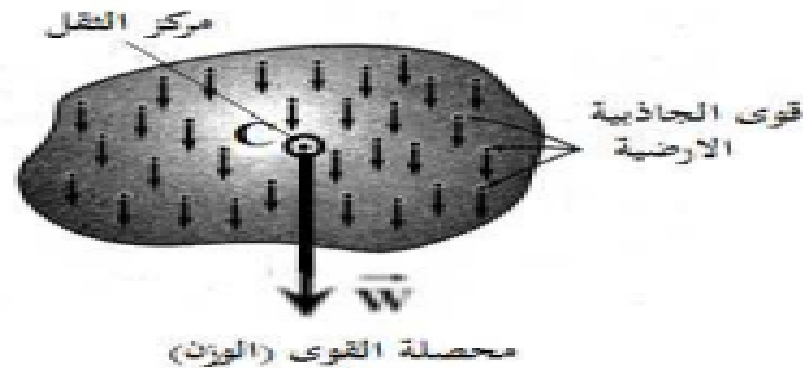


المحاضرة الثالثة عشرة ميكانيك النقطة المادية والجسم الصلب

تمهيد :

تؤثر في الجزيئات المختلفة التي يتكون منها جسم صلب ما يقع قرب سطح الأرض قوى متجهة رأسياً نحو الأسفل باتجاه مركز الأرض تسمى قوى الجاذبية الأرضية وذلك كما هو مبين في الشكل (1-6). ويمكن اعتبار قوى الجاذبية الأرضية قوى متوازية ، كما نرمز لمحصلتها بالرمز \mathbf{W} ويسمى مقدار هذه المحصلة وزن الجسم (**Weight of the Body**) كما تدعى النقطة التي تمر منها محصلة قوى الجاذبية بمركز ثقل الجسم ، ويرمز له بالحرف **C** او بالحرف **G** .



الشكل (1-6)

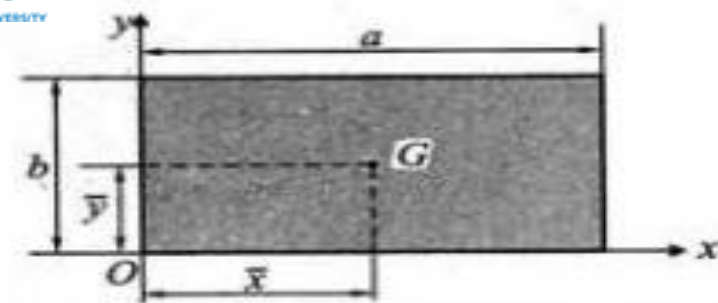
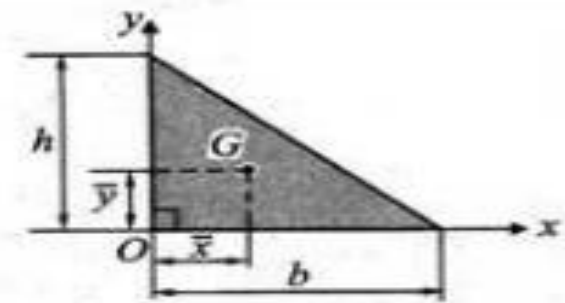
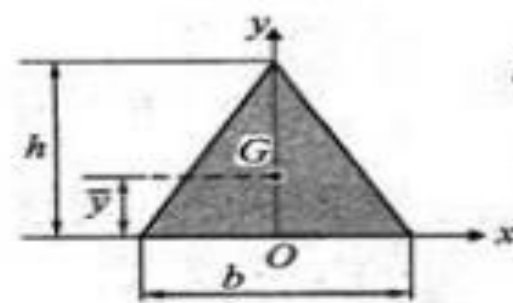


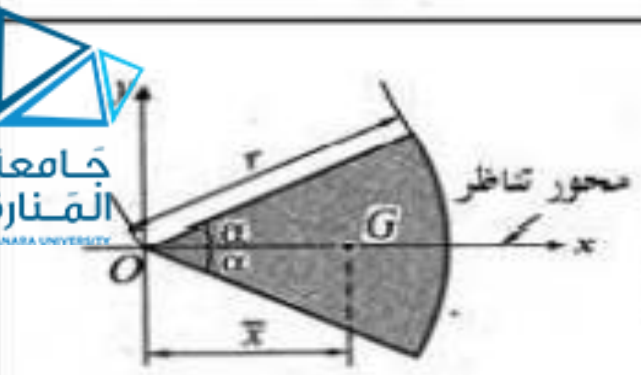
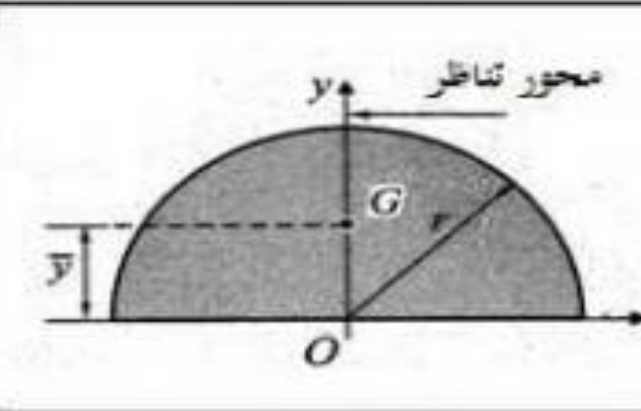
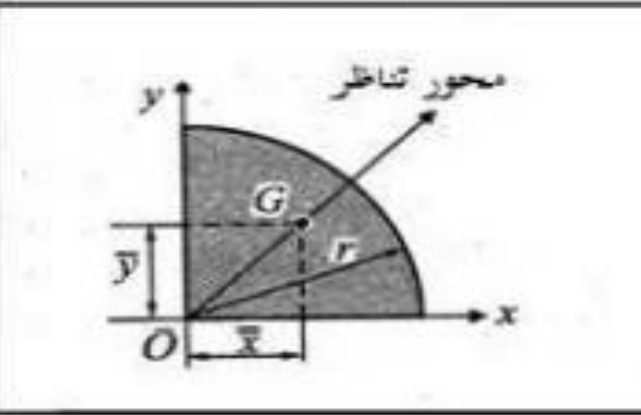
جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY

مراكز ثقل الأشكال الهندسية البسيطة :

يوضح كل من الشكلين (3-6) و(4-6) مراكز ثقل الأشكال الهندسية البسيطة الآتية والتي تشمل بصورة أساسية المستطيل والمثلث والقطاع الدائري :

- المستطيل : إن مركز ثقل المستطيل يقع في نقطة تلاقي قطريه.
- المثلث : إن مركز ثقل المثلث يقع في نقطة مستقيماته المتوسطة.
- القطاع الدائري : إن مركز ثقل القطاع الدائري يقع على محور تناظره ويبعد عن مركز دائرته بالمقدار المبين في الشكل. حيث تمثل α نصف الزاوية المركزية للقطاع .

احداثيات مركز الثقل		المساحة Area	الشكل الهندسي للسطح Geometrical Shapes
Y_i	X_i		
$\frac{b}{2}$	$\frac{a}{2}$	ab	<p>1 - مستطيل Rectangle</p> 
$\frac{h}{3}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{bh}{2}$	<p>2 - مثلث قائم الزاوية Right Angled Triangle</p> 
$\frac{h}{3}$	0	$\frac{bh}{2}$	<p>3 - مثلث متساوي الساقين أو الأضلاع Isosceles/Equilateral Triangle</p> 

0	$\frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ <p>حيث α : بوحدة الراديان</p>	αr^2 <p>حيث α : بوحدة الراديان</p>	<p>4 - قطاع دائري Circular Sector</p> 
$\frac{4r}{3\pi}$	0	$\frac{\pi r^2}{2}$	<p>5 - نصف دائرة Semicircle</p> 
$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$	<p>6 - ربع دائرة Quarter Circle</p> 



جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY

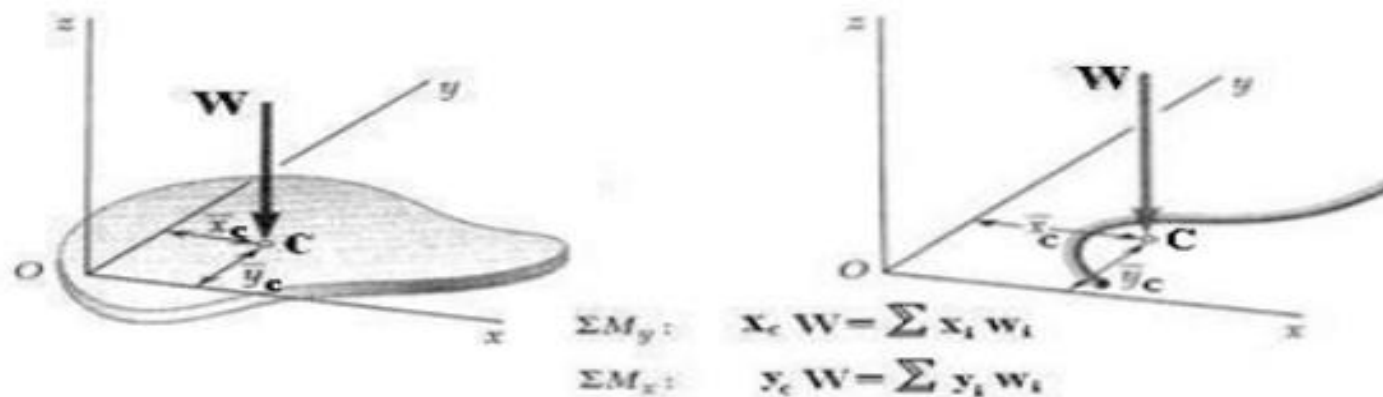
احداثيات مركز الثقل		الطول Length	الشكل الهندسي للاطار Geometrical Shapes
Y_i	X_i		
0	$\frac{l}{2}$	l	1 - مستقيم Straight Line
0	$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ حيث α : بوحدة الراديان	$2\alpha r$ حيث α : بوحدة الراديان	2 - قوس دائري Arc of Circle
$\frac{2r}{\pi}$	0	πr	3 - قوس شكله نصف دائرة Semicircular Arc
$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$	4 - قوس شكله ربع دائرة Quarter Circular Arc



مراكز ثقل السطوح والأطر المستوية :

جامعة
المنارة

تتناول هذه الفقرة كيفية تعيين موضع مركز الثقل للمساحات (Areas) والخطوط (Lines) كما هو مبين في الشكل (5-6). على وجه العموم ، يحتاج البحث عن إحداثيات مركز الثقل $C(x, y)$ لسطح أو إطار ما إلى إجراء عملية تقسيم للسطح أو الإطار إلى عدة أشكال هندسية بسيطة بحيث تكون مراكز ثقلها معلومة.



الشكل (5-6)

ففي حالة السطوح المتجانسة ، يُقسّم السطح المفروض إلى عدة سطوح بسيطة الشكل ويُرمز لمساحاتها A_i وإحداثيات مركز ثقلها x_i و y_i . عندئذ يمكن تعيين إحداثيات مركز الثقل العام $C(x_c, y_c)$ للسطح المفروض بواسطة العلاقتين التاليتين :

وبما ان مقدار قوة الوزن W_i لأي عنصر من العناصر التي قسمت إليها مساحة السطح المتجانس متناسبة مع مساحة هذا العنصر (A_i) . عندئذ يتعين موضع مركز الثقل استنادا إلى المعادلتين السابقتين كما يلي:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n}{A_1 + A_1 + \dots + A_n}$$

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_1 + \dots + A_n}$$

أما في حالة الخطوط كالأطر (Frames) مثلا ، يُقسّم الإطار المفروض إلى عدة عناصر بسيطة الشكل ويُرمز لأطوالها L_i وإحداثيات مركز ثقلها x_i و y_i . وبما أن مقدار قوة الوزن W_i لأي عنصر من العناصر متناسب مع طول هذا العنصر (L_i) لذا يمكن تعيين موضع مركز الثقل العام $C(x, y)$ للإطار كما يلي:



$$x_c = \frac{\sum L_i x_i}{\sum L_i} = \frac{L_1 x_1 + L_2 x_2 + \dots + L_n x_n}{L_1 + L_1 + \dots + L_n}$$

$$y_c = \frac{\sum L_i y_i}{\sum L_i} = \frac{L_1 y_1 + L_2 y_2 + \dots + L_n y_n}{L_1 + L_1 + \dots + L_n}$$

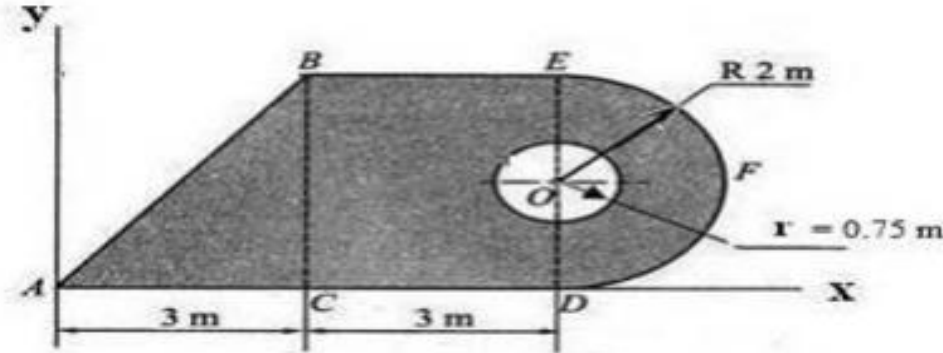
يوضح المثالين التاليين كيفية استخدام المعادلات الرياضية السابقة من اجل تحديد إحداثيات موضع مركز الثقل وذلك في حالي السطوح والأطر المستوية ذات الأشكال الهندسية المختلفة.



جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY

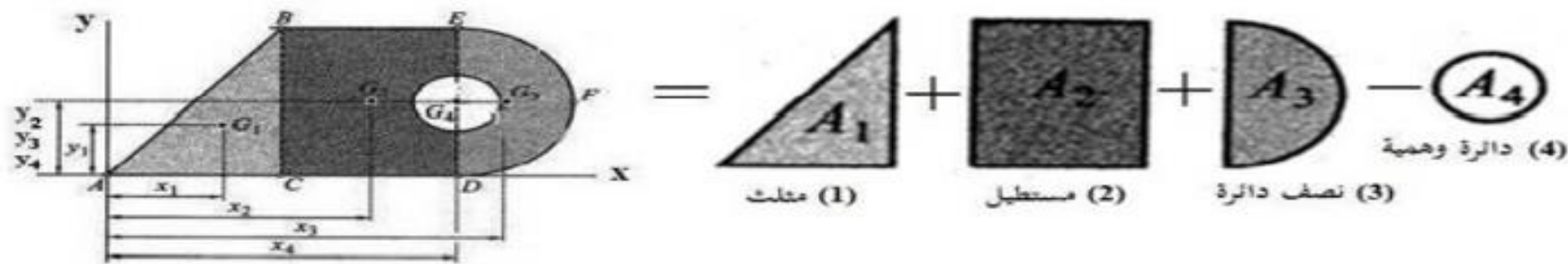
مسألة

احسب إحداثيات مركز الثقل العام $G(x, y)$ للصفحة المتجانسة الموضحة في الشكل وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .



الحل :

نقسم السطح المعطى إلى أربعة أجزاء ثم نحسب مساحة كل جزء وإحداثيات مركز ثقله بمساعدة الشكل التالي :



$$A_1 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 3 \times 4 = 12 \text{ m}^2$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 6.28 \text{ m}^2$$

$$A_4 = -\pi \times 0.75^2 = -1.77 \text{ m}^2$$

ثم نحدد إحداثيات مراكز الثقل لجميع الأجزاء المكونة للصفحة المستوية كما هو مبين في الشكل السابق ونضعها في جدول كالتالي :

y_i (m)	x_i (m)	المساحة A_i (m^2)	الأجزاء
1.33	2	6	المثلث ABC
2	4.5	12	المستطيل $BCDE$
2	6.85	6.28	نصف الدائرة DEF
2	6	- 1.77	الدائرة الوهمية



يتعين مركز الثقل العام لأي سطح مستو بالمعادلتين التاليتين :

$$x = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \quad ; \quad y = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

نعوض فنحصل على :

$$x = \frac{6 \times 2 + 12 \times 4.5 + 6.28 \times 2 - 1.77 \times 2}{6 + 12 + 6.28 - 1.77} = 4.37 \text{ m}$$

$$y = \frac{6 \times 1.33 + 12 \times 2 + 6.28 \times 6.85 - 1.77 \times 6}{6 + 12 + 6.28 - 1.77} = 1.82 \text{ m}$$



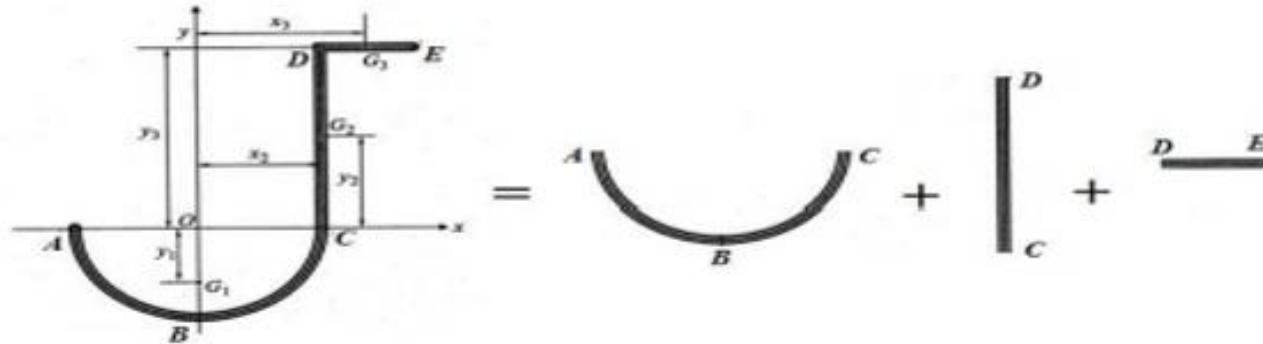
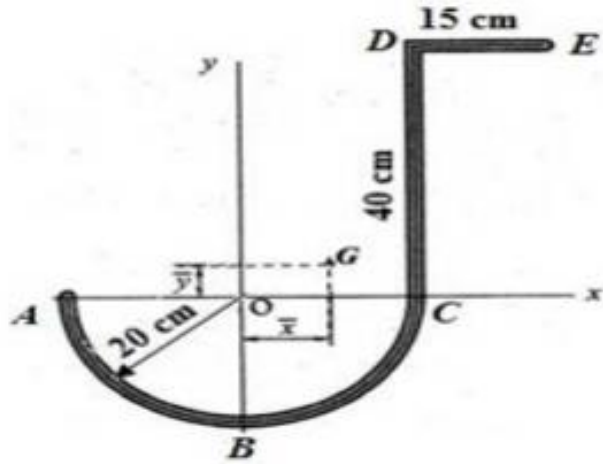
جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY

مسألة

احسب إحداثيات مركز الثقل $C(x, y)$ للإطار (Frame) الموضح في الشكل وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .

الحل :

نقسم الإطار المفروض إلى ثلاثة أجزاء ثم نحسب طول كل جزء وإحداثيات مركز ثقله . كما هو مبين في الجدول .



y_i (cm)	x_i (cm)	الطول L_i (cm)	الأجزاء
-12.73	0	20π	القوس ABC
20	20	40	القطعة المستقيمة CD
40	27.5	15	القطعة المستقيمة DE

يتعين مركز الثقل العام لأي إطار (Frame) بالمعادلتين التاليتين :

$$x = \frac{\sum L_i x_i}{\sum L_i} \quad ; \quad y = \frac{\sum L_i y_i}{\sum L_i}$$

وبناء على القيم الواردة في الجدول السابق نحصل على :

$$x = \frac{(20\pi \times 0) + (40 \times 20) + (15 \times 27.5)}{20\pi + 40 + 15} = 10.29 \text{ cm}$$

$$y = \frac{(-12.73 \times 20\pi) + (40 \times 20) + (15 \times 40)}{20\pi + 40 + 15} = 5.09 \text{ cm}$$



- Nelson E w ((Engineering Mechanics Statics and Dynamics) McGraw-Hill 1997
- Hibbeler. R. C, Engineering Mechanics - Statics, 13-edition, New Jersey 2014.
- W.F. Riley, L.D.Sturges (Engineering Mechanics -Statics New York 1996
- J.L. Meriam , L.G. Kraige (Engineering Mechanics – statics New York 1993
- Hibbeler. R. C, (Statics and Mechanics of Materials), Prentice Hall New Jersey 2004.
- Bedford Anthony, Wallace Fowler, (Engineering Mechanics – Statics), 2nd Edition Wesley, 2011.
- Ferdinand P. Beer and E. Russell Johnston,(Vector Mechanics for Engineers –Statics), 10-edition, Singapore, 2009.
- Santilli R. M,(Foundations of theoretical mechanics). Springer 2008.
- JafarVossoughi, (Statics for Architects Chapman & Hall), New York, 1986.

- د. دريد عزوز الميكانيك الهندسي منشورات جامعة حلب
- د. جمعة شحادة محاضرات مقرر الميكانيك الهندسي ENGINEERING MECHANICS لطلاب السنة الأولى الهندسة الالكترونية والاتصالات جامعة دمشق
- د. تمام سلوم الميكانيك التطبيقي منشورات جامعة تشرين
- سليمان، عهد؛ حسن، ياسر: الميكانيك الهندسي. جامعة تشرين ٢٠٠٨.
- ياخور، يوسف؛ نجار، رائد: الميكانيك الهندسي - علم السكون: جامعة تشرين ١٩٩٧.
- شحادة، جمعة: محاضرات الميكانيك الهندسي. جامعة دمشق ٢٠١٤-٢٠١٥.
- الاحمد، نوفل: الميكانيك الهندسي. جامعة تشرين ٢٠١٢-٢٠١٣.
- العبيد، محمد بري: الميكانيك الهندسي. منشورات جامعة البعث ٢٠٠٤.
- ياخور يوسف؛ بربهان، ميشيل: الميكانيك الهندسي. جامعة تشرين ٢٠٠٢ - ٢٠٠٣.
- الميكانيك الهندسي الحركة و التحريك الدكتور المهندس مطانيوس شحادة زلما منشورات جامعة حلب ١٩٩١