين المشترك، إذ يُعطى بالصيغة الآتية:

$$corr = \frac{Cov(X_i, Y_i)}{\sqrt{Var(X_i)Var(Y_i)}}$$

بمجرد النظر إلى هذه الصيغة يلاحظ أنّ معامل الارتباط $corr$ بين متغيرين يُبنى من خلال نسبة التباين المشترك لهذين المتغيرين $Cov(X_i, Y_i)$ على جداء الانحراف المعياري لكل منهما. أي أنّ الارتباط بين متغيرين يمكن قياسيه من خلال قياس نسبة التغير المشترك (السلوك المشترك Cov) للمتغيرين مقسوماً على التغير الخاص (السلوك الخاص Var) لكل منهما. ومنطقياً كلّما كان السلوك المشترك بين ظاهرتين مرتفعاً كلّما دلّ ذلك على وجود علاقة فيما بينهما والعكس صحيح.

وبما إنّ السلوك المشترك أو التباين المشترك Cov هو جزء من السلوك الخاص لأي متغير فإنّه من المتوقع أن تنحصر قيمة معامل الارتباط $corr$ بين *[-1, +1]*.

بالعودة للمثال 22:

ولحساب معامل الارتباط $corr$ بين كل من متغير قوة الإشارة X_i ووقت الإستجابة Y_i، تمّ سابقاً حساب التباين المشترك وهو يساوي -0.5815.

سيتم الآن حساب التباين لكل من X_i، و Y_i من خلال الصيغة:

$$Var(X_i) = E[X_i^2] - (\mathrm{E}[X_i])^2$$

والصيغة

$$Var(Y_i) = E[Y_i^2] - (\mathrm{E}[Y_i])^2$$

تمّ سابقاً حساب $\mathrm{E}[X_i] = 2.35$ و $\mathrm{E}[Y_i] = 2.49$. ويبقى حساب كل من $E[X_i^2]$ و $E[Y_i^2]$،

$$E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i)$$

$$E\left(X_i^2\right) = 1^2 * 0.2 + 2^2 * 0.25 + 3^2 * 0.55 = 6.15$$

$$E(Y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2\, p(y_i)$$

$$E\left(X_i^2\right) = 1^2 * 0.28 + 2^2 * 0.25 + 3^2 * 0.17 + 4^2 * 0.3 = 7.61$$

أي أنّ:

$$Var(X_i) = E[X_i^2] - (\mathrm{E}[X_i])^2$$

$$Var(X_i) = 6.15 - (2.35)^2 = 0.6275$$

و

$$Var(Y_i) = E[Y_i^2] - (\mathrm{E}[Y_i])^2$$

$$Var(Y_i) = 7.61 - (2.49)^2 = 1.4099$$

بتعويض قيمة كل من $Cov(X_i, Y_i)$ ، $Var(X_i)$ و$Var(Y_i)$ في صيغة معامل الارتباط $corr$:

$$corr = \frac{Cov(X_i,Y_i)}{\sqrt{Var(X_i)Var(Y_i)}}$$

$$corr = \frac{-0.5815}{\sqrt{0.6275*1.4099}} = -0.62$$

أي أنّ العلاقة مقبولة بين قوة الإشارة وزمن الإستجابة وهي علاقة عكسية أي إنّ ارتفاع قوة الإشارة تؤدي إلى انخفاض زمن الإستجابة.