5- الدارات الكهربائية electrical circuits - التيار المتناوب alternating current

نســـمي التيار المتناوب بهذا الاســـم لأنه يغير اتجاهه 100 مرة في الثانية الواحدة من أجل التواتر $f = 50Hz$ أو يغير اتجاهه 120 مرة في الثانية الواحدة وذلك من أجل التواتر $f = 60Hz$.

التيار المتناوب يتعلق بالزمن لذلك يمكن كتابته على شكل تابع جيبي يعطى بالعلاقة التالية:

$$i(t) = I\cos(\omega t + \varphi) \qquad (15)$$

حيث أن ω هو التواتر الزاوي وواحدته هي $\frac{rad}{sec}$

الشكل الآخر لعلاقة التيار المتناوب هو:

$$i(t) = I\,sin(\omega t + \varphi) \qquad (16)$$

وتعطى علاقة فرق الكمون بالشكل:

$$v(t) = V_m \sin \omega t \qquad (17)$$

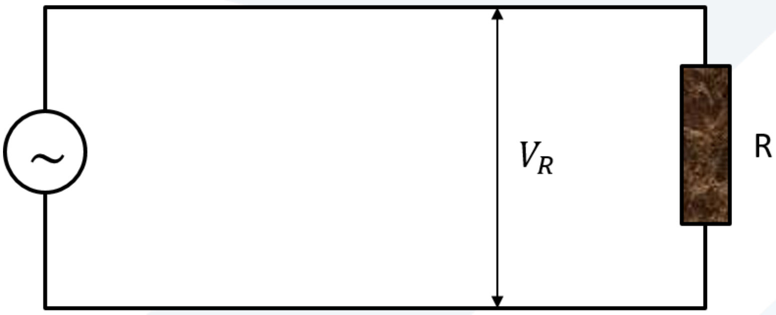
حيث أن m تدل على أن القيمة في هذه الحالة تكون عظمى.

إذا طبقنا هذه القوة بين طرفي دارة كهربائية تحوي مقاومة R موصولة على التسلسل مع ملف (وشيعة) L ومكثفة سعتها C فسوف يمر تيار متناوب يعطى بالعلاقة التالية:

$$i(t) = I\,sin(\omega t - \varphi) \qquad (18)$$

إن إشارة السالب السابقة تعني أن التيار متأخر بالطور.

1-5- دارة مقاومة a circuit contains a resistor:



الشكل (14): دارة مقاومة. يرمز للتيار المتناوب ب ~.

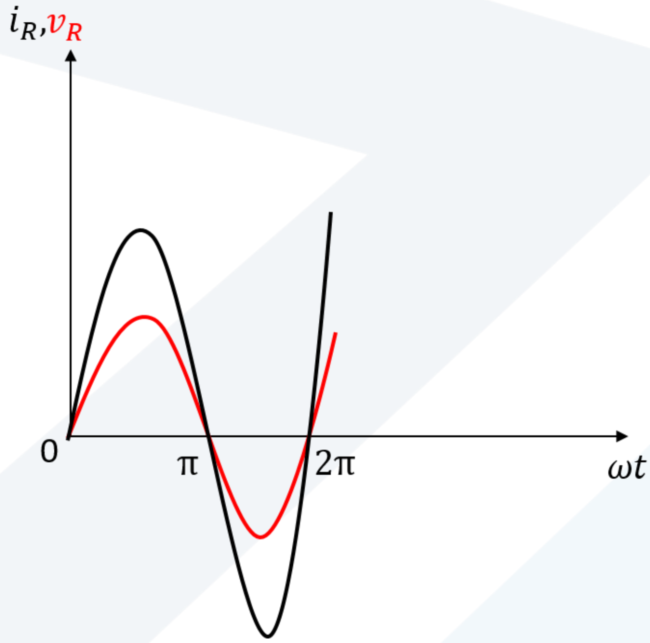
إن V_R تمثل فرق الجهد بين طرفي المقاومة. فإذا كان لدينا $v_R = V_R \sin \omega t$ فما هو التيار المار في هذه الدارة $i_R(t)$؟

الحل:

$$i_R(t) = \frac{v_R}{R} = \frac{V_R \sin \omega t}{R}$$

$$\rightarrow i_R(t) = I_R \sin \omega t$$

بالمقارنة بين علاقتي v_R و i_R نجد أن فرق الجهد بين طرفي المقاومة يتوافق بالطور مع التيار المار به والتوافق بالطور يعني أن كلاً منهما يقطع محور السينات في نفس النقاط.



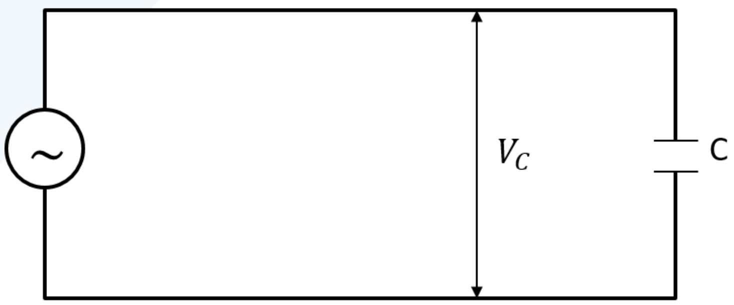
الشكل (15): الشكل يبين التوافق بالطور بين v_R و i_R.

2-5- دارة مكثفة سعوية a capacitor:

إذا كانت القوة المحركة الكهربائية

$$v_C = V_C \sin \omega t$$

فما هو التيار المار في هذه المكثفة؟



الشكل (16): دارة مكثفة. يرمز للتيار المتناوب ب ~.

استناداً إلى علاقة التناسب

$$q = C.v_C$$

حيث C تمثل ثابت التناسب.

$$q = C.V_C.\sin \omega t$$

الغاية هنا هي الحصول على التيار

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

لذا نجري عملية اشتقاق للعلاقة السابقة فنجد:

$$i_C(t) = \omega.C.V_C.\cos \omega t$$

نعرف الردية السعوية (الممانعة السعوية) $X_C = \frac{1}{\omega C}$

والردية السعوية تتعلق بالتواتر الزاوي للمولد وواحدتها هي الأوم Ω.

ثابت الزمن السعوي يعطى بالعلاقة $T = R.C$ وواحدته $\frac{sec}{\Omega}$.

$$\rightarrow i_C(t) = \frac{V_C}{X_C}.\cos \omega t$$

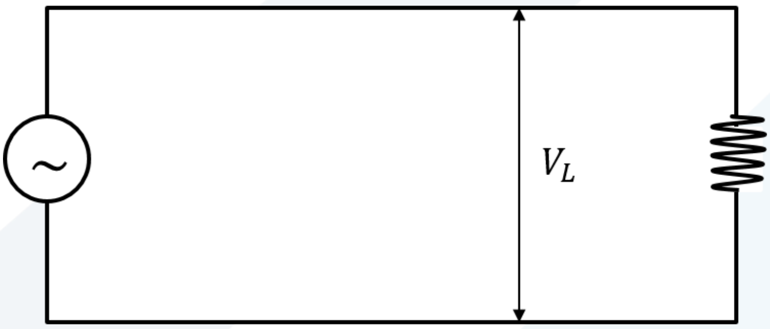
$$\rightarrow i_C(t) = I_C.\cos \omega t$$

$$\rightarrow i_C(t) = I_C.\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

إذن يوجد فرق في الطور بين v_C و i_C.

في حالتنا هذه فإن I_C يتقدم بمقدار $\frac{\pi}{2}$ عن V_C.

3-5- دارة ملف (وشيعة) a solenoid:



الشكل (17): دارة ملف. يرمز للتيار المتناوب ب ~.

إذا كان:

$$v_L(t) = V_L \sin \omega t$$

فما هو التيار المار في الملف؟

من قانون التحريض يمكننا كتابة:

$$v_L = L.\frac{di_L}{dt}$$

حيث L عامل التحريض الذاتي للملف.

وبالتالي بإن:

$$L.\frac{di_L}{dt} = V_L \sin \omega t$$

$$\rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{V_L}{L}\sin\omega t$$

$$\rightarrow di_L = \frac{V_L}{L}\sin\omega t\, dt$$

$$\rightarrow i_L = \int \frac{V_L}{L}\sin\omega t\, dt$$

$$\rightarrow i_L = -\frac{V_L}{\omega L}\cos\omega t + (cte = 0)$$

$$\rightarrow i_L = -\frac{V_L}{\omega L}\cos\omega t$$

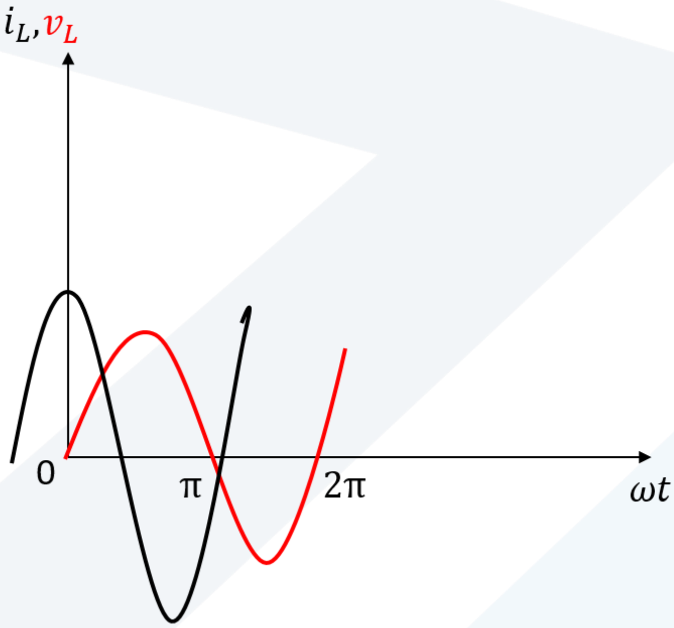
نعرف الردية التحريضية (الممانعة) $X_L = \omega L$ وبالتالي:

$$\rightarrow i_L = -\frac{V_L}{X_L}\cos\omega t$$

$$\rightarrow i_L = \frac{V_L}{X_L} sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$\rightarrow i_L = I_L\, sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

إذن فالتيار متأخر بالطور عن فرق الجهد المطبق بمقدار $\frac{\pi}{2}$.



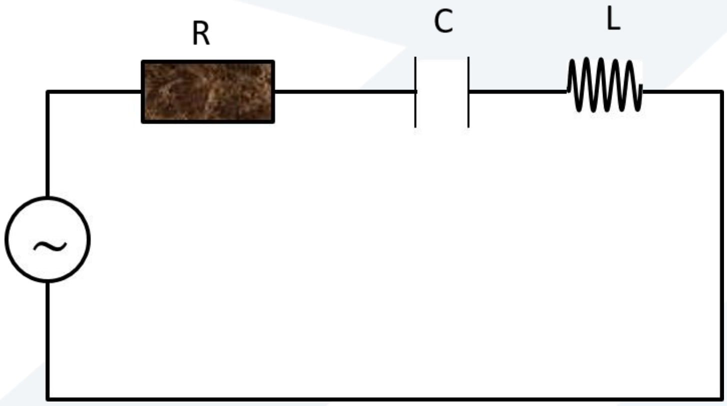
الشكل (18): الشكل يبين تأخر i_L بالطور بين v_L بمقدار $\frac{\pi}{2}$.

نلخص النتائج في الجدول رقم (4):

الجدول رقم 4 : العلاقة بين الجهد والتيار من أجل ثلاثة عناصر من الدارات الكهربائية.

عنصر الدارة	الرمز	الممانعة	طور التيار	الزاوية φ	علاقة السعة
مقاومة	R	R	على توافق مع v_R	0	$V_R = I_R . R$
مكثفة	C	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	يتقدم على v_C بمقدار $\frac{\pi}{2}$	-90°	$V_C = I_C . X_C$
ملف	L	$X_L = \omega L$	يتأخر عن v_L بمقدار $\frac{\pi}{2}$	$+90^\circ$	$V_L = I_L . X_L$

4-5- دارة (L, C, R) على التسلسل series circuit:



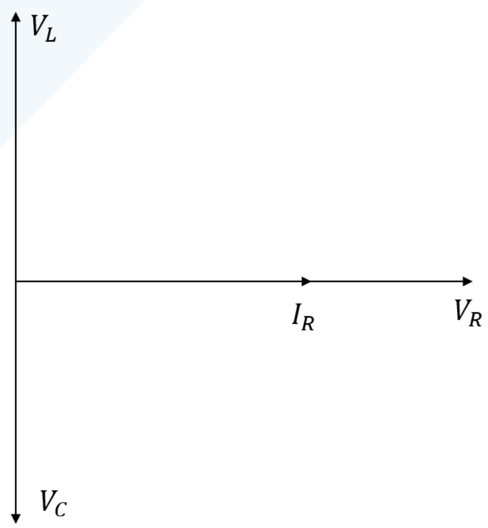
الشكل (19): دارة (L, C, R) على التسلسل. يرمز للتيار المتناوب ب ~.

في هذه الحالة يكون:

$$v = v_R + v_C + v_L \qquad (19)$$

ما هو التيار المار في هذه الدارة؟

من الجدول السابق رقم 4 نستطيع أن نرسم:



$$V_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 \tag{20}$$

$$\rightarrow V_m^2 = (I.R)^2 + [(I.X_L) - (I.X_C)]^2$$

حيث أن $I_R = I_L = I_C = I$.

$$\rightarrow V_m^2 = I^2[R^2 + (X_L - X_C)^2]$$

وبالتالي نستنتج العلاقة التالية:

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}} \tag{21}$$

وهو عبارة عن التيار المار في دارة التسلسل.

ممانعة دارة التسلسل تعطى بالعلاقة:

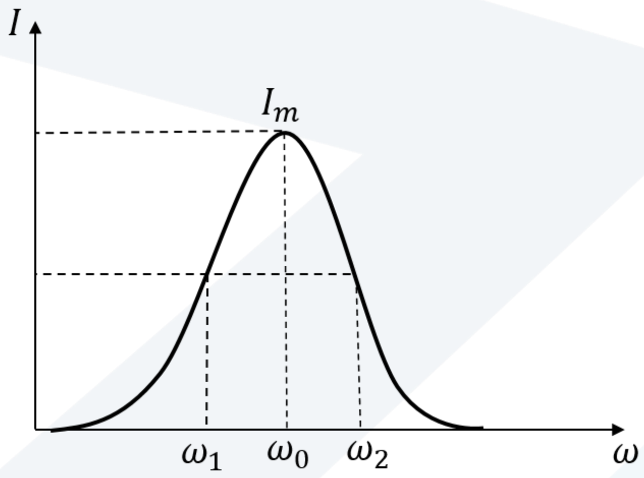
$$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{22}$$

$$\rightarrow I = \frac{V_m}{z}$$

او بالشكل التالي:

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}} \tag{23}$$

وهي دارة تجاوب (طنين).



الاستطاعة power في دارة التيار المتناوب

تعطى الاستطاعة اللحظية بالعلاقة:

$$P(t) = i(t).v(t)$$

$$\rightarrow P(t) = R.i^2(t)$$

$$\rightarrow P(t) = R(I_{max}\sin(\omega t - \varphi))^2$$

للحصول على الاستطاعة المتوسطة (الاستطاعة المستهلكة في الدارة)

إن متوسط $\sin^2(\omega t - \varphi)$ هو $\frac{1}{2}$ وبالتالي يكون:

$$P_{avg} = R.I_{max}^2.\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow P_{avg} = R.\left(\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}\right)^2 \qquad (24)$$

تسمى I_{eff} شدة التيار المنتجة

$$I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \qquad (25)$$

$$\rightarrow P_{avg} = R.(I_{eff})^2 \quad (26)$$

$$\rightarrow P_{avg} = R.I_{eff}.I_{eff}$$

$$\rightarrow P_{avg} = R.I_{eff}.\frac{V_{eff}}{z} \quad (27)$$

مسألة:

لدينا دارة LCR على التسلسل، إذا كانت فيها $R = 160\Omega$، $C = 15\mu F$، $L = 230mH$، $f = 50Hz$،
$\epsilon = 50V$.

أوجد كلاً من: 1-- الردية السعوية X_C

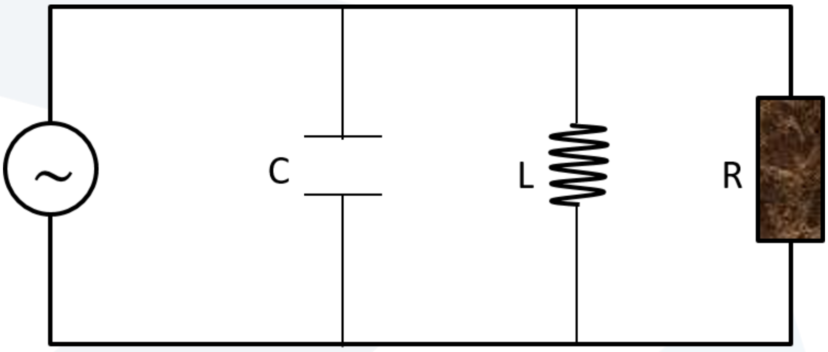
2—الردية التحريضية X_L

3—الممانعة z

4—سعة التيار المار في الدارة

5-5- دارة (L, C, R) على التفرع parallel circuit:

إذا أخذنا دارة كهربائية فيها مقاومة وملف ومكثفة، وبين طرفي هذه الدارة وضعنا مولد للتيار المتناوب فالتيار I يتفرع إلى
i_L و i_R و i_C



الشكل (20): دارة(L, C, R) على التفرع. يرمز للتيار المتناوب ب ~.

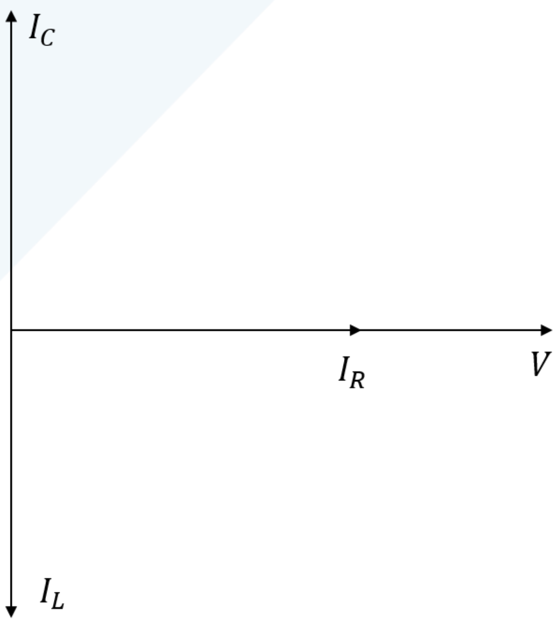
التيار الكلي حسب قوانين كيرشوف يتفرع إلى i_L و i_R و i_C وبالتالي:

$$i(t) = i_R + i_L + i_C$$

ولكن فرق الجهد هو نفسه

$$V = V_R = V_L = V_C$$

بشكل مماثل لدارة التسلسل يمكن رسم علاقة فرق الطور في حالة الوصل على التفرع بالشكل:



من الرسم نلاحظ:

$$I_m^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2$$

$$\rightarrow I_m^2 = \frac{V^2}{R^2} + (\frac{V}{X_L} - \frac{V}{X_C})^2$$

حيث أن $V = V_R = V_L = V_C$

$$\rightarrow I_m^2 = V^2 \left[\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C})^2\right]$$

$$\rightarrow \frac{I_m^2}{V^2} = \left[\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C})^2\right]$$

$$\rightarrow \frac{1}{z^2} = \left[\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C})^2\right]$$

$$\rightarrow \frac{1}{z} = \sqrt{\left[\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C})^2\right]} \qquad (28)$$

وهي مقلوب ممانعة دارة التفرع. ويمكن حساب التيار الكلي المار في دارة التفرع من هذه العلاقة، فنلاحظ أنه يكون طنين عندما:

$$\frac{1}{X_L} = \frac{1}{X_C} \quad \rightarrow \quad X_L = X_C$$

وبالتالي يكون

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{R} \quad \rightarrow \quad z = R$$

مسألة: في دارة LCR على التسلسل، إذا كان التيار المار فيها يعطى بالعلاقة:

$$i(t) = 3\cos(5000t - \frac{\pi}{3})\ A$$

أوجد الجهد عند كل عنصر من عناصر الدارة

أوجد الجهد الكلي