تقنيات التكامل

1. التكامل بالتعويض:

نعلم أن قاعدة السلسلة تعطى بالشكل: $\frac{d}{dx}\left[F\big(g(x)\big)\right] = F'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$، ومن تعريف التابع الأصلي يكون لدينا:

$$\int F'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = F\big(g(x)\big) + c$$

هذا يقودنا إلى التعرف إلى التكامل بالتعويض:

$$\int \overset{\text{Outside function}}{f}(\underset{\text{Inside function}}{g(x)})\underbrace{g'(x)}_{\text{Derivative of inside function}}\,dx = F(g(x)) + C$$

مثال: أوجد قيمة التكامل $\int (x^2+1)^2(2x)\;dx$

الحل: ليكن $g(x) = x^2+1$ ، وبالتالي $g'(x) = 2x$، و $F\big(g(x)\big) = (x^2+1)^2$

$$\int \overbrace{(x^2+1)^2}^{f(g(x))}\overbrace{(2x)}^{g'(x)}\,dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^3 + C.$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل $\int 5\cos 5x\;\,dx$

الحل:

ليكن $g(x) = 5x$ ، وبالتالي $g'(x) = 5$، و $F\big(g(x)\big) = \cos 5x$

$$\int \underbrace{(\cos 5x)}_{f(g(x))}\underbrace{(5)}_{g'(x)}\, dx = \sin 5x + C.$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل $\int x(x^2+1)^2\, dx$

الحل: ليكن $g(x) = x^2 + 1$

$$\int x(x^2+1)^2\, dx = \int (x^2+1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)(2x)\, dx \qquad \text{Multiply and divide by 2.}$$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{(x^2+1)^2}_{f(g(x))}\underbrace{(2x)}_{g'(x)}\, dx \qquad \text{Constant Multiple Rule}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^3}{3}\right] + C \qquad \text{Integrate.}$$

$$= \frac{1}{6}(x^2+1)^3 + C \qquad \text{Simplify.}$$

2. التكامل بتغيير المتحول:

سنقوم إعادة صياغة التكامل باختيار جيد لمتغير جديد $u = g(x)$ ونوجد $du = g'(x)dx$

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C.$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل $\int \sqrt{2x-1}\, dx$

الحل:

بداية نختر $u = 2x - 1$ ومنه $du = 2\,dx$ ويكون $dx = \frac{du}{2}$

$$\int \sqrt{2x-1}\,dx = \int \sqrt{u}\left(\frac{du}{2}\right)$$ Integral in terms of u

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$$ Constant Multiple Rule

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C$$ Antiderivative in terms of u

$$= \frac{1}{3}u^{3/2} + C$$ Simplify.

$$= \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C.$$ Antiderivative in terms of x

مثال:

أوجد قيمة التكامل $\int x\sqrt{2x-1}\,dx$

الحل:

بداية نختر $u = 2x - 1$ ومنه $du = 2\,dx$ ويكون $dx = \frac{du}{2}$. $x = \frac{u+1}{2}$

$$\int x\sqrt{2x-1}\,dx = \int \left(\frac{u+1}{2}\right) u^{\frac{1}{2}}\ \frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int u^{\frac{3}{2}} + \ u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + c$$

$$\frac{1}{10}\ (2x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}\ \ (2x-1)^{\frac{3}{2}}\ + c$$

مثال: أوجد قيمة التكامل $\int \sin^2 3x \cos 3x\ \ dx$

الحل:

بداية نختر $u = \sin 3x$ ومنه $du = \cos 3x\ \ 3\,dx$

$$\int \sin^2 3x \cos 3x\ \ dx = \int u^2 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\left[\frac{u^3}{3} + c\right] = \frac{1}{9}\sin^3 3x + c$$

مثال : حل ما يلي:

a. $\int 3(3x-1)^4\,dx = \int \overbrace{(3x-1)^4}^{u^4}\overbrace{(3)\,dx}^{du} = \overbrace{\frac{(3x-1)^5}{5}}^{u^5/5} + C$

b. $\int (2x+1)(x^2+x)\,dx = \int \overbrace{(x^2+x)^1}^{u^1}\overbrace{(2x+1)\,dx}^{du} = \overbrace{\frac{(x^2+x)^2}{2}}^{u^2/2} + C$

c. $\int 3x^2\sqrt{x^3-2}\,dx = \int \overbrace{(x^3-2)^{1/2}}^{u^{1/2}}\overbrace{(3x^2)\,dx}^{du} = \overbrace{\frac{(x^3-2)^{3/2}}{3/2}}^{u^{3/2}/(3/2)} + C = \frac{2}{3}(x^3-2)^{3/2} + C$

d. $\int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2}\,dx = \int \overbrace{(1-2x^2)^{-2}}^{u^{-2}}\overbrace{(-4x)\,dx}^{du} = \overbrace{\frac{(1-2x^2)^{-1}}{-1}}^{u^{-1}/(-1)} + C = -\frac{1}{1-2x^2} + C$

e. $\int \cos^2 x \sin x\,dx = -\int \overbrace{(\cos x)^2}^{u^2}\overbrace{(-\sin x)\,dx}^{du} = -\overbrace{\frac{(\cos x)^3}{3}}^{u^3/3} + C$

طريقة تغيير المتحول في التكامل المحدود

نستخدم نفس النهج، فيما يتعلق بحدود التكامل بإمكاننا أن نعيد المتحول الجديد إلى المتحول الأصلي ونحافظ على حدود التكامل أو نقوم بتغيير حدود التكامل على أساس المتغير الجديد.

مثال :

أوجد قيمة التكامل $\int_0^1 (x^2+1)^3(2x)\,dx$

الحل:

ليكن $u = x^2 + 1$ ، وبالتالي $du = 2xdx$.

لحساب حدود التكامل بناء على المتحول الجديد:

الحد الأدنى $x = 0 \Longrightarrow u = 1$

الحد الأعلى $x = 1 \Longrightarrow u = 2$

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^3(2x)\,dx$$

Integration limits for x

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\,du$$

Integration limits for u

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{15}{8}.$$

بإمكاننا الحصول على نفس النتيجة بالعودة إلى المتحول الأصلي:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{15}{8}$$

مثال :

أوجد قيمة التكامل $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

الحل:

ليكن $u = \sqrt{2x-1}$ ، وبالتالي $u^2 = 2x-1$ ويكون $udu = dx$

لحساب حدود التكامل بناء على المتحول الجديد:

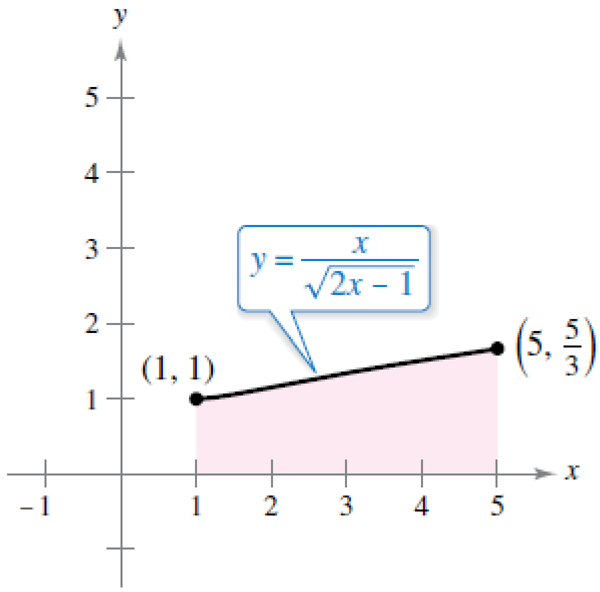
الحد الأدنى $x = 1 \Longrightarrow u = 1$

الحد الأعلى $x = 5 \Longrightarrow u = 3$

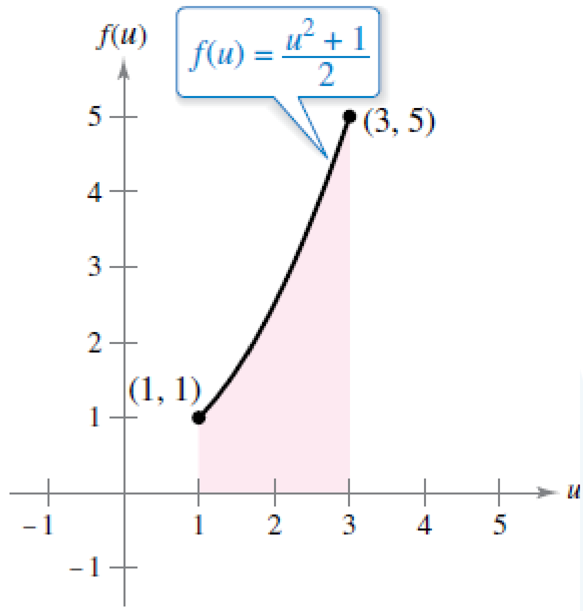
$$\begin{aligned}
\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx &= \int_1^3 \frac{1}{u}\left(\frac{u^2+1}{2}\right)u\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_1^3 (u^2+1)\,du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}+u\right]_1^3 \\
&= \frac{1}{2}\left(9+3-\frac{1}{3}-1\right) \\
&= \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

هندسياً يمكن أن نفسر أن المساحة الواقعة تحت منحني التابعين التاليين $g(u) = \frac{u^2+1}{2}$ و

$f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x-1}}$



The region before substitution has an area of $\frac{16}{3}$.



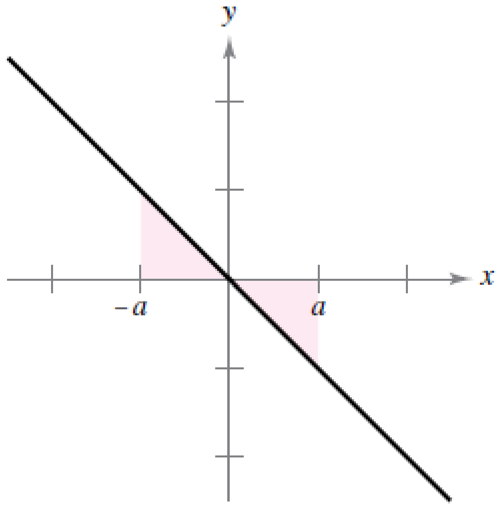
The region after substitution has an area of $\frac{16}{3}$.

تكامل التوابع الزوجية والفردية:

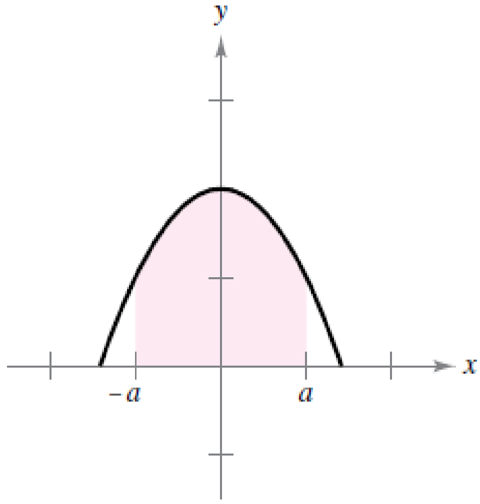
ليكن التابع f قابل للمكاملة على المجال $[-a, a]$

1. إذا كان التابع زوجي عندئذ: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

2. إذا كان التابع فردي عندئذ: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



Odd function



Even function

مثال :

أوجد قيمة التكامل $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (sin^3 x\, cos\, x + sin\, x\, cos\, x)\, dx$

الحل:

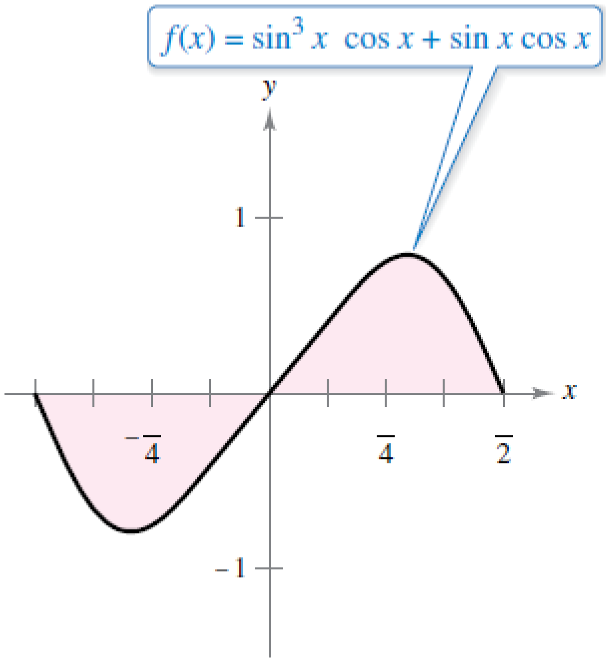
لدينا $f(x) = (sin^3 x\, cos\, x + sin\, x\, cos\, x)$ ومنه:

$$f(-x) = (sin^3 -x\, cos -x + sin -x\, cos -x) =$$

$$-(sin^3 x\, cos\, x + sin\, x\, cos\, x) = -f(x)$$

التابع فردي على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ومنه قيمة التكامل:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (sin^3 x\, cos\, x + sin\, x\, cos\, x)\, dx = 0$$



Because f is an odd function,
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx = 0.$$

تذكرة:

1. $\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$	**7.** $\int a^u\,du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C$	**13.** $\int \csc u\,du = -\ln\lvert\csc u + \cot u\rvert + C$
2. $\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$	**8.** $\int \sin u\,du = -\cos u + C$	**14.** $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
3. $\int du = u + C$	**9.** $\int \cos u\,du = \sin u + C$	**15.** $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
4. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	**10.** $\int \tan u\,du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	**16.** $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	**11.** $\int \cot u\,du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$	**17.** $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
6. $\int e^u\,du = e^u + C$	**12.** $\int \sec u\,du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$	**18.** $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$
		19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$
		20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{\lvert u\rvert}{a} + C$

مثال:

حل التكاملات التالية:

$$a.\int \frac{4}{x^2+9}dx,\quad b.\int \frac{4x}{x^2+9}dx,\quad c.\int \frac{4x^2}{x^2+9}dx$$

Use the Arctangent Rule and let $u = x$ and $a = 3$.

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{x^2+9}dx &= 4\int \frac{1}{x^2+3^2}dx\\ &= 4\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right)+C\\ &= \frac{4}{3}\arctan\frac{x}{3}+C\end{aligned}$$

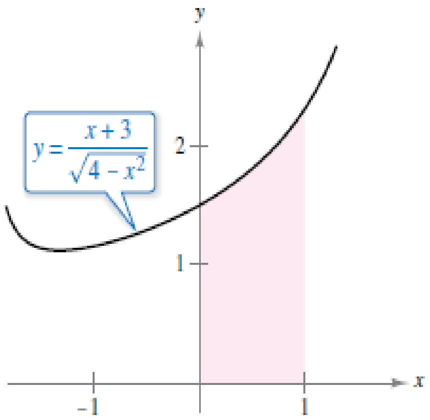
$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{x^2+9}dx &= 2\int \frac{2x\,dx}{x^2+9}\\ &= 2\int \frac{du}{u}\\ &= 2\ln|u|+C\\ &= 2\ln(x^2+9)+C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2}{x^2+9}dx &= \int\left(4+\frac{-36}{x^2+9}\right)dx\\ &= \int 4\,dx - 36\int\frac{1}{x^2+9}dx\\ &= 4x-36\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right)+C\\ &= 4x-12\arctan\frac{x}{3}+C\end{aligned}$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل: $\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx + \int_0^1\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}dx\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 (4-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx + 3\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx\\ &= \left[-(4-x^2)^{1/2}+3\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1\\ &= \left(-\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}\right)-(-2+0)\\ &\approx 1.839\end{aligned}$$



The area of the region is approximately 1.839.

مثال:

أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^6}}\, dx.$

لنعيد صياغة المقام بالشكل: $\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{4^2 - (x^3)^2}$

لنفرض أن: $u = x^3$. Then $du = 3x^2\, dx$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^6}}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\, dx}{\sqrt{4^2 - (x^3)^2}} \qquad \text{Rewrite integral.}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4^2 - u^2}} \qquad \text{Substitute: } u = x^3.$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin\frac{u}{4} + C \qquad \text{Arcsine Rule}$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin\frac{x^3}{4} + C. \qquad \text{Rewrite as a function of } x.$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{1 + e^x}\, dx.$

$$\int \frac{1}{1 + e^x}\, dx = \int \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x}\, dx \qquad \text{Add and subtract } e^x \text{ in numerator.}$$

$$= \int \left(\frac{1 + e^x}{1 + e^x} - \frac{e^x}{1 + e^x}\right) dx \qquad \text{Rewrite as two fractions.}$$

$$= \int dx - \int \frac{e^x\, dx}{1 + e^x} \qquad \text{Rewrite as two integrals.}$$

$$= x - \ln(1 + e^x) + C \qquad \text{Integrate.}$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل: $\int (\cot x)[\ln(\sin x)]\, dx$.

سنقوم بتغيير المتحول: $u = \cot x$ or $u = \ln(\sin x)$

$$u = \ln(\sin x) \quad \text{and} \quad du = \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \cot x\, dx.$$

$$\int (\cot x)[\ln(\sin x)]\, dx = \int u\, du \qquad \text{Substitute: } u = \ln(\sin x).$$

$$= \frac{u^2}{2} + C \qquad \text{Integrate.}$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(\sin x)]^2 + C. \qquad \text{Rewrite as a function of } x.$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل: $\int \tan^2 2x\, dx$.

نعلم أن : $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$ ، و لنفرض $u = 2x$ و $du = 2\, dx$

$$\int \tan^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \tan^2 u\, du \qquad \text{Substitute: } u = 2x.$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sec^2 u - 1)\, du \qquad \text{Trigonometric identity}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\, du - \frac{1}{2}\int du \qquad \text{Rewrite as two integrals.}$$

$$= \frac{1}{2}\tan u - \frac{u}{2} + C \qquad \text{Integrate.}$$

$$= \frac{1}{2}\tan 2x - x + C. \qquad \text{Rewrite as a function of } x.$$

بعض الطرق للرجوع إلى قواعد التكامل الأساسية:

الطريقة	مثال
تحليل البسط	$(1+e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$
توزيع البسط على المقام	$\dfrac{1+x}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{x}{x^2+1}$
الإتمام إلى مربع كامل	$\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$
تقسيم البسط على المقام	$\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$
إضافة وطرح ثابت إلى البسط	$\dfrac{2x}{x^2+2x+1} = \dfrac{2x+2-2}{x^2+2x+1} = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$
استخدام المطابقات المثلثية	$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$
لضرب والتقسم على المرافق	$\dfrac{1}{1+\sin x} = \left(\dfrac{1}{1+\sin x}\right)\left(\dfrac{1-\sin x}{1-\sin x}\right) = \dfrac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

التكامل بالتجزئة:

طريقة التكامل بالتجزئة هامة جداء وتطبق على نطاق واسع على التكاملات من الشكل:

$$\int x \ln x \, dx, \quad \int x^2 e^x \, dx, \quad \text{and} \quad \int e^x \sin x \, dx.$$

التكامل بالتجزئة ينطلق من قاعدة اشتقاق الجداء:

$$\frac{d}{dx}[uv] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad = uv' + vu'$$

التابعان u, v قابلان للاشتقاق كما أن u', v' مستمرين وعليه نقوم بمكاملة الطرفين لنحصل على:

$$uv = \int uv'\,dx + \int vu'\,dx \quad = \int u\,dv + \int v\,du.$$

مبرهنة:

التابعان u, v قابلان للاشتقاق كما أن u', v' مستمرين، عندئذ:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل: $\int e^x\,dx$

الحل:

$$\int \underbrace{(x)}_{u}\underbrace{(e^x\,dx)}_{dv}, \quad \int \underbrace{(e^x)}_{u}\underbrace{(x\,dx)}_{dv}, \quad \int \underbrace{(1)}_{u}\underbrace{(xe^x\,dx)}_{dv}, \quad \int \underbrace{(xe^x)}_{u}\underbrace{(dx)}_{dv}$$

$$dv = e^x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$$

$$= xe^x - e^x + C.$$

مثال: أوجد قيمة التكامل:

$$\int x^2 \ln x$$

$$dv = x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx$$

لنكامل بالتجزئة:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

التكامل بالتجزئة في حالة مكاملة حد واحد:

مثال:

أوجد قيمة التكامل: $\int \arcsin x\,dx.$

الحل: $dv = dx.$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x$$

$$u = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \arcsin x\,dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل: $\int x^2 \sin x \, dx.$

$$dv = \sin x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x \, dx$$

نكامل بالتجزئة: $\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx.$

الآن سنطبق التكامل بالتجزئة على: $\int 2x \cos x \, dx.$

$$dv = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$u = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2 \, dx$$

$$\int 2x \cos x \, dx = 2x \sin x - \int 2 \sin x \, dx$$

$$= 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

بدمج التكاملين:

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

ملاحظة:

في حال قمنا بالمكاملة أكثر من مرة علينا المحافظة على اختيار u و dv لاحظ إذا قمنا بالتبديل سنعقد التكامل:

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$$

$$= -x^2 \cos x + x^2 \cos x + \int x^2 \sin x \, dx$$

$$= \int x^2 \sin x \, dx$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل: $\int \sec^3 x\, dx.$

$$dv = \sec^2 x\, dx \Rightarrow v = \int \sec^2 x\, dx = \tan x$$

$$u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x\, dx$$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int (\sec x)(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$$

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C$$

3. التكاملات المثلثية:

بداية سنتعلم كيفية حساب تكاملات من الشكل:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx \quad \text{and} \quad \int \sec^m x \tan^n x\, dx$$

سنستخدم العلاقات المثلثة التالية:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

تقنيات التكامل في حال وجود قوى و sin و cos:

عندما يكون sin ذو قوة فردية موجبة، عندئذ نسحب معامل واحد sin ونحول الباقي ل cos:

$$\int \overbrace{\sin^{2k+1}}^{\text{Odd}} x \cos^n x\, dx = \int \overbrace{(\sin^2 x)^k}^{\text{Convert to cosines}} \cos^n x \overbrace{\sin x\, dx}^{\text{Save for } du} = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x\, dx$$

عندما يكون cos ذو قوة فردية موجبة، عندئذ نسحب معامل واحد cos ونحول الباقي ل sin:

$$\int \sin^m x \overbrace{\cos^{2k+1}}^{\text{Odd}} x\, dx = \int (\sin^m x)\overbrace{(\cos^2 x)^k}^{\text{Convert to sines}} \overbrace{\cos x\, dx}^{\text{Save for } du} = \int (\sin^m x)(1 - \sin^2 x)^k \cos x\, dx$$

عندما يكون ل cos و sin قوى زوجية موجبة، عندئذ نستخدم القواعد:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{and} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل: $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx.$

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx &= \int (\sin^2 x \cos^4 x)(\sin x)\, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \sin x\, dx \\
&= \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \sin x\, dx \\
&= \int \cos^4 x \sin x\, dx - \int \cos^6 x \sin x\, dx \\
&= -\int (\cos^4 x)(-\sin x)\, dx + \int (\cos^6 x)(-\sin x)\, dx \\
&= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C
\end{aligned}$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل:
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\, dx.$$

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\, dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x \cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(1 - \sin^2 x)(\cos x)}{\sqrt{\sin x}}\, dx \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} [(\sin x)^{-1/2} - (\sin x)^{3/2}] \cos x\, dx \\
&= \left[\frac{(\sin x)^{1/2}}{1/2} - \frac{(\sin x)^{5/2}}{5/2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} - \frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{5/2} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{32}}{80} \\
&\approx 0.239
\end{aligned}$$

مثال:

احسب: $$\int \cos^4 x\, dx.$$

حسب القاعدة السابقة:

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}\right) dx \\
&= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)\right] dx \\
&= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{32}\int 4\cos 4x\, dx \\
&= \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C
\end{aligned}$$

حساب التكاملات التي تحوي قوى secant و tangent:

تكاملات من الشكل:

$$\int \sec^m x \tan^n x \, dx.$$

تقنيات المكاملة في حال وجود قوى ل secant و tangent:

1. عندما تكون قوة secant زوجية موجبة ، نأخذ معامل $\sec^2$ ونقوم بما يلي:

$$\int \sec^{\overbrace{2k}^{\text{Even}}} x \tan^n x \, dx = \int \overbrace{(\sec^2 x)^{k-1}}^{\text{Convert to tangents}} \tan^n x \overbrace{\sec^2 x \, dx}^{\text{Save for } du} = \int (1 + \tan^2 x)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x \, dx$$

2. عندما تكون قوة tangent فردية موجبة ، نأخذ معامل $\sec \ \tan$ ونقوم بما يلي:

$$\int \sec^m x \tan^{\overbrace{2k+1}^{\text{Odd}}} x \, dx = \int (\sec^{m-1} x)\overbrace{(\tan^2 x)^k}^{\text{Convert to secants}} \overbrace{\sec x \tan x \, dx}^{\text{Save for } du} = \int (\sec^{m-1} x)(\sec^2 x - 1)^k \sec x \tan x \, dx$$

3. في حال عدم وجود secant

$$\int \tan^n x \, dx = \int (\tan^{n-2} x)\overbrace{(\tan^2 x)}^{\text{Convert to secants}} \, dx = \int (\tan^{n-2} x)(\sec^2 x - 1) \, dx$$

أوجد قيمة التكامل: $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}}\,dx.$

$$\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}}\,dx = \int (\sec x)^{-1/2} \tan^3 x\,dx \qquad \text{Rewrite.}$$

$$= \int (\sec x)^{-3/2}(\tan^2 x)(\sec x \tan x)\,dx \qquad \text{Rewrite.}$$

$$= \int (\sec x)^{-3/2}(\sec^2 x - 1)(\sec x \tan x)\,dx \qquad \text{Trigonometric identity}$$

$$= \int [(\sec x)^{1/2} - (\sec x)^{-3/2}](\sec x \tan x)\,dx \qquad \text{Multiply.}$$

$$= \frac{2}{3}(\sec x)^{3/2} + 2(\sec x)^{-1/2} + C \qquad \text{Integrate.}$$

أوجد قيمة التكامل: $\displaystyle\int \sec^4 3x \tan^3 3x\,dx.$

$$\int \sec^4 3x \tan^3 3x\,dx = \int (\sec^2 3x \tan^3 3x)(\sec^2 3x)\,dx \qquad \text{Rewrite.}$$

$$= \int (1 + \tan^2 3x)(\tan^3 3x)(\sec^2 3x)\,dx \qquad \text{Trigonometric identity}$$

$$= \frac{1}{3}\int (\tan^3 3x + \tan^5 3x)(3\sec^2 3x)\,dx \qquad \text{Multiply.}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\tan^4 3x}{4} + \frac{\tan^6 3x}{6}\right) + C \qquad \text{Integrate.}$$

$$= \frac{\tan^4 3x}{12} + \frac{\tan^6 3x}{18} + C.$$

احسب $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^4 x\, dx.$

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x\, dx &= \int (\tan^2 x)(\tan^2 x)\, dx \\
&= \int (\tan^2 x)(\sec^2 x - 1)\, dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx \\
&= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C
\end{aligned}$$

الآن لنعوض حدود التكامل:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \tan^4 x\, dx &= \left[\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} \\
&\approx 0.119
\end{aligned}$$

حالة وجود مضاريب توابع مثلثية:

نستخدم العلاقات التالية:

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x])$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin[(m-n)x] + \sin[(m+n)x])$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x])$$

احسب: $\int \sin 5x \cos 4x \, dx.$

الحل:

$$\int \sin 5x \cos 4x \, dx = \frac{1}{2}\int (\sin x + \sin 9x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\cos x - \frac{\cos 9x}{9}\right) + C$$
$$= -\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + C.$$

التكامل بالتعويض في حالة مكاملة التوابع المثلثية:

نستخدم هذه الطريقة في حال وجود جذور من الشكل:

$$\sqrt{a^2 - u^2} \qquad \sqrt{a^2 + u^2} \qquad \sqrt{u^2 - a^2}$$

سنستخدم القوانين المثلثية التالية للتخلص من الجذور:

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$
$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$
$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

عندما $a > 0$ نضع $u = a\sin\theta$ بحيث $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2.$

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}$$
$$= \sqrt{a^2(1 - \sin^2\theta)}$$
$$= \sqrt{a^2\cos^2\theta}$$
$$= a\cos\theta.$$

$\theta \ge 0$ بحيث $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

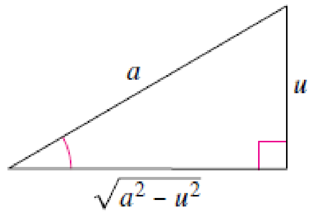
Trigonometric Substitution ($a > 0$)

1. For integrals involving $\sqrt{a^2 - u^2}$, let

   $u = a \sin \theta.$

   Then $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$, where

   $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2.$

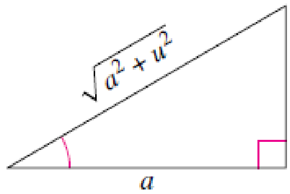


2. For integrals involving $\sqrt{a^2 + u^2}$, let

   $u = a \tan \theta.$

   Then $\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$, where

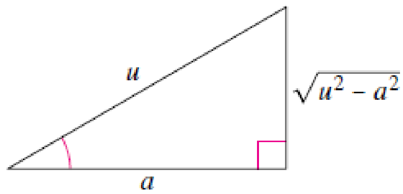
   $-\pi/2 < \theta < \pi/2.$



3. For integrals involving $\sqrt{u^2 - a^2}$, let

   $u = a \sec \theta.$

   Then



$$\sqrt{u^2 - a^2} = \begin{cases} a \tan \theta \text{ for } u > a, \text{ where } 0 \le \theta < \pi/2 \\ -a \tan \theta \text{ for } u < -a, \text{ where } \pi/2 < \theta \le \pi. \end{cases}$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

$$x = a \sin\theta = 3\sin\theta.$$

$$dx = 3\cos\theta\, d\theta, \quad \sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta, \quad \text{and} \quad x^2 = 9\sin^2\theta.$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{(9\sin^2\theta)(3\cos\theta)} \qquad \text{Substitute.}$$

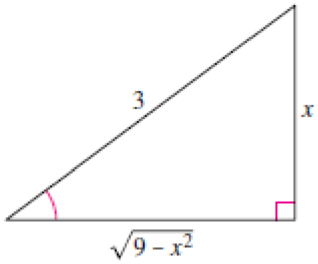
$$= \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta} \qquad \text{Simplify.}$$

$$= \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\, d\theta \qquad \text{Trigonometric identity}$$

$$= -\frac{1}{9}\cot\theta + C \qquad \text{Apply Cosecant Rule.}$$

$$= -\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right) + C \qquad \text{Substitute for } \cot\theta.$$

$$= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C.$$



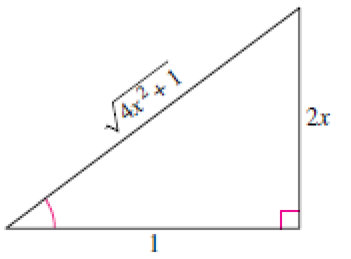
$$\sin\theta = \frac{x}{3}, \ \cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

مثال:

أوجد: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}.$

$u = 2x,\ a = 1, \text{ and } 2x = \tan\theta$

$dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta \quad \text{and} \quad \sqrt{4x^2+1} = \sec\theta.$



$\tan\theta = 2x,\ \sec\theta = \sqrt{4x^2+1}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec\theta} \qquad \text{Substitute.}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec\theta\,d\theta \qquad \text{Simplify.}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \qquad \text{Apply Secant Rule.}$$

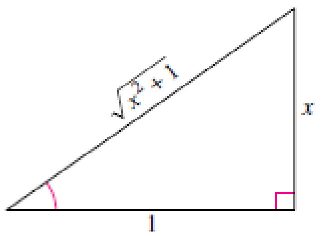
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1} + 2x\right| + C. \qquad \text{Back-substitute.}$$

$\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}.$

$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 = (x^2+1)^{3/2}$

$a = 1 \qquad u = x = \tan\theta,$

$dx = \sec^2\theta\,d\theta \qquad \sqrt{x^2+1} = \sec\theta$



$\tan\theta = x,\ \sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} \qquad \text{Rewrite denominator.}$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^3\theta} \qquad \text{Substitute.}$$

$$= \int \frac{d\theta}{\sec\theta} \qquad \text{Simplify.}$$

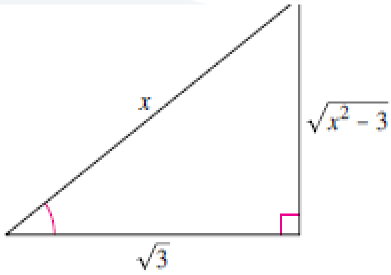
$$= \int \cos\theta\,d\theta \qquad \text{Trigonometric identity}$$

$$= \sin\theta + C \qquad \text{Apply Cosine Rule.}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C \qquad \text{Back-substitute.}$$

مثال:

أوجد $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx.$



$$u = x, \quad a = \sqrt{3}, \qquad x = \sqrt{3}\sec\theta$$

$$dx = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{x^2-3} = \sqrt{3}\tan\theta.$$

$$\sec\theta = \frac{x}{\sqrt{3}}, \ \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}}$$

الحد الأدنى

$$x = \sqrt{3}, \sec\theta = 1$$

$$\theta = 0.$$

الحد الأعلى

$$x = 2, \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}.$$

Integration limits for x — Integration limits for θ

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx = \int_0^{\pi/6} \frac{(\sqrt{3}\tan\theta)(\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta)}{\sqrt{3}\sec\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6} \sqrt{3}\tan^2\theta\,d\theta$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{\pi/6} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta$$

$$= \sqrt{3}\Big[\tan\theta - \theta\Big]_0^{\pi/6}$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

$$\approx 0.0931.$$

بعض الصيغ الهامة $(a > 0)$

1. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsin\frac{u}{a}\right) + C$

2. $\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 - a^2} - a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right|\right) + C, \quad u > a$

3. $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right|\right) + C$

4. تفريق الكسور:

إذا كان لدينا كسر من الشكل $\frac{N(x)}{D(x)}$، لنميز الحالات التالية:

1. إذا كانت درجة البسط أكبر أو يساوي المقام نقوم بالقسمة التقليدية فنحصل على:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{N_1(x)}{D(x)}$$

في الكسر الجديد $\frac{N_1(x)}{D(x)}$ درجة البسط أقل من درجة المقام وننتقل إلى إحدى الحالات التالية:

2. نحلل المقام إلى معاملات خطية وتربيعية بالشكل $(px + q)^m$ و $(ax^2 + bx + c)^n$ حيث $ax^2 + bx + c$ غير قابل للاختزال.

3. نقوم بتفريق الكسر في حال المعاملات الخطية $(px + q)^m$ إلى m كسر بحيث: $A_1, A_2, \dots, A_m$ ثوابت حقيقية.

$$\frac{A_1}{(px + q)} + \frac{A_2}{(px + q)^2} + \dots . + \frac{A_m}{(px + q)^m}$$

4. نقوم بتفريق الكسر في حال المعاملات الخطية $(ax^2 + bx + c)^n$ إلى n كسر بحيث: C_i, B_i ثوابت حقيقية.

$$\frac{B_1x + C_1}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots . + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

مثال:

أوجد: $\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx$

لدينا: $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

تفريق الكسور:

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}.$$

نوجد المقامات: $5x^2 + 20x + 6 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx.$

بوضع: $x = 0.$ $\quad 6 = A(1) + 0 + 0 \quad 6 = A.$

بوضع: $x = -1.$ $\quad 5 - 20 + 6 = 0 + 0 - C \quad 9 = C.$

بوضع: $x = 1,$ $\quad C = 9$ و $A = 6,$

$$5 + 20 + 6 = A(4) + B(2) + C \implies 31 = 6(4) + 2B + 9$$

$$-1 = B.$$

$$\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2}\,dx = \int \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x + 1} + \frac{9}{(x + 1)^2}\right) dx$$

$$= 6\ln|x| - \ln|x + 1| + 9\frac{(x + 1)^{-1}}{-1} + C$$

$$= \ln\left|\frac{x^6}{x + 1}\right| - \frac{9}{x + 1} + C.$$

مثال:

أوجد: $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)}\,dx.$

$$(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x - 1)(x^2 + 4)$$

تفريق الكسر: $\dfrac{2x^3 - 4x - 8}{x(x-1)(x^2+4)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + 4}.$

المقام المشترك: $x(x - 1)(x^2 + 4)$

$$2x^3 - 4x - 8 = A(x - 1)(x^2 + 4) + Bx(x^2 + 4) + (Cx + D)(x)(x - 1).$$

بوضع: $x = 0$ $\quad -8 = A(-1)(4) + 0 + 0 \quad 2 = A.$

بوضع: $x = 1$ $\quad -10 = 0 + B(5) + 0 \quad -2 = B.$

بوضع: $x = -1$ $\quad A = 2 \quad B = -2,$

$$-6 = (2)(-2)(5) + (-2)(-1)(5) + (-C + D)(-1)(-2)$$

بوضع: $x = 2,$ $\quad 2 = -C + D.$

$$0 = (2)(1)(8) + (-2)(2)(8) + (2C + D)(2)(1)$$
$$8 = 2C + D.$$

بالحل المشترك نجد: $C = 2. \quad D = 4,$

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x-1)(x^2+4)}\,dx = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2x}{x^2+4} + \frac{4}{x^2+4}\right)dx$$
$$= 2\ln|x| - 2\ln|x - 1| + \ln(x^2 + 4) + 2\arctan\frac{x}{2} + C.$$

مثال:

أوجد: $\displaystyle\int \frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}\,dx.$

نفرق الكسر: $\displaystyle\frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}.$

$$8x^3 + 13x = (Ax+B)(x^2+2) + Cx + D.$$

نوحد المقامات ، ننشر المعادلة ونجمع الحدود المتطابقة:

$$8x^3 + 13x = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D$$
$$8x^3 + 13x = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D).$$

$8 = A$ $\qquad$ $0 = 2B + D$

$$8x^3 + 0x^2 + 13x + 0 = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D)$$

$0 = B$

$13 = 2A + C$

$$13 = 2A + C \Rightarrow 13 = 2(8) + C \Rightarrow -3 = C$$
$$0 = 2B + D \Rightarrow 0 = 2(0) + D \Rightarrow 0 = D.$$

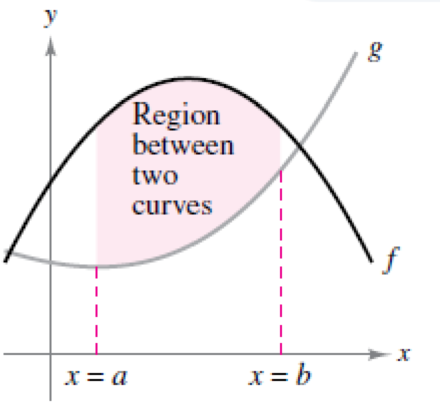
Finally, you can conclude that

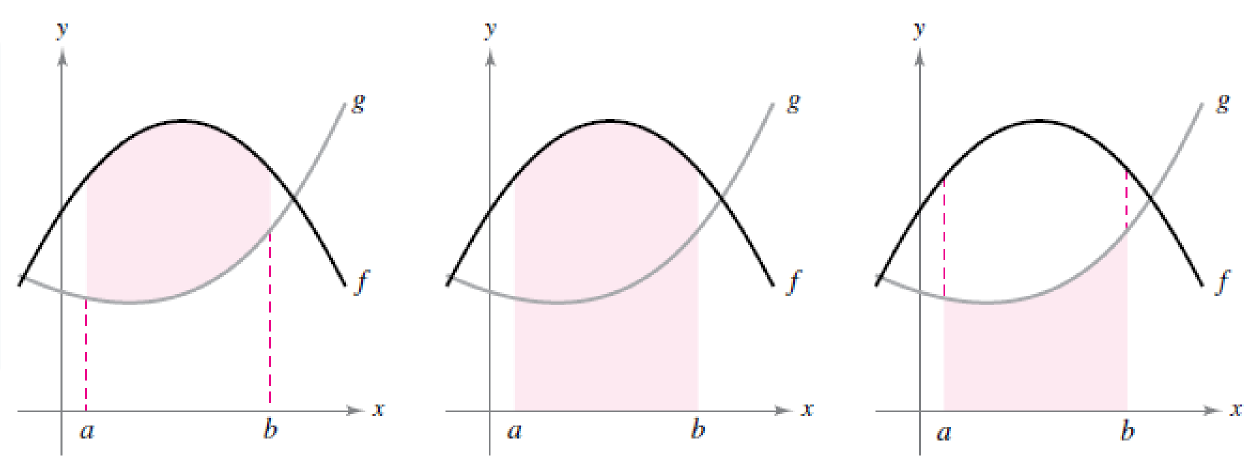
$$\int \frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}\,dx = \int \left(\frac{8x}{x^2+2} + \frac{-3x}{(x^2+2)^2}\right) dx$$
$$= 4\ln(x^2+2) + \frac{3}{2(x^2+2)} + C.$$

تطبيقات التكامل:

1.المساحة المحصورة بين منحني تابعين:

ليكن لدينا التابعين f, g المستمران على المجال $[a, b]$، وليكن كل من منحني التابعين يقع فوق المحور ox ، كذلك منحني التابع g يقع تحت منحني التابع f كما هو مبين في الشكل المجاور. هندسياً: المساحة المظللة تمثل المساحة الواقعة تحت منحنى التابع f مطروحاً منها المساحة الواقعة تحت g.





Area of region between f and g	=	Area of region under f	−	Area of region under g

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

المساحة المحصورة بين التابعين f, g المستمران على المجال $[a, b]$ وليكن أيضاً $f(x) \geq g(x)$ وذلك من أجل كل $x \in [a, b]$ وبالتالي المساحة المحصورة بين بياني التابعين f, g والمستقيمين

تعطى بالعلاقة: $x = a, x = b$

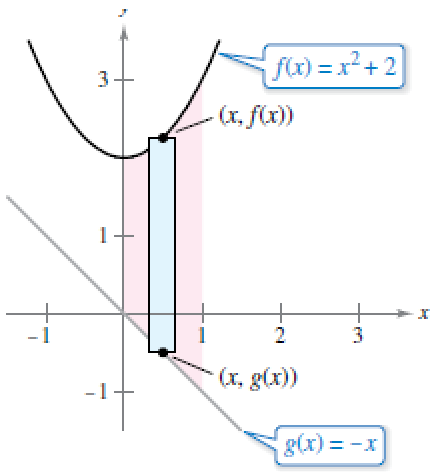
$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

ملاحظة: ليس من الضروري أن كون منحني التابعين واقعين فوق المحور ox.

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين منحني التابعين $y = x^2 + 2$ و $y = -x$ والمستقيمين ؛ $x = 0$ $x = 1$

لدينا $f(x) = x^2 + 2$ و $g(x) = -x$ لدينا $f(x) \geq g(x)$ على المجال $[0,1]$



Region bounded by the graph of f, the graph of g, $x = 0$, and $x = 1$

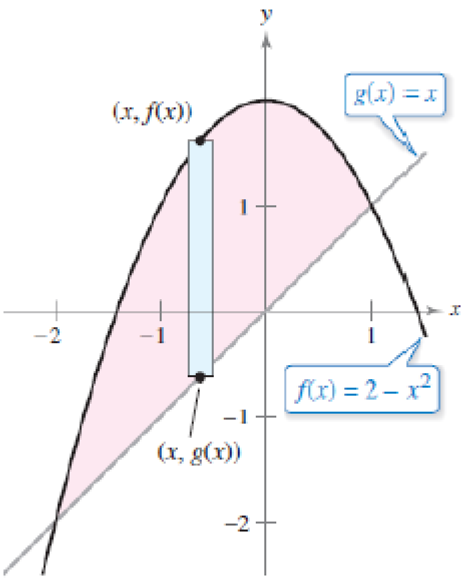
$$\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$$
$$= [(x^2 + 2) - (-x)]\Delta x$$

and the area of the region is

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$
$$= \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)]\, dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2$$
$$= \frac{17}{6}.$$

مثال : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين بياني التابعين $f(x)=2-x^2$ و $g(x)=x$

الحل:



علينا أولاً إيجاد نقاط التقاطع بين التابعين

$$\begin{aligned} 2-x^2 &= x \\ -x^2-x+2 &= 0 \\ -(x+2)(x-1) &= 0 \\ x &= -2 \text{ or } 1 \end{aligned}$$

إذن $a=-2$ و $b=1$.

بما أن $g(x)\le f(x)$ من أجل كل x ضمن المجال $[-2,1]$، مساحة المستطيل الممثل هي

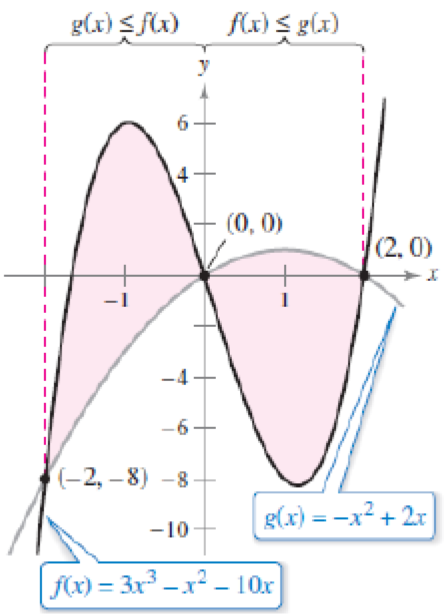
$$\begin{aligned} \Delta A &= [f(x)-g(x)]\Delta x \\ &= [(2-x^2)-(x)]\Delta x \end{aligned}$$

ومساحة المنطقة هي

$$A=\int_{-2}^{1}[(2-x^2)-(x)]dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

مثال : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $f(x)=3x^3-x^2-10x$ و $g(x)=-x^2+2x$

الحل:



علينا أولاً إيجاد نقاط التقاطع بين التابعين

$$\begin{aligned} 3x^3-x^2-10x &= -x^2+2x \\ 3x^3-12x &= 0 \\ 3x(x-2)(x+2) &= 0 \\ x &= -2, 0, 2 \end{aligned}$$

بالتالي يتقاطع المنحنيان عند $x=-2, 0, 2$. نلاحظ أن $g(x)\le f(x)$ على المجال $[-2, 0]$، بينما $f(x)\le g(x)$ على المجال $[0, 2]$. بالتالي نحتاج إلى حساب تكاملين الأول على المجال $[-2, 0]$ والآخر على المجال $[0, 2]$.

$$A = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx$$
$$= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)\,dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)\,dx$$
$$= \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= -(12 - 24) + (-12 + 24)$$
$$= 24$$

مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $x = 3 - y^2$ و $x = y + 1$

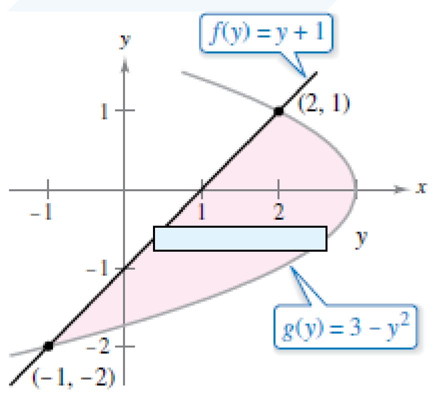
الحل:

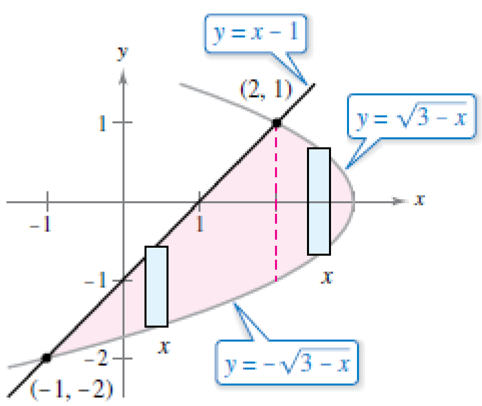
ليكن $g(y) = 3 - y^2$ و $f(y) = y + 1$. يتقاطع منحنيي التابعين عند عند $y = -2, 1$. وبما أن $f(y) \le g(y)$ على المجال $[-2, 1]$، مساحة المستطيل الممثل هي

$$\Delta A = [g(y) - f(y)]\Delta y = [(3 - y^2) - (y + 1)]\Delta y$$

ومساحة المنطقة هي

$$A = \int_{-2}^{1} [(3 - y^2) - (y + 1)]\,dy$$
$$= \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)\,dy$$
$$= \left[\frac{-y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-2}^{1}$$
$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = \frac{9}{2}$$



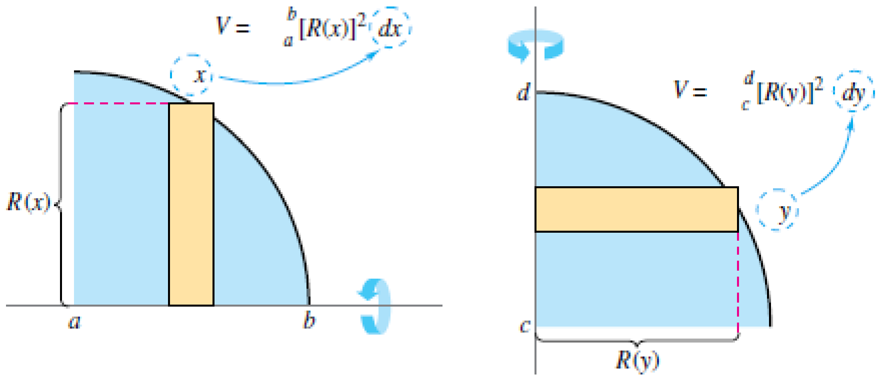


2. الحجم:

The Disk Method طريقة القرص

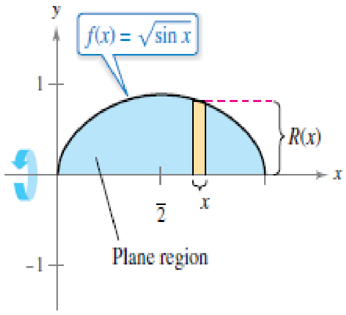
لإيجاد حجم مجسم دوران باستخدام طريقة القرص، نستخدم أحد الصيغتين

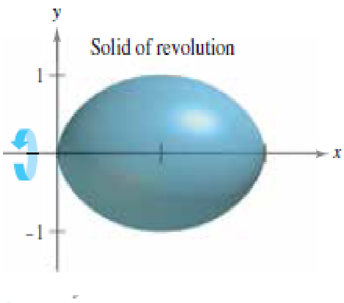
Horizontal Axis of Revolution	Vertical Axis of Revolution
$\text{Volume} = V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$	$\text{Volume} = V = \pi \int_c^d [R(y)]^2 \, dy$



Horizontal axis of revolution

Vertical axis of revolution





Find the volume of the solid formed by revolving the region bounded by the graph of

$$f(x) = \sqrt{\sin x}$$

and the x-axis $(0 \le x \le \pi)$ about the x-axis, as shown in Figure 7.16.

Solution From the representative rectangle in the upper graph i ... you can see that the radius of this solid is

$$R(x) = f(x)$$
$$= \sqrt{\sin x}.$$

So, the volume of the solid of revolution is

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx \qquad \text{Apply disk method.}$$
$$= \pi \int_0^\pi \left(\sqrt{\sin x}\right)^2 dx \qquad \text{Substitute } \sqrt{\sin x} \text{ for } R(x).$$
$$= \pi \int_0^\pi \sin x\, dx \qquad \text{Simplify.}$$
$$= \pi \Big[-\cos x\Big]_0^\pi \qquad \text{Integrate.}$$
$$= \pi(1 + 1)$$