

Duality Theory

الدكتور المهندس
أيمن حسن يوسف

Duality Theory

- إن لكل linear program problem مشكلة ثنائية مرتبطة معه (برنامج خطي آخر مرتبط معه)
- بحيث نسمي المشكلة الأساسية 'Primal'
- والمشكلة الثنائية المرتبطة بها تسمى 'Dual'.
- تكون المشكلة الأولى بتابع هدف **Max** وتكون الثانية بتابع هدف **Min**.
- **متغيرات تابع الهدف** لأحد المشكلتين هي **right hand side** لقيود المشكلة الأخرى.
- معادلات القيود لل primal تكون **أصغر أو يساوي** أما معادلات قيود Dual **أكبر أو يساوي**.
- متغيرات معادلات القيود لل primal هي عبارة عن **مصفوفة A**
- متغيرات معادلات القيود لل Dual هي عبارة عن **منقول المصفوفة A**

Duality Theory

Primal LP :

$$\text{Max } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

subject to:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_j \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Associated Dual LP :

$$\text{Min. } z = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

subject to:

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2$$

:

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_j \geq 0, \dots, y_m \geq 0.$$

Duality Theory

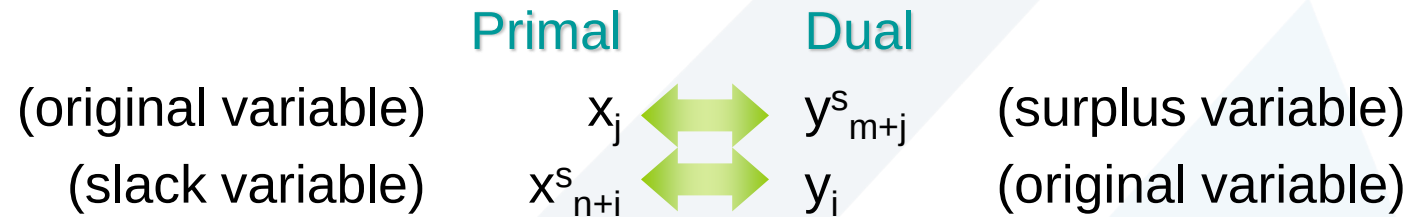
The following are the *only* possible relationships between the primal and dual problems:

1. If one problem has *feasible solutions* and a *bounded* objective function (and so has an optimal solution), then so does the other problem, so both the weak and the strong duality properties are applicable
2. If one variable has *feasible solutions* but an *unbounded* objective function (no optimal solutions), then the other problem has *no feasible solutions*
3. If one variable has *no feasible solutions*, then the other problem either has *no feasible solutions* or an *unbounded* objective function

Duality Theory

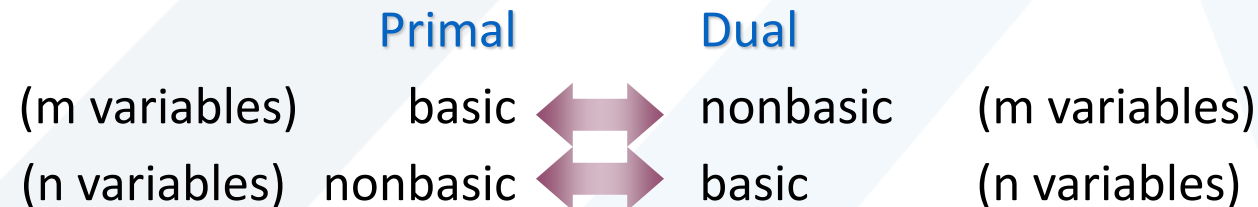
➤ عادة نحل primal بطريقة simplex ثم نستنتج جدول simplex النهائي لل Dual

➤ Associated variables between primal and dual حيث :



➤ Complementary slackness property:

When one variable in primal is basic,
its associated variable in dual is nonbasic



Example 1

Standard Algebraic Form

The Primal has:

2 variables and 3 constraints.

So the Dual has:

3 variables and 2 constraints

Primal

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{array}{lll} \text{s. to} & x_1 & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Min } W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

$$\begin{array}{lll} \text{s. to} & y_1 & + 3y_3 \geq 3 \\ & 2y_2 + 2y_3 & \geq 5 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Example 2

Standard Algebraic Form

Primal in standard form

Primal

$$\text{Max. } Z = 12x_1 + 4x_2$$

Subject to constraints:

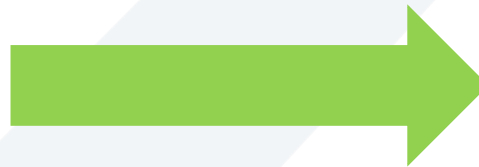
$$4x_1 + 7x_2 \leq 56$$

$$2x_1 + 5x_2 \geq 20$$

$$5x_1 + 4x_2 = 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

المترابحة من الشكل
 $\geq$ نضربها ب -1 حتى
نحولها إلى $\leq$



المساواة = تتحول إلى
مترابحتين واحدة $\geq$ نضربها
ب -1 لتحويلها والأخرى $\leq$

$$\text{Max. } Z = 12x_1 + 4x_2$$

Subject to constraints:

$$4x_1 + 7x_2 \leq 56$$

$$-2x_1 - 5x_2 \leq -20$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 40$$

$$-5x_1 - 4x_2 \leq -40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Example 2

Standard Algebraic Form

Dual

$$\text{Min. } Z' = 56y_1 - 20y_2 + 40y_3 - 40y_4$$

Subject to constraints:

$$4y_1 - 2y_2 + 5y_3 - 5y_4 \geq 12$$

$$7y_1 - 5y_2 + 4y_3 - 4y_4 \geq 4$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Example 3

Standard Algebraic Form

Primal

$$\text{Min.. } Z = 10x_1 + 15x_2$$

Subject to constraints:

$$5x_1 + 7x_2 \geq 80$$

$$6x_1 + 11x_2 \geq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Dual

$$\text{Max.. } Z' = 80y_1 + 100y_2$$

Subject to constraints:

$$5y_1 + 6y_2 \leq 10$$

$$7y_1 + 11y_2 \leq 15$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Example 4

Standard Algebraic Form

Primal

$$\text{Min.. } Z = 2x_2 + 5x_3$$

Subject to constraints:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

تحويل Min إلى
Max وبالعكس يكون
بضرب المعادلة ب-1



Primal in standard form :

$$\text{Max.. } Z = -2x_2 - 5x_3$$

Subject to constraints:

$$-x_1 - x_2 \leq -2$$

$$2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 - 3x_3 \leq -4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Example 4

Standard Algebraic Form

Dual

$$\text{Min. } Z' = -2y_1 + 6y_2 + 4y_3 - 4y_4$$

Subject to constraints:

$$-y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 \geq 0$$

$$-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \geq -2$$

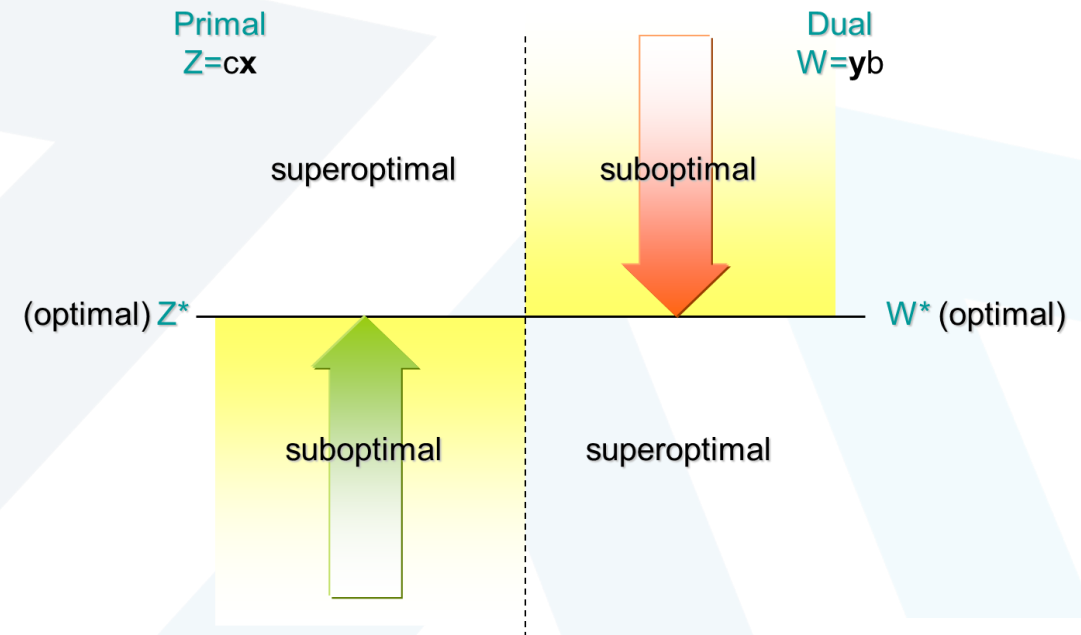
$$6y_2 + 3y_3 - 3y_4 \geq -5$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Relationships between Primal and Dual

➤ Weak duality property
If $\mathbf{x}$ is a *feasible* solution to the primal,
and
 $\mathbf{y}$ is a *feasible* solution to the dual,
then
 $\mathbf{c}\mathbf{x} \leq \mathbf{y}\mathbf{b}$

➤ Strong duality property
If $\mathbf{x}^*$ is an *optimal* solution to the
primal, and
 $\mathbf{y}^*$ is an *optimal* solution to the dual,
then
 $\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}$



Example of duality

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s. to } x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نحل هذه المسائل بطريقة Simplex :



Basic variable	Z	X1	X2	S1	S2	S3	Solution (right hand side)	Ratio
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	
S1	0	1	0	1	0	0	4	∞
S2	0	0	2	0	1	0	12	6
S3	0	3	2	0	0	1	18	9



Example of duality



Basic variable	Z	X1	X2	S1	S2	S3	Solution (right hand side)	ratio
z	1	-3	0	0	5/2	0	30	
S1	0	1	0	1	0	0	4	4
X2	0	0	1	0	1/2	0	6	∞
S3	0	3	0	0	-1	1	6	2



Example of duality

جدول حل ال primal problem

Basic variable	Z	X1	X2	S1	S2	S3	Solution (right hand side)	ratio
Z	1	0	0	0	3/2	1	36	
S1	0	0	0	1	1/3	-1/3	2	
X2	0	0	1	0	1/2	0	6	
X1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2	

Optimal solution

حل primal يكون كالتالي : $(X1, X2, S1, S2, S3) = (2, 6, 2, 0, 0)$

حل Dual يكون كالتالي : $(y1, y2, y3, S1, S2) = (0, 3/2, 1, 0, 0)$

وناتج تابع الهدف لكلا البرنامجين هو 36

فالحل مرئي لكلا البرنامجين ومتساوي فهو الحل الأمثل لهما

$$\text{Min } W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

$$\text{s. to } \begin{aligned} y_1 + 3y_3 &\geq 3 \\ 2y_2 + 2y_3 &\geq 5 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

وجداول simplex لل Dual المرتبطة بالمثال : يكون بالشكل :

	Z	Y1	Y2	Y3	S1	S2	R1	R2	solution	ratio
Z	1	-4	-12	-18	0	0	-M	-M	0	
R1	0	1	0	3	-1	0	1	0	3	
R2	0	0	2	2	0	-1	0	1	5	

Example of duality



	Z	y1	y2	y3	S1	S2	R1	R2	solution	ratio
Z	1	$-4+M$	$-12+2M$	$-18+5M$	$-M$	$-M$	0	0	8M	
R1	0	1	0	3	-1	0	1	0	3	1
R2	0	0	2	2	0	-1	0	1	5	2.5



Example of duality

	Z	y1	y2	y3	S1	S2	R1	R2	solution	ratio
Z	1	$2 - 2/3M$	$-12 + 2M$	0	$-6 + 2/3M$	$-M$	$6 - 5/3M$	0	$18 + 3M$	
y3	0	$1/3$	0	1	$-1/3$	0	$1/3$	0	1	∞
R2	0	$-2/3$	2	0	$-2/3$	-1	$-2/3$	1	3	$3/2$



Example of duality

	z	y1	y2	y3	S1	S2	R1	R2	solution	ratio
z	1	-2	0	0	$-10+4/3M$	-6	2-M	6-M	36	
y3	0	1/3	0	1	-1/3	0	1/3	0	1	
y2	0	-1/3	1	0	-1/3	-1/2	-1/3	1/2	3/2	

Duality & sensitivity analysis

ماذا يعني تحليل الحساسية ؟

أي مراقبة مدى تأثير تغيير بارامترات البرنامج الخطي على أمثلية أو رؤية الحل .
البارامترات التي نجري عليها التغييرات هي : أمثال تابع الهدف c وأمثال معادلات القيود a_{ij} و right hand side لمعادلات القيود b .

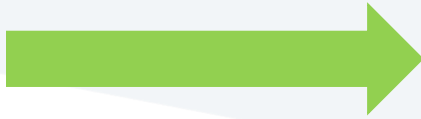
Duality & sensitivity analysis

نقوم بتغيير البارامترات على المثال التالي :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s. to

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2$$

S. to

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

	Z	X1	X2	S1	S2	S3	solution	ratio
Z	1	-4	-5	0	0	0	0	
S1	0	1	0	1	0	0	4	∞
S2	0	0	2	0	1	0	12	6
S3	0	2	2	0	0	1	18	9



Duality & sensitivity analysis



	Z	X1	X2	S1	S2	S3	solution	ratio
Z	1	-4	0	0	5/2	0	30	
S1	0	1	0	1	0	0	4	4
X2	0	0	1	0	1/2	0	6	∞
S3	0	2	0	0	-1	1	6	3



Duality & sensitivity analysis

	Z	X1	X2	S1	S2	S3	solution	ratio
Z	1	0	0	0	1/2	2	42	
S1	0	0	0	1	1/2	-1/2	1	
X2	0	0	1	0	1/2	0	6	
X1	0	1	0	0	-1/2	1/2	3	

$$C_B B^{-1}$$

$$B^{-1}$$

ما زال الحل مرئياً وأمثلياً

Duality & sensitivity analysis



تغيير ال right hand side لمعادلات القيود b يمكن حله بأسلوب بسيط وفق ما يلي :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{S. to} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{S. to} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 24 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

لا يتغير الجدول بالكامل وإنما يتغير العمود الأخير فيه فقط ويكون كالتالي :

Duality & sensitivity analysis

	Z	X1	X2	S1	S2	S3	solution
Z	1	0	0	0	1/2	2	48
S1	0	0	0	1	1/2	-1/2	7
X2	0	0	1	0	1/2	0	12
X1	0	1	0	0	-1/2	1/2	-3

$$C_B B^{-1} b = [0 \quad 1/2 \quad 2] \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} b = 48$$

$$B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} b = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix}$$

الحل لم يبقى مرئياً أو أمثلياً وحتى يكون كذلك يجب تحقيق العلاقة التالية :

Duality & sensitivity analysis

