جامعة المنارة الخاصة

كلية الهندسة

هندسة الروبوتيك والانظمة الذكية

الإشارات والأنظمة

Signals and Systems

الجمل والإشارات المقطعة زمنياً

مدرس المقرر

د. السموءل صالح

المحاضرة السادسة

الفصل الدراسي الثاني

التقطيع في مجال الزمن والتردد

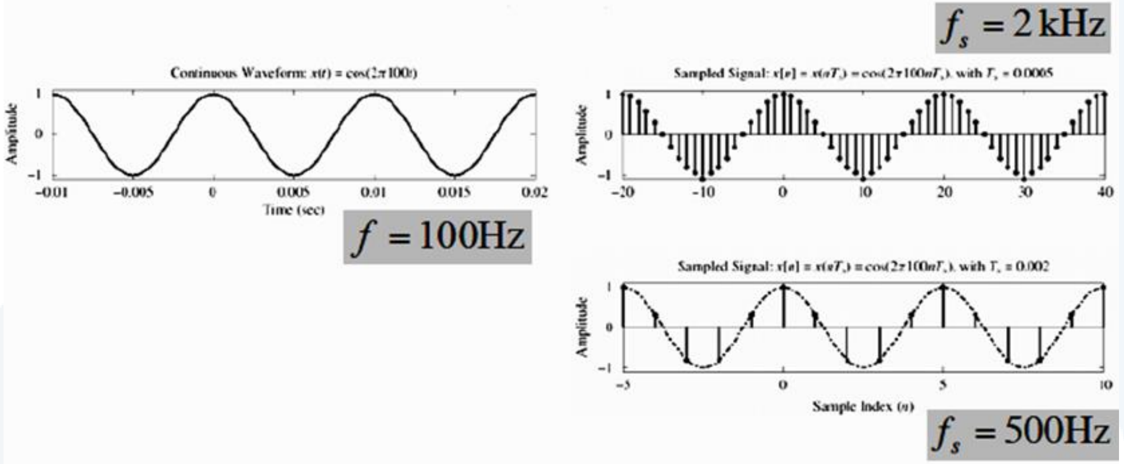
مقدمة: -- تُعدُّ الإشارات العددية أو الرقمية في عصرنا الراهن مهمة جداً وذاك أن معظم النظم قد أصبحت رقمية وخاصة في مجالي الاتصالات والأتمتة ومعالجة البيانات والحساسات مثال على ذلك كل من نظامي الخلوي وشبكات الحساسات.

-- يشترط في معالجة الإشارات الرقمية أن تكون الإشارات المدروسة بشكل تتابعات *Sequences* عددية، يتم الحصول على الإشارات الرقمية (تتابعات الأعداد)، عن طريق أخذ العينات من الإشارات التشابهية $x(t)$ أي تقطيع هذه الإشارة زمنياً بحيث نحصل على الإشارة $x(n)$.

بالنتيجة نحتاج لمحولات تشابهية رقمية وبالعكس وفق المخطط المبين:

لنأخذ مثالا بسيطا عن اخذ العينات على الجزء الاول من الشكل السابق، لدينا الاشارة x(t) عبارة عن اشارة جيبيه وأردنا اخذ عينات منها كل دور T_S . تنتج لدينا الاشارة [n]x بأخذ دور التقطيع وفق الشكل المبين تكتب الاشارة بالشكل:

$$x[n] = x[nT_S]$$



ملاحظة:

لدى معالجة أطياف الإشارات رقميا يتوجب علينا أيضاً تقطيعها، كذلك لدى تحليل النظم عن طريق توابع نقلها يتوجب تقطيعها وأخذ عيناتها في مجال التردد إذا نحتاج للتقطيع في كل من المجالين الزمني والترددي.

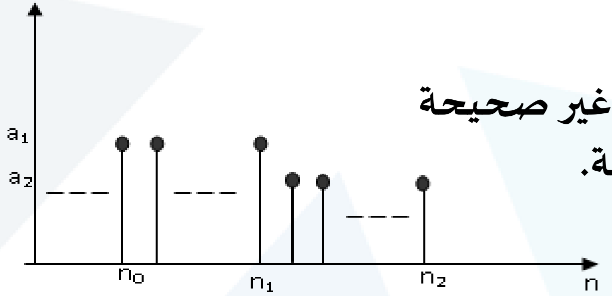
الجمل والإشارات المقطعة زمنياً

مقدمة: كما شاهدنا سابقاً فإن الإشارات المقطعة زمنياً $s_a(t)$ هي عينات من الإشارات التشابهية $s(t)$ بدور تقطيع T ويمكن أن نرمزلتتابع العينات الناتج بـ $s_a(nT) = s(n)$ ويعبرعن هذا التتابع تابعياً على سبيل المثال كالآتي:

$$\boldsymbol{s_a(nT) = s(n) = \begin{cases} a_1 \; for \; n_0 \le n \le n_1 \\ a_2 \; for \; n_1 < n \le n_2 \\ 0 \quad else \; where \end{cases}}$$

حيث أن $\boldsymbol{a_1, \; a_2, \; n, \; n_0, \; n_1, \; n_2}$ أعداد صحيحة.

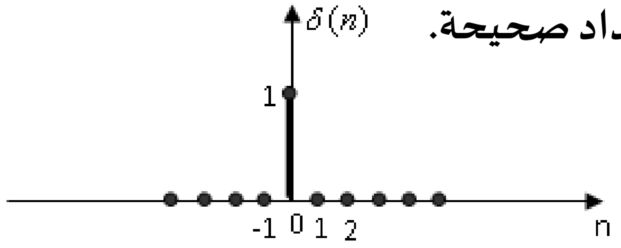
إذا كانت $\boldsymbol{n}$, أعداد غير صحيحة تكون الاشارة غير معرفة.



الإشارات الأولية المقطعة زمنياً: Elementary Discrete – Time Signals

١- النبضة الواحدية: Unite Impulse تعرف بالعلاقة الآتية

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 \; for & n = 0 \\ 0 \; for & n \ne 0 \end{cases}$$



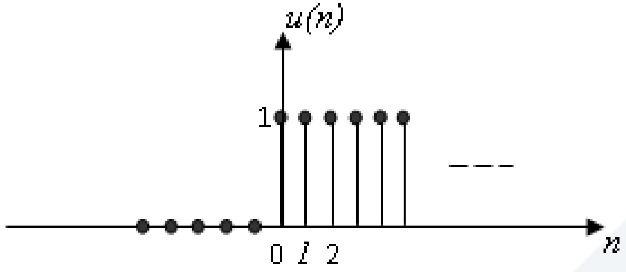
تابع النبضة الواحدية $\delta(n)$

٢- تتابع إشارة الخطوة الواحدية: Unite Step Signal

$$u(n) = \begin{cases} 1 \; for & n \ge 0 \\ 0 \; for & n < 0 \end{cases}$$

تعرف بالعلاقة الآتية

$$u(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n-k)$$



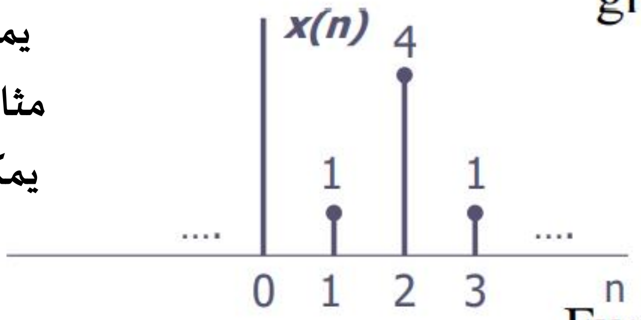
تتابع إشارة الخطوة الواحدية

يعبرعن التتابع المزاح وفق العلاقة :

$$u(n-1) = \begin{cases} 1 \; for & n \ge 1 \\ 0 \; for & n < 1 \end{cases}$$

الية تمثيل الإشارات المقطعة زمنياً

graphical representation



Functional representation

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{for } n = 1, 3 \\ 4, & \text{for } n = 2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Tabular representation

n	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\ldots$
$x(n)$	$\cdots$	0	0	0	1	4	1	0	0	$\ldots$

Sequence representation

$$x(n) = \{\ldots 0, \underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1, 0, 0, \ldots\} \qquad x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1, 0, 0, \ldots\} \qquad x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1\}$$

التمثيل الرياضي للإشارة المقطعة زمنيا:

يمكن التعبيرعن أي تتابع إشارة بوساطة تتابع من الومضات الواحدية $\delta(n)$ مثقلة،

مثال ذلك تتابع الإشارة: $s(n)=\{2, \mathbf{4}, 0, 3\}$

يمكن التعبيرعنه كتتابع ومضات موزونة كالآتي:

$$s(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).\delta(n-k) = 2\delta(n+1)+4\delta(n)+3\delta(n-2)$$

ملاحظة: السهم يدل على قيمة العينة عند $n=0$

أو يمكن أن يشار الى ذلك بكتابة الرقم بخط عريض.

الجمل والإشارات المقطعة زمنياً

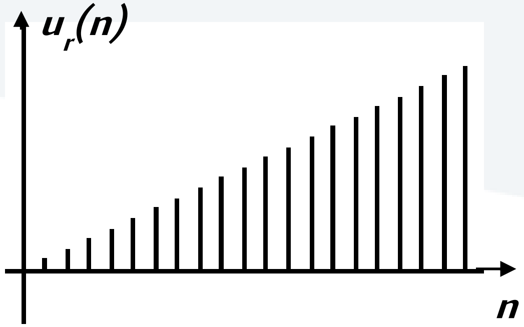
الإشارات الأولية المقطعة زمنياً: Elementary Discrete – Time Signals

٣- تتابع الإشارة الخطية الواحدية The Unite Ramp Signal:

تعرف رياضيا بالعلاقة الآتية

$$u(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} k.\delta(n-k)$$

$$u_r(n) = \begin{cases} n \; for & n \geq 0 \\ 0 \; for & n < 0 \end{cases}$$



تتابع الإشارة الخطية المقطعة

يعبر عن التتابع المزاح كما يأتي:

$$u(n-i) = \begin{cases} n-i & for \quad n \geq i \\ 0 & for \quad n < i \end{cases}$$

٤- تتابع الإشارة الآسية The Exponential Signal:

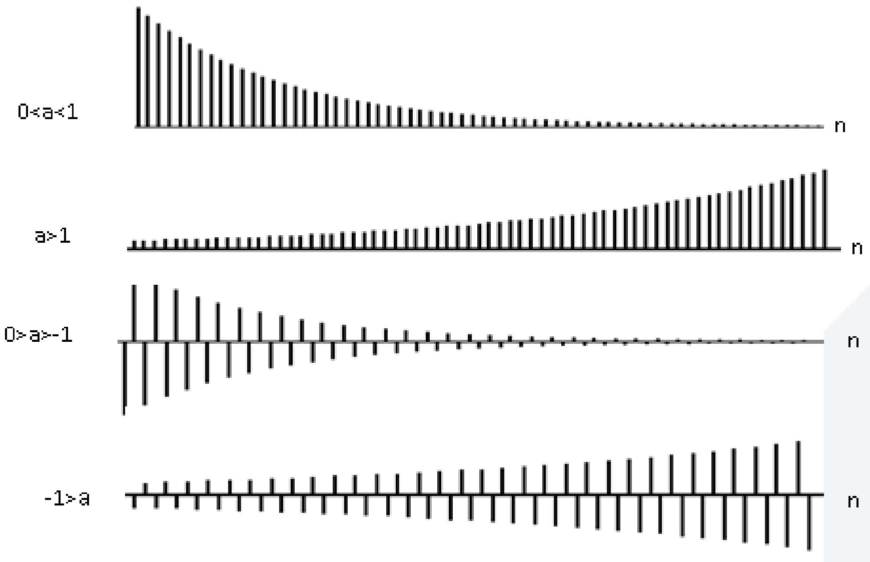
إذا كان المعامل *a* حقيقياً يكون تتابع الإشارة *S(n)* حقيقياً وتعرف رياضياً بالعلاقة الآتية:

$$s(n) = a^n \qquad for \quad all \quad n$$

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k . \delta(n-k)$$

إذا كان المعامل a ذو قيمة عقدية، يمكن التعبير عنه كالآتي: $a=r.e^{j\theta}$ وبناء عليه يمكن التعبير عن S(n) وفق:

$$s(n) = a^n = r^n . e^{j\theta n} = |s(n)| . e^{j\underline{|s(n)}}$$
$$= r^n [cos(\theta n) + j \, sin(\theta n)]$$



تتابع النبضة الأسية $s(n)$ من أجل مجالات مختلفة لقيم المعامل

Elementary Discrete – Time Signals

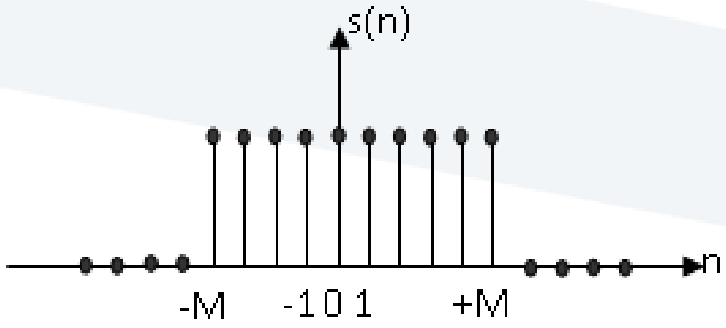
الإشارات الأولية المقطعة زمنياً:

٥- تتابع النبضة المستطيلة الواحدية: يعرف رياضياً انطلاقاً من تتابع الخطوة المزاحة كما في العلاقة:

$$s(n) = \begin{cases} 1 \; for & |n| < M \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$s(n) = u(n+M) - u(n-M-1)$$

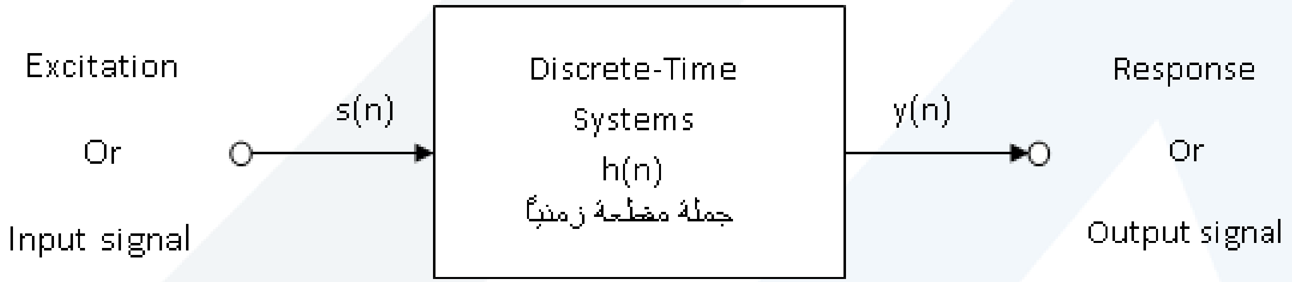
$$u(n) = \sum_{k=-M}^{+M} \delta(n-k) = rect\left(\frac{n}{2M+1}\right)$$



تتابع النبضة المستطيلة الواحدية

الجملة المقطعة زمنياً Discrete-Time Systems: تتميز هذه النظم بكون إشارات دخلها وخرجها مقطعة زمنياً وبالتالي فإن توابع استجاباتها الزمنية تكون توابعاً مقطعة زمنياً:

أمثلة:



المخطط الصندوقي لجملة مقطعة زمنياً

ويرتبط تتابع إشارة الخرج مع تتابع إشارة الدخل وفق العلاقة:

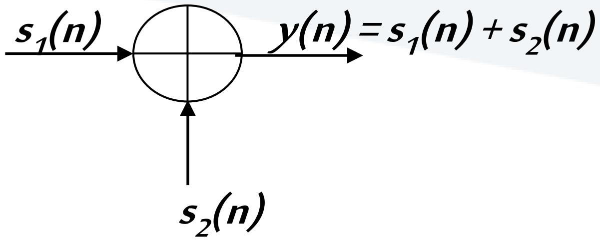
$$\boldsymbol{y(n) = T_r\{s(n)\}}$$

المخططات الصندوقية لتمثيل الجمل الرقمية:

إن عناصر الجمل الرقمية الأساسية هي: الجامع، الضارب، عناصر التأخير، وعناصر التقديم الزمني.

أ- الجامع :Adder

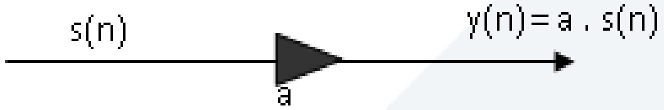
يقوم الجامع بجمع عينات إشارات الدخل ذات الموقع الزمني نفسه كما في الشكل، أي أن كل عينة من تتابع الخرج تساوي إلى مجموع عينات تتابعات الدخل عند اللحظة الزمنية نفسها.



تمثيل الجامع.

ب- الضارب الثابت Constant Multiplier

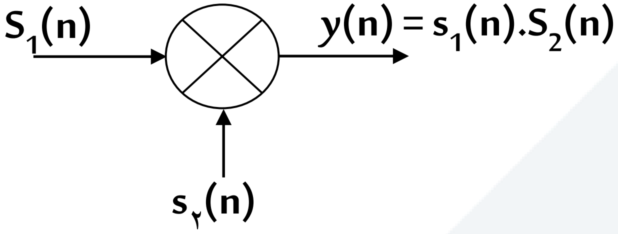
يقوم بضرب كافة عينات الإشارة بثابت ما a كما في الشكل



تمثيل ضارب بثابت

ج- ضارب الإشارة Signal Multiplier:

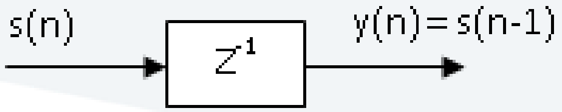
يقوم بضرب عينات تتابعات الدخل المتفقة بلحظاتها الزمنية وبالتالي فإن كل عينة من إشارة خرجه تساوي إلى جداء عينات إشارات الدخل عند اللحظة الزمنية نفسها كما في الشكل.



تمثيل ضارب الإشارات

المخططات الصندوقية لتمثيل الجمل الرقمية:

د- عنصر التأخير الواحدي Unite delay Element:

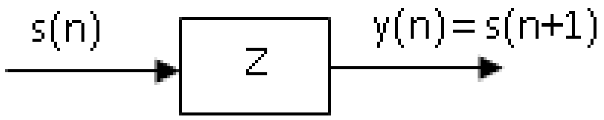


تمثيل عنصر تأخير واحدي.

في هذه الجملة تكون عينة الخرج عند اللحظة الزمنية n مساوية عينة إشارة الدخل من أجل اللحظة الزمنية n-1. يقوم هذا العنصر بتخزين العينة ذات الموقع n-1 لمدة تساوي إلى الفارق الزمني بين عينتين متتاليتين حيث يعطيها بعد ذلك على الخرج عند اللحظة n .

إن هذا يقابل إزاحة محور الزمن نحو اليسار بمقدار واحدة زمنية أو إزاحة تتابعات إشارة الدخل s(n) نحو اليمين بمقدار واحدة زمنية، والشكل يوضح عمل هذا العنصر.

هـ- عنصر تقديم واحدي Unite Advance Element:



تمثيل عنصر تقديم واحدي

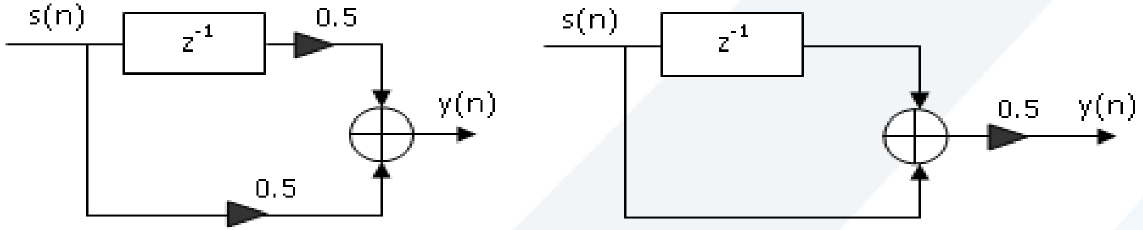
من أجل هذا العنصر تظهر على الخرج عند اللحظة الزمنية *n* عينة إشارة الدخل المقابلة للحظة الزمنية *n+1* والشكل الاتي يوضح عمل عنصر التقديم الواحدي. انطلاقاً من هذه العناصر البسيطة يمكن تمثيل الجمل المركبة.

مثال: مثل صندوقياً الجملة الموصوفة بعلاقة الخرج – الدخل الآتية:

$$y(n) = 0.5 \cdot s(n) + 0.5 \cdot s(n-1)$$

حيث : *y(n)* تمثل تتابع إشارة الخرج،

S(n) تمثل تتابع إشارة الدخل.



$y(n) = 0.5\, s(n) + 0.5\, s(n-1)$ $\quad$ $y(n) = 0.5\,[\, s(n) + s(n-1)\,]$

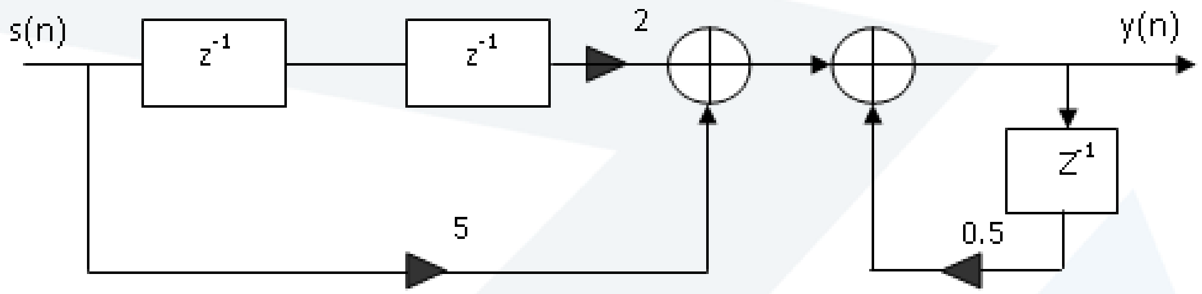
تمثيل عنصر تقديم واحدي

المخططات الصندوقية لتمثيل الجمل الرقمية:

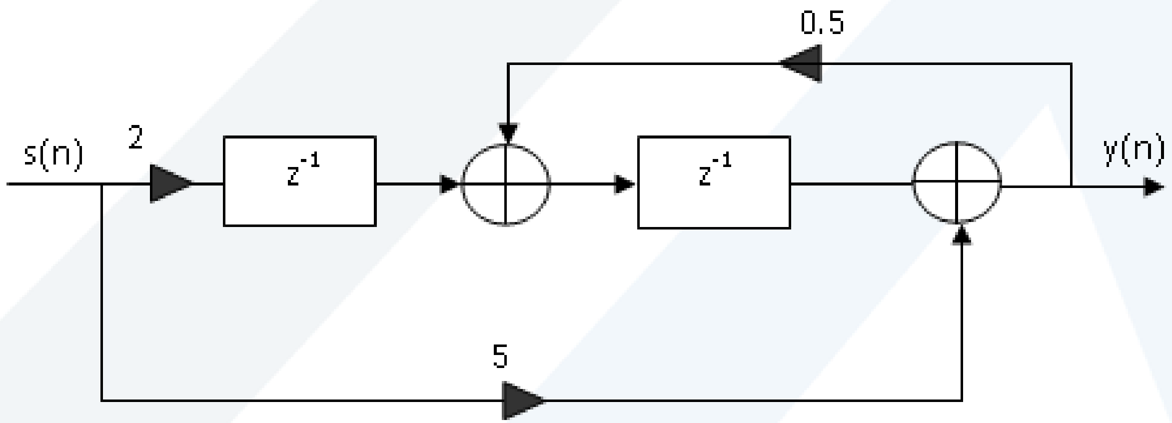
مثال: حقق بشكل صندوقي الجملة الموصوفة بعلاقة الخرج – الدخل الآتية:

$$y(n) = 0.5 \cdot y(n-1) + 5 \cdot s(n) + 2 \cdot s(n-2)$$

الحل:



يمكن اختصار المخطط السابق أي اختصار عدد عناصر التأخير اللازمة ليصبح كما في الشكل الآتي:



Classification of Discrete–Time Systems:

تصنيف الجمل المقطعة زمنياً

أ- الجمل الستاتيكية والجمل الديناميكية: تدعى الجملة ستاتيكية أو بدون ذاكرة عندما لا يتم في هذه الجملة تخزين لأي من عينات إشارات الدخل أو الخرج السابقة. إن مثل هذه الجمل لا تحوي أي عناصر تأخير زمني.

مثال ذلك: الجمل ذات علاقات التحويل (الخرج مع الدخل) الآتية:

$$a)\quad y(n) = a \cdot s(n)$$

$$b)\quad y(n) = n \cdot s(n) + b \cdot s^3(n)$$

أما الجملة الديناميكية فهي عكس الستاتيكية، فهي جملة بذاكرة وقد تكون هذه الذاكرة محدودة أو غير محدودة، نستنتج أن مثل هذه الجملة تحوي عناصر تأخير. مثال ذلك الجمل التي توصف بعلاقات التحويل الآتية:

بذاكرة محدودة

$$a)\quad y(n) = s(n) + 3 \cdot s(n-1)$$

بذاكرة محدودة

$$b)\quad y(n) = \sum_{k=0}^{N} s(n-k)$$

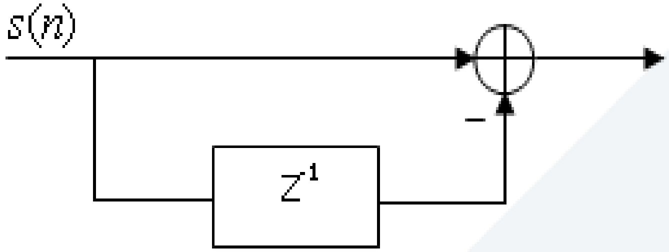
بذاكرة غير محدودة

$$c)\quad y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} s(n-k)$$

ب- الجمل الثابتة والجمل المتغيرة مع الزمن: لتحقيق شرط الثبات مع الزمن للجملة الرقمية يجب أن لا يتأثر شكل وتسلسل تتابع الخرج لدى إزاحة تتابع الدخل إنما يجب إزاحته فقط بمقدار الإزاحة الزمنية في تتابع الدخل.

$$\boldsymbol{y(n) = T_r\{s(n)\} \Rightarrow \ y(n-k) = T_r\{s(n-k)\}}$$

كمثال على جملة ثابتة مع الزمن نعطي الجملة المبينة في الشكل الآتي:



$$y(n) = s(n) - s(n-1)$$

للبرهان نزيح تتابع الدخل بـ k موقع زمني فتصبح إشارة الخرج كما يأتي:

$$y(n-k) = s(n-k) - s(n-1-k)$$
$$= s(n-k) - s(n-k-1)$$

تصنيف الجمل المقطعة زمنياً

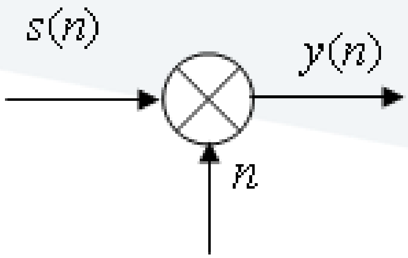
Classification of Discrete–Time Systems:

ب- الجمل الثابتة والجمل المتغيرة مع الزمن:

أمثلة:

١- لتكن الجملة الآتية والموصوفة بمعادلة الخرج–الدخل الآتية ومخطط التحقيق:

$$y(n) = n \cdot s(n)$$



نجد أنها غيرثابتة مع الزمن، البرهان: لدى الإزاحة الزمنية لإشارة الدخل بـ kموقع زمني نحصل على إشارة خرج:

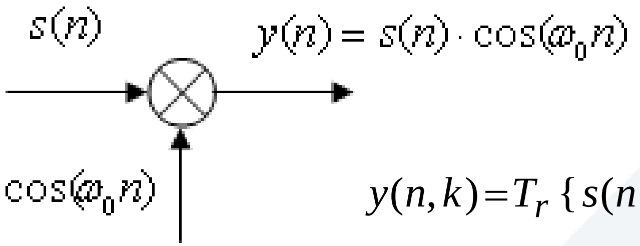
$$n \cdot s(n-k) = y(n, k)$$

لدى الإزاحة الزمنية لتتابع الخرج بـ ***k*** موقع زمني نحصل على ***y(n-k)*** وبالتعويض في معادلة التحويل نجد:

$$y(n, k) \neq y(n-k) = (n-k) \cdot s(n-k)$$

وهذا يعني أن الجملة غيرثابتة مع الزمن .**Time–Variant**تدعى الجملة السابقة بجملة ضارب زمني

٢- لتكن الجملة الآتية والموصوفة بمعادلة الخرج–الدخل الآتية ومخطط التحقيق: تدعى بجملة المعدل، أثبت أنها غيرثابتة مع الزمن.



البرهان: عند إزاحة تتابع إشارة الدخل بـ ***k*** موقع زمني نحصل في الخرج على الإشارة

$$T_r\{s(n-k)\} = y(n,k) = s(n-k).\cos(\omega_o n)$$

أما إزاحة إشارة الخرج بـ kموقع زمني فإنه يعني أن شكل تتابع إشارة الخرج كالآتي:

$$y(n-k) = s(n-k).\cos[\omega_o(n-k)]$$

بالمقارنة نستنتج:

$$y(n,k) = T_r\{s(n-k)\} \neq y(n-k)$$

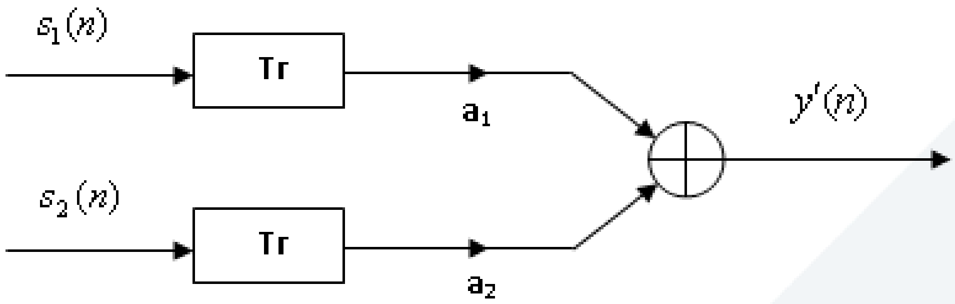
نستنتج من ذلك أن جملة المعدل غيرثابتة مع الزمن

ج- الجمل الخطية والجمل غير الخطية Linear and Nonlinear Systems:

تكون الجمل خطية عندما تتحقق بين تتابعات إشارات الخرج وإشارات الدخل العلاقة الآتية:

$$Tr\{[a_1 s_1(t)+a_2 s_2(t)]\}=a_1.Tr\{[s_1(t)]\}+a_2.Tr\{[s_2(t)]\}$$

نمثل طرفي العلاقة الأخيرة صندوقياً كما في الشكل المبين، حيث يتحقق شرط الخطية إذا كان: $y'(n)=y(n)$



أمثلة: هل الجمل الآتية خطية:

$a)\quad y(n)=n\cdot s(n)$

$b)\quad y(n)=s(n^2)$

$c)\quad y(n)=s^2(n)$

$d)\quad y(n)=n\cdot s(n)+b$

$e)\quad y(n)=e^{s(n)}$

حيث أنى S(n) تمثل تابع إشارة الدخل وتتابع إشارة الخرج.

الحل:

$$b)-y'(n)=a_1.Tr[s_1(n)]+a_2.Tr[s_2(n)]=a_1.s_1(n^2)+a_2.s_2(n^2)$$
$$y(n)=Tr\{a_1.s_1(n)+a_2.s_2(n)\}=a_1.s_1(n^2)+a_2.s_2(n^2)$$
$$=a_1.s_1(n^2)+a_2.s_2(n^2)$$

$$a)-y'(n)=a_1.Tr[s_1(n)]+a_2.Tr[s_2(n)]=a_1.n.s_1(n)+a_2.n.s_2(n)$$
$$y(n)=Tr\{a_1.s_1(n)+a_2.s_2(n)\}=n.[a_1.s_1(n)+a_2.s_2(n)]$$
$$=a_1.n.s_1(n)+a_2.n.s_2(n)$$

ومنه نجد أن: أي أن الجملة خطية.

د- الجمل السببية والجمل غير السببية Causal and Non Causal Systems:

نقول عن جملة أنها سببية إذا كانت إشارة الخرج عند أية لحظة زمنية تعتمد على إشارة الدخل في اللحظة n نفسها واللحظات الزمنية التي سبقت أي: $s(n-1)$، $s(n-2)$ ..... أي يكون الخرج محقق للتابع:

$$y(n)=f\,[\,s(n),s(n-1),s(n-2),.......]$$

وتكون الجملة غير سببية إذا كانت إشارة الخرج $y(n)$ عند أي لحظة زمنية تعتمد على إشارة الدخل $S(n)$ في اللحظة n نفسها واللحظات الزمنية التي تلت أي $s(n+1)$، $s(n+2)$ ...

أمثلة على الجمل السببية:

$$a)-\ y(n)=s(n)+s(n-1)$$

$$b)-\ y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} s(k)$$

$$c)-\ y(n)=a.s(n)$$

وعلى الجمل غير السببية:

$$a)-\ y(n)=s(n)+3s(n+4)$$

$$b)-\ y(n)=s(n^2)$$

$$c)-\ y(n)=s(2n)$$

هـ- الجمل المستقرة والجمل غير المستقرة Stable and Unstable Systems:

حتى تكون الجمل مستقرة يجب أن يتحقق الشرط الآتي:

$$|y(n)|\le M_y<\infty \qquad |s(n)|\le M_x<\infty$$

أن عينات الخرج يجب أن تكون محدودة القيمة عندما تكون عينات الدخل محدودة القيمة.

أ- إشارات القدرة وإشارات الاستطاعة Energy Signals and Power Signals

تعطى القدرة E لتتابع الإشارة $s(n)$ بالعلاقة الآتية:

$$E=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|s(n)|^2$$

إن الطاقة E يمكن أن تكون محدودة أو غير محدودة. فإذا كانت الطاقة E محدودة أي($0<E<\infty$) بالنسبة للإشارة s(n) تدعى عندها بإشارة طاقة Energy Signal وتكون كثيرا من الإشارات ذات الطاقة غير المحدودة باستطاعة متوسطة محدودة Finite Average Power

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{+N}|s(n)|^2$$

-- فإذا عرفنا طاقة الإشارة s(n) على مجال محدد لقيم n: $-N\le n<N$ كالآتي:

$$E_N=\sum_{n=-N}^{+N}|s(n)|^2$$

عندها نستطيع أن نعبر عن طاقة الإشارة نفسها كالآتي: $E=\lim_{N\to\infty}E_N$

ونعبر عن الاستطاعة المتوسطة Average Power كالآتي:

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}E_N$$

-- فإذا كانت E محدودة عندها يكون P = 0 وإذا كانت E غير محدودة عندها يمكن أن تكون الاستطاعة المتوسطة محدودة أو غير محدودة. تدعى الإشارة بأنها إشارة استطاعة إذا كانت P لهذه الإشارة أي (الاستطاعة المتوسطة) محدودة أو غير معدومة.

أ- إشارات القدرة وإشارات الاستطاعة Energy Signals and Power Signals

مثال١: حدد ماهية تتابع الخطوة الواحدية: unit step sequence

$$E=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|s(n)|^2=\sum_{n=0}^{+\infty}u^2(n)=\sum_{n=0}^{+\infty}1=\infty$$

إن E غير محدودة بالتالي فهي ليست إشارة طاقة. نحسب الاستطاعة المتوسطة:

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{2N+1}=\lim_{N\to\infty}\frac{1+\frac{1}{N}}{2+\frac{1}{N}}=\frac{1}{2}$$

وبالتالي فإنها إشارة استطاعة

مثال٢: حدد ماهية الومضة الواحدية $\delta(n)$

الحل: نحسب طاقة الإشارة:

$$E=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\delta(n)|^2=1$$

فالإشارة إشارة طاقة.

ب- الإشارات الدورية والإشارات غير الدورية: Periodic Signals and Aperiodic Signals

يكون تتابع الإشارة S(n) دورياً وذا دور N، حيث (N>0) إذا تحقق: $s(n+N)=s(n) \quad \text{for} \quad \text{all} \;\; n$

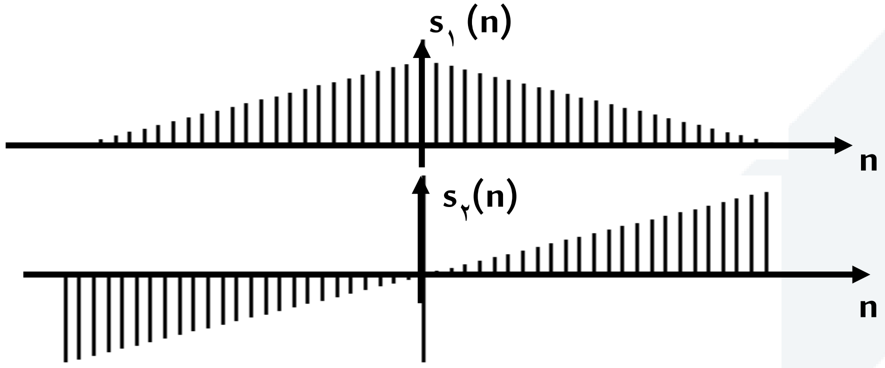
ج- الإشارات المتناظرة(الزوجية) وعكس المتناظرة(الفردية): Symmetric (Even) and Asymmetric (Odd) Signals

يكون تتابع إشارة بقيم حقيقية متناظراً زوجياً إذا تحققت العلاقة الآتية: $s(n)=s(-n)$ مثال على ذلك: التتابع ، $s(n)=\cos(w_o n)$

من جهة أخرى تكون الإشارة متناظرة سلباً أوفردية إذا تحققت العلاقة الآتية: $s(-n)=-s(n)$ مثال على ذلك: التتابع $s(n)=\sin(n).a^{|n|}$

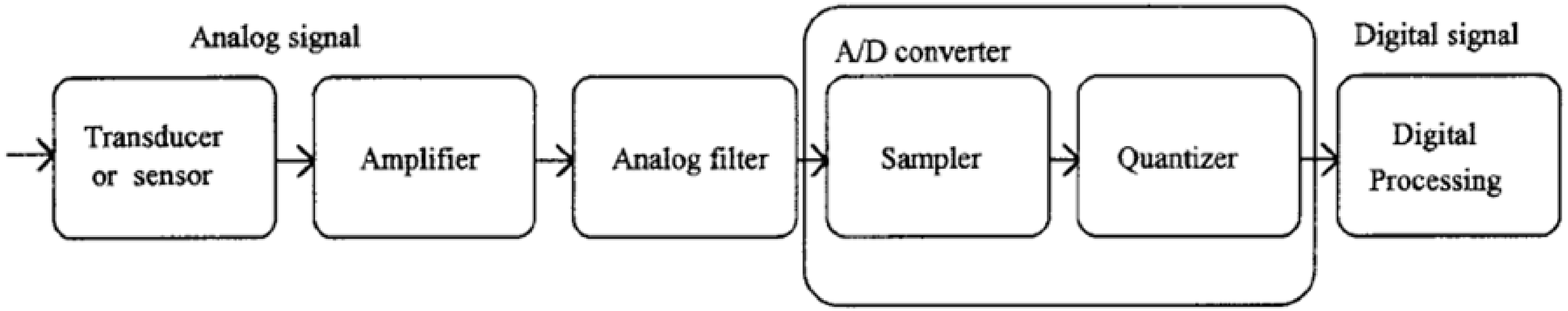
يبين الشكل الآتي مثالاً على الإشارات الزوجية والفردية، حيث نلاحظ من هذا الشكل أنه إذا كانت $s(n)$ فردية فإن $s(0)=0$

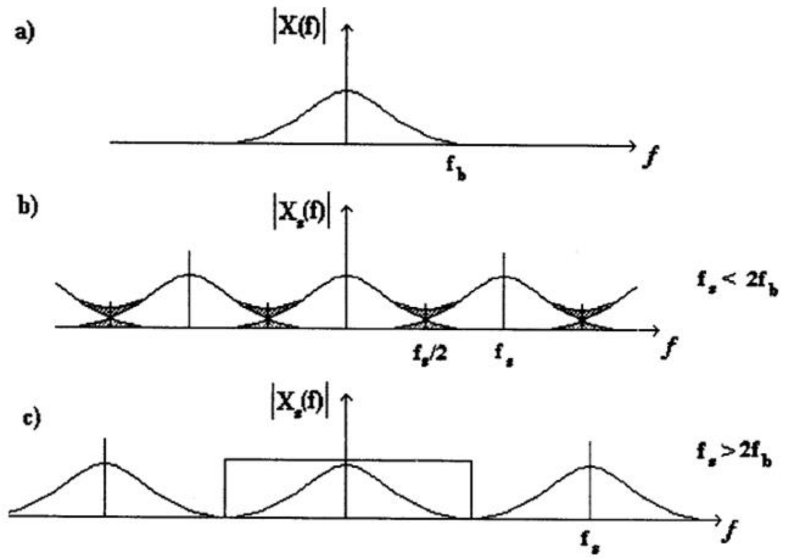
يمكن صياغة كل إشارة على شكل مجموع إشارتين إحداهما زوجية والأخرى فردية أي: $s(n)=s_e(n)+s_o(n)$



مثال على الإشارات الزوجية $s_1(n)$ و الفردية $s_2(n)$

المعالجة الرقمية للإشارة:





١- تحليل الجمل LTI المقطعة زمنياً: Analysis of Discrete–Time Systems

يمكن التعبيرعن أي تتابع إشارة بوساطة تتابع من الومضات الواحدية $\delta(n)$ مثقلة، مثال ذلك تتابع الإشارة: $s(n) = \{2, 4, 0, 3\}$ يمكن التعبير عنه كتتابع ومضات موزونة كالآتي:

$$s(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).\delta(n-k)=2\delta(n+1)+4\delta(n)+3\delta(n-2)$$

-- إن تحليل الجمل LTI المقطعة زمنياً يعني دراسة استجاباتها لدى تطبيق أي تتابع إشارة دخل عليها. لدى دراسة جمل LTI التشابهية فإن استجابة الجملة هي ناتج انطواء إشارة الدخل مع تابع الاستجابة النبضي. لدى تحليل جمل LTI المقطعة زمنياً نتعامل مع مجموع الانطواء Convolution Sum أو الانطواء المتقطع "Discrete Convolution ".

٢- استجابة الجملة LTI المقطعة زمنياً على تتابع دخل اختياري:

بشكل مشابه للجمل والإشارات التشابهية، لدى تطبيق تتابع الإشارة المعطاة في العلاقة السابقة على جملة LTI مقطعة زمنياً يمكن الحصول على استجابة هذه الجملة كما يأتي:

$$y(n)=Tr\{s(n)\}=Tr\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).\delta(n-k)\}$$

٢- استجابة الجملة LTI المقطعة زمنياً على تتابع دخل اختياري:

بشكل مشابه للجمل والإشارات التشابهية، لدى تطبيق تتابع الإشارة المعطاة في العلاقة السابقة على جملة LTI مقطعة زمنياً يمكن الحصول على استجابة هذه الجملة كما يأتي:

$$y(n)=Tr\{s(n)\}=Tr\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).\delta(n-k)\}$$

بالنظر للخصائص الخطية للجملة LTI ولكون $s(k)$ قيم ثابتة نعبر عن العلاقة السابقة كالآتي:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).Tr\{\delta(n-k)\}$$

يمثل تتابع الاستجابة الومضي لجملة LTI باستجابة هذه الجملة على تابع الومضة الواحدية وبالتالي فإن:

$$Tr\{\delta(n-k)\}=h(n-k)$$

بعد التعويض في العلاقة السابقة نحصل على استجابة الجملة LTI المقطعة زمنياً على تتابع الدخل s(n) كما يأتي:

$$\boldsymbol{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).h(n-k) \rightarrow y(n) = s(n) * h(n)}$$

هذه العلاقة تدعى بعلاقة الانطواء المتقطع أو مجموع الانطواء

إذا رغبنا في حساب خرج الجملة LTIعند لحظة زمنية ، عندها وبالعودة لعلاقة الانطواء المتقطع نحصل على:

$$y(n_o)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).h(n_o-k)$$

٢- استجابة الجملة LTI المقطعة زمنياً على تتابع دخل اختياري: وجدنا حساب خرج الجملة LTIعند لحظة زمنية ، عندها وبالعودة لعلاقة الانطواء المتقطع

$$y(n_o)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).h(n_o-k)$$

نلاحظ أولاً أن متحول المجموع هو k وأن تتابع الدخل وتتابع الاستجابة الومضي هي توابع لـ k، ونلاحظ ثانياً أن التتابعين $s(k)$ و $h(n_0-k)$ تضرب بعضها لتشكل تتابع جداء $v_n(k)$.

إن عينة الخرج $y(n_0)$ من أجل الإزاحة n_0 تعبر ببساطة عن مجموع كافة قيم تتابع الجداء من أجل كل قيم k التي تتقاطع فيها $s(k)$ مع $h(n_0-k)$.

ملاحظة: خطوات الانطواء المتقطع كما الانطواء التشابهي:

١) تبديل المتحول n بـ k في التتابعات $s(n)$ و $h(n)$.

٢) الطي: إنشاء التتابع $h(-k)$ والذي يعبرعن المعكوس الزمني للتتابع $h(k)$.

٣) الإزاحة: إزاحة التتابع $h(-k)$ بمقدار n_0 نحو اليمين إذا كانت موجبة ونحو اليسار إذا كانت سالبة.

٤) الجداء: جداء $s(k)$ بـ $h(n_0-k)$ للحصول على تتابع الجداء: $v_{n_o}(k)=s(k)\cdot h(n_0-k)$

٥) الجمع: جمع قيم تتابع الجداء $v_{n_o}(k)$ للحصول على قيم الخرج عند اللحظة الزمنية $n=n_0$.

أو

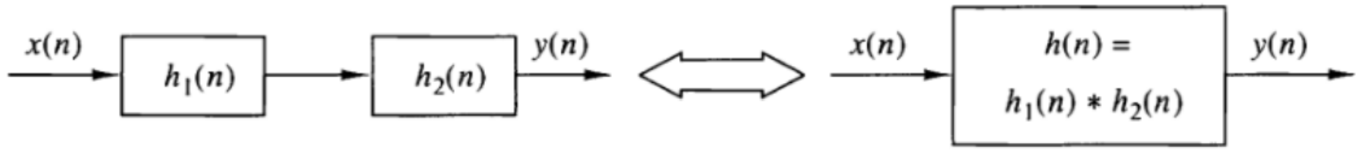
٦) للحصول على قيم الخرج من أجل قيم زمنية أخرى نعيد الخطوات السابقة بدءاً من خطوة الحساب الثالثة حيث يعاد الحساب من أجل قيم إنزياح زمني جديدة وهكذا حتى يتم الحساب من أجل كافة قيم الإزاحة الزمنية $-\infty < n < +\infty$.

إن خواص الانطواء المتقطع مطابقة تماماً لخواص الانطواء التشابهي أي أنه:

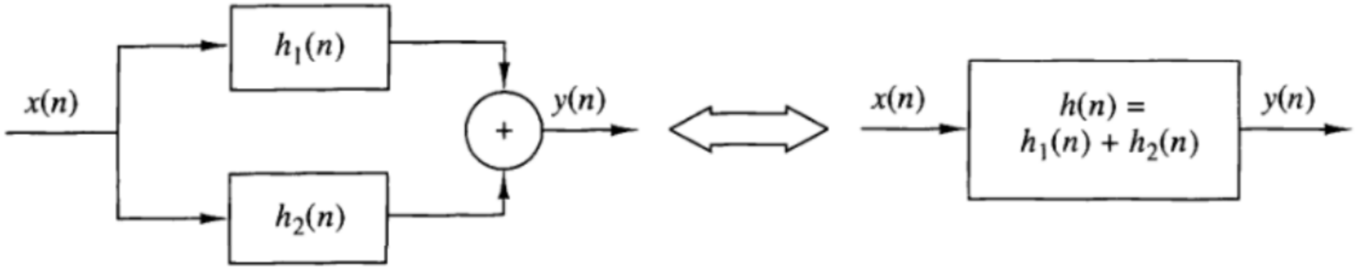
- تبديلي: $s(n) * h(n) = h(n) * s(n)$
- توزيعي على الجمع: $s(n) * [s_1(n) + s_2(n)] = h(n) * s_1(n) + h(n) * s_2(n)$
- تجميعي: $[s_1(n) * s_2(n)] * s_3(n) = s_1(n) * [s_2(n) * s_3(n)]$
- العنصر الحيادي هو $\delta(n)$ تابع الومضة الواحدية، أي: $\delta(n) * s(n) = s(n)$

استناداً إلى خواص الانطواء نشير هنا أيضاً إلى أن:

١- تتابع الاستجابة النبضي للجملة المكافئة لعدة جمل مربوطة تسلسلياً يساوي ناتج انطواء تتابعات استجاباتها النبضية.



٢- تتابع الاستجابة النبضي المكافئ لربط عدة جمل على التفرع يساوي مجموع تتابعات استجاباتها النبضية.



مثال: ليكن لدينا تتابع الاستجابة النبضي لجملة LTI المعرف كما يلي: h(n) = { 1 ,2 , 3 , -1 }

والذي يمكن أن نعبر عنه كما يلي: $h(n)=\delta(n+1)+2\,\delta(n)+3\,\delta(n-1)-\delta(n-2)$

المطلوب: تحديد استجابة الجملة لدى تطبيق إشارة الدخل s(n) المعرفة كما يأتي عليها: s(n) = { 1 , 2 , 3 , 1 }

الحل: يمكن حل التمرين بطريقة الانطواء كما رأينا سابقا ولكن طويلة جدا لذلك هناك طريقة أخرى باستخدام إمكانية التعبير عن أي تتابع بشكل مجموع تتابع ومضات موزونة وكذلك باستخدام خاصية الانطواء مع الومضة الواحدية.
حيث يعتبر $\delta(n)$ عنصر حيادي واعتبار أن ناتج انطواء أي تتابع إشارة مع $\delta(n-k)$ يساوي تتابع الإشارة نفسه بعد إزاحتها نحو اليمين بمقدار k.

$$h(n)=\delta(n+1)+2\delta(n)+\delta(n-1)-\delta(n-2)$$

$$s(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)+\delta(n-3)$$

$$y(n)=s(n)*h(n)=\delta(n+1)+4\delta(n)+8\delta(n-1)+8\delta(n-2)+3\delta(n-3)-2\delta(n-4)-\delta(n-5)$$

ويمكن أن نعبر عن هذه النتيجة كما يلي: y(n) = { +1 , 4 , 8 , 8 , 3 , -2 , -1 }

٣- ترابط الاشارات المقطعة زمنيا: Correlation of Discrete Time Signals (يشبه الانطواء بوجود اشارتي دخل)

-- عبارة عن علاقة رياضية تمثل درجة التشابه بين اشارتي دخل، بحيث تعبر اشارة الخرج الناتجة عن مدى تشابه أو تطابق اشارتي الدخل (يحدد العلاقة بين المتغيرات اللاحقة والسابقة للإشارة) ونميز نوعين:

١- الترابط الذاتي (Auto correlation): يكون كل من تتابعي الدخل متساويين تماما ويعطى بالعلاقة الاتية:

$$r_{SS}(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).s(n+k), \quad n=0,\pm1,\pm2...$$

٢- الترابط التصالبي(Cross correlation):يكون كل من تتابعي الدخل مختلفين تماما ويعطى بالعلاقة الاتية:

$$r_{Sh}(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).h(n+k)$$

$$r_{hS}(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).s(n+k)=r_{Sh}(-n)$$

أمثلة

١- أوجد تتابع الترابط الذاتي للتتابع: $X(n)= \{-1, \mathbf{2}, 1\}$

الحل:

		-1	2	1		
		-1	2	1		
		1	4	1		

6

		-1	2	1		
			-1	2	1	
			-2	2		

0

		-1	2	1		
				-1	2	1
				-1		

-1

		-1	2	1		
	-1	2	1			
		-2	2			

0

		-1	2	1		
-1	2	1				
		-1				

-1

$r_{XX}(n)= \{..,0, -1, 0, \mathbf{6}, 0, -1, 0, ...\}$

١- أوجد تتابع الترابط التصالبي للتتابعين:

$X(n)= \{-3, 2, -1, 1\}$, $Y(n)= \{-1, 0, -3, 2\}$

الحل:

			-3	2	-1	1			
			-1	0	-3	2			
			3	0	3	2			

8

			-3	2	-1	1			
				-1	0	-3	2		
				-2	0	-3			

-5

			-3	2	-1	1			
					-1	0	-3	2	
					1	0			

1

			-3	2	-1	1			
						-1	0	-3	2
						-1			

-1

			-3	2	-1	1			
		-1	0	-3	2				
			0	-6	-2				

-8

			-3	2	-1	1			
	-1	0	-3	2					
			9	4					

13

			-3	2	-1	1			
-1	0	-3	2						
			-6						

-6

$r_{XY}(n)= \{-1,1, -5, \mathbf{8}, -8, 13, -6\}$

التحليل الترددي للجمل والإشارات المقطعة زمنياً

٣- جمل LTI السببية Causal LTI – Systems:

إن الجملة LTI السببية أو الشرطية هي الجملة التي تكون قيم استجابتها النبضية معدومة من أجل قيم n السالبة أي: $h(n)=0 \quad for \quad n<0$

وبناء عليه نعبر عن تتابع خرج جملة LTI السببية كالآتي: $y(n)=\sum_{k=0}^{+\infty} h(k).s(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n} s(k).h(n-k)$

وإذا كانت تتابع الدخل للجملة LTIالسببية سببي أيضاً أي: $s(n)=0 \quad for \quad n<0$

عندها نعبر عن علاقات الانطواء في هذه الحالة للحصول على تتابع الخرج كالآتي: $y(n)=\sum_{k=0}^{n} s(k).h(n-k) \qquad y(n)=\sum_{k=0}^{n} h(k).s(n-k)$

نلاحظ: أنه من أجل $n\geq 0$ أن حدود المجموع في العلاقتين السابقتين متطابقة. بما أن $h(k)$ و $s(k)$ سببية فمن الطبيعي أن يكون $y(n)$ معدوماً من أجل $n<0$. إن تتابع الخرج أو استجابة الجملة الشرطية على دخل شرطي يكون أيضاً شرطي أي: $y(n)=0 \quad for \quad n<0$

مثال: حدد استجابة الجملة LTIذات تتابع الاستجابة الومضي الآتي: $h(n)=u(n)$ وذلك إذا كانت تتابع الدخل $s(n)=a^n \cdot u(n)$.

الحل: نلاحظ أن $s(n)$ و $h(n)$ سببيتان، لذا يمكن تطبيق العلاقة السابقة من أجل تحديد تتابع الخرج $y(n)$.

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n} a^k=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}.u(n)$$

أي: $y(0)=1, \quad y(1)=1+a, \quad y(2)=1+a+a^2, \quad y(3)=1+a+a^2+a^3$

بشكل عام يكون:

$$y(m)=1+a+a^2+\ldots+a^{m-1}+a^m$$

التحليل الترددي للجمل والإشارات المقطعة زمنياً

٤- الجمل LTI ذات الاستجابة النبضية المحدودة FIR وغير المحدودة IIR:

-- بشكل عام تكون الجملة LTI باستجابة نبضية محدودة (FIR) Finite – Duration Impulse Response إذا كانت الاستجابة النبضية $h(n)$ تحوي قيم يمكن أن تكون مختلفة عن الصفر ضمن مجال قيم محدود لـ n وقيم صفرية خارج هذا المجال.

-- أما إذا كانت $h(n)$ بقيم غير صفرية من أجل قيم n اللامحدودة عندها تكون الجملة LTI المقابلة باستجابة ومضية غير محدودة Infinite – Duration Impulse Response (IIR)

== إذا كانت الجملة LTI سببية عندها يتحقق بالنسبة للجملة FIR ما يأتي:

$$h(n)=0 \qquad for \qquad n<0 \quad and \quad n\geq M$$

ويصبح شكل علاقة الانطواء لمثل هذه الجمل كالآتي:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M-1} h(k).s(n-k)$$

إذا كانت إشارة الدخل غير محدودة زمنياً، أي أن الجملة FIR السببية تحوي ذاكرة محدودة بطول M

أذا: لدى تحقيق الجمل FIR باستخدام علاقة الانطواء نحتاج إلى عدد محدود من عناصر الجمع والضرب بالإضافة إلى العدد المحدود من عناصر التأخير (مواقع الذاكرة).

٤- الجمل LTI ذات الاستجابة النبضية المحدودة FIR وغير المحدودة IIR:

== بالمقابل يمكن التعبير عن علاقة الانطواء للجمل IIR السببية كالآتي: $y(n)=\sum_{k=0}^{+\infty} h(k).s(n-k)$

إذا كانت إشارة الدخل غير محدودة زمنياً، بالنتيجة فإن جمل IIR تكون بذاكرة غير محدودة.

اذا: لدى تحقيق الجمل IIR باستخدام علاقة الانطواء فأن المبدأ المعتمد في إجراء الانطواء يعتبر مستحيلاً نظراً لحاجتنا إلى عدد غير محدود من عناصر الجمع والضرب وعناصر التأخير (مواقع الذاكرة). لذا يعتمد مبدأ آخر في وصف الجمل IIR ويمكن من التحقيق العملي.

يتمثل هذا المبدأ في الوصف بما يدعى بمعادلات الفروق من الشكل: $y(n) = f\left[y(n-k),\ s(n),\ s(n-k)\right]$

٥- استجابة الخطوة للجملة LTI:

الاستجابة النبضية للجملة LTI تلعب الدور الأساسي في تحليل هذه الجمل إلا أنه من المفيد أحياناً التعرف على استجابة الخطوة لهذه الجملة أي عندما يكون الدخل عبارة عن تتابع الخطوة الواحدية: $s(n)=u(n)$

في هذه الحالة يعطى الخرج كالآتي: $y_u(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).u(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n} h(k)=h(n)+\sum_{k=-\infty}^{n-1} h(k)$

هكذا يمكن أن نعبر عن $y_u(n)$ استجابة الجملة LTI على تتابع الخطوة الواحدية كالآتي: $y_u(n)=h(n)+y_u(n-1)$

ومنه تصبح الاستجابة النبضية كالآتي: $\Rightarrow\ h(n)=y_u(n)-y_u(n-1)$

هل تذكر هذه العلاقة (بالمشتقات الجزئية) الفرق بين القيمة اللاحقة والسابقة

التحليل الترددي للجمل والإشارات المقطعة زمنياً

٥- استجابة الخطوة للجملة LTI:

وجدنا أن الاستجابة تغطى بالمعادلة: $h(n)=y_u(n)-y_u(n-1)$

وبناء عليه يمكن التعبيرعن خرج أي جملة LTI عند تطبيق $s(n)$ على دخلها كالآتي:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).[\,y_u(n-k)-y_u(n-k-1)\,]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).\ y_u(n-k)\ -\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).\ y_u(n-k-1)$$

نعبرعن انطواء الدخل $s(n)$ مع استجابة الجملة LTI على تتابع الخطوة الواحدية $y_u(n)$ كالآتي:

$$y_s(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).\ y_u(n-k)$$

وبالتالي فإن الخرج $y(n)$ يتم التعبير عنه كالآتي:

$$y(n)=y_s(n)-\ y_s(n-1)$$

٦- الجمل المقطعة زمنياً الموصوفة بوساطة المعادلات التفاضلية:

-- بحثنا حتى الآن في الجمل LTI الموصوفة بوساطة استجابتها النبضية وقد وجدنا أن معرفة الاستجابة تسمح لنا بتجديد الخرج للجملة من أجل أي تتابع دخل مقطع معطى بوساطة مجموع الانطواء.

-- الجملة IIR فإن تحقيقها العملي كما أشرنا سابقاً بوساطة الانطواء يعتبر مستحيلاً وهذا واضح لأنها تتطلب عدداً غير محدود من مو اقع الذاكرة والجوامع والضوارب.

-- هذه العائلة من الجمل المقطعة زمنيا توصف عادة بوساطة المعادلات التفاضلية. وتُعدُّ هذه العائلة أو المجموعة الفرعية من الجمل IIR مفيدة جداً في كثيرمن التطبيقات العملية المتضمنة تنفيذ المرشحات الرقمية وتمثيل الظواهر الفيزيائية والجمل الفيزيائية.

٧- الجمل العودية والجمل غير العودية: Recursive and Nonrecursive Discrete Time Systems

صيغة مجموع الانطواء تعبر عن خرج الجملة LTI بشكل واضح اعتماداً على إشارة الدخل فقط. هناك كثير من الجمل حيث يكون ضرورياً التعبير عن الخرج بدلالة قيم الدخل الآنية والسابقة و أيضاً بدلالة قيم الخرج السابقة.

مثال: لنفترض أننا نرغب في حساب المتوسط التراكمي لإشارة ما *s(n)* في المجال والمعرف كالآتي: $0 \le k \le n$

$$y(n) = \frac{1}{n+1} . \sum_{k=0}^{n} s(k) \;\; ; \;\; n = 0, 1, \ldots . \;\; \rightarrow \;\; y(n-1) = \frac{1}{n} . \sum_{k=0}^{n-1} s(k) \;\; \rightarrow \;\; \sum_{k=0}^{n-1} s(k) = n . y(n-1)$$

وكما هو واضح في العلاقة السابقة يتطلب حساب $y(n)$ تخزين كل عينات الدخل $s(n)$ من أجل $0 \le k \le n$، ونظراً لأن n تزداد فمن الطبيعي أن الذاكرة المطلوبة ستكبر خطياً مع الزمن وسيكون توجهنا الآن باستخدام العينة السابقة للخرج $y(n-1)$ أو استخدام معادلة الفروق وذلك لتجاوز المشكلة، بالفعل وبوساطة بعض الإجراءات البسيطة على العلاقات السابقة نحصل على الآتي:

$$(n+1) . y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} s(k) + s(n) = n . y(n-1) + s(n)$$

$$\rightarrow \;\; y(n) = \frac{n}{n+1} . y(n-1) + \frac{1}{n+1} . s(n)$$

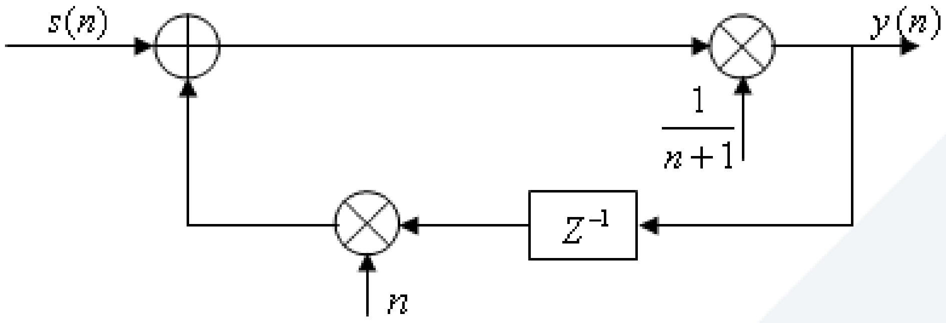
٧- الجمل العودية والجمل غير العودية: Recursive and Nonrecursive Discrete Time Systems

نابع حل المثال وجدنا العلاقة النهائية الاتية :

$$\rightarrow \; y(n) = \frac{n}{n+1}.y(n-1) + \frac{1}{n+1}.s(n)$$

وهي تمثل معادلة الفروق الزمنية (معاملات تابعة للزمن) يمكن تحقيقها وفق المخطط المبين.

إذا يتطلب حساب $y(n)$ وفق العلاقة السابقة إلى ضاربين وجامع وموقع ذاكرة واحد كما هو مبين في الشكل الآتي:



لنفرض أننا نبدأ الحساب في العلاقة السابقة من أجل ***n=0*** فصاعداً حيث نحصل:

$$y(0)=s(0)$$

$$y(1)=\frac{1}{2}y(0)+\frac{1}{2}s(1)=\frac{1}{2}s(0)+\frac{1}{2}s(1)=\frac{1}{2}[s(0)+s(1)]$$

$$y(2)=\frac{2}{3}y(1)+\frac{1}{3}s(2)=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}s(0)+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}s(1)+\frac{1}{3}s(2)=\frac{1}{3}s(0)+\frac{1}{3}s(1)+\frac{1}{3}s(2)$$

الجملة السابقة في كل قيمة للخرج تعتمد على عينة الخرج السابقة وعينة الدخل الآنية ويمكن أن نعتمد أي قيمة للخرج على قيم عينات الخرج السابقة وقيمة عينة الدخل الآنية والعينات السابقة للدخل.

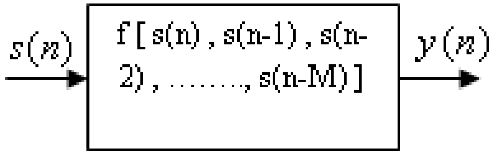
وهكذا حتى نصل لقيمة الخرج $y(n)$ عند لحظة زمنية ما ولتكن $n=n_0$:

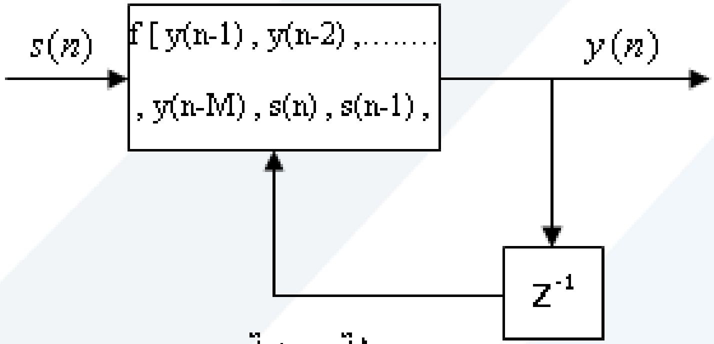
$$y(n_o)=\frac{n_o}{n_o+1}.y(n_o-1)+\frac{1}{n_o+1}.s(n_o)$$

٧- الجمل العودية والجمل غير العودية: Recursive and Nonrecursive Discrete Time Systems

-- تكون الجملة عودية إذا كان الخرج $y(n)$ عند الزمن *n* يعتمد على أي عدد من قيم الخرج السابقة: $y(n-1),\ y(n-2), \ldots\ldots\ldots$ عند لحظات زمنية سابقة: $n-1,\ n-2, \ldots\ldots\ldots$ وعلى قيمة الدخل الآنية.

-- الجمل غير العودية *Nonrecursive Discrete Systems* إذا كان الخرج $y(n)$ يعتمد فقط على قيمة الدخل الراهنة $s(n)$ والقيم السابقة للدخل فقط





يوضح الشكل الآتي بشكل مبسط الفرق بين الجملة العودية وغير العودية السببية.

جملة غير عودية

جملة عودية

$$y(n) = f\left[\,s(n), s(n-1), s(n-2),\ \ldots\ , s(n-M)\right]$$

$$y(n) = f\left[y(n-1), y(n-2), \ldots, y(n-M), s(n), s(n-1),\ \ldots\ , s(n-M)\right]$$

نلاحظ أن الفرق الرئيسي بين الجملتين هو في وجود حلقة التغذية العكسية *feed back loop* في الجملة العودية، حيث يجب أن تحوي هذه الحلقة عنصر تأخيرزمني واحدي على الأقل.

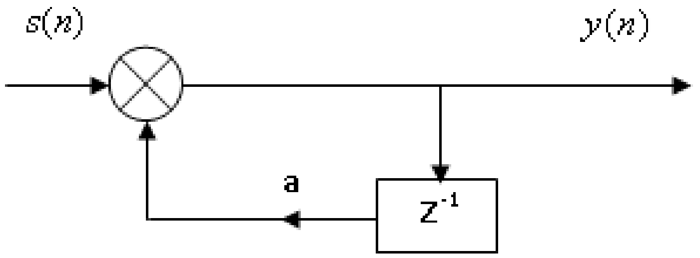
وصف الجمل LTI بوساطة معادلات الفروق ذات العوامل الثابتة

سنهتم بالجمل الخطية الثابتة مع الزمن الموصوفة بعلاقة خرج – دخل تدعى بمعادلة الفروق ذات المعاملات الثابتة. ولإظهار الأفكار الأساسية لهذه الطريقة، نأخذ جملة عودية بسيطة موصوفة بوساطة معادلة فروق من الترتيب الأول الاتية:

$$y(n) = a \cdot y(n-1) + s(n)$$

a:عبارة عن ثابت.

إن هذه المعادلة هي معادلة فروق من الترتيب الأول، وتحقيق الجملة السابقة مبين في الشكل الآتي:



نلاحظ من معادلة الفروق السابقة أن الثابت (a)غير متعلق بالزمن، نفترض الآن تطبيق تتابع إشارة الدخل $s(n)$ على الجملة من أجل $n \geq 0$ و نحسب الخرج $y(n)$ من أجل أزمان متلاحقة، وهكذا نحصل على الآتي:

$$y(0) = a\,y(-1) + s(0)$$

$$y(1) = a\,y(0) + s(1) = a^2\,y(-1) + a\,s(0) + s(1)$$

$$y(2) = a\,y(1) + s(2) = a^3\,y(-1) + a^2\,s(0) + a\,s(1) + s(2)$$

. .

$$y(n) = a\,y(n-1) + s(n) = a^{n+1}\,y(-1) + a^n\,s(0) + a^{n-1}\,s(1) + \dots\dots\dots + a\,s(n-1) + s(n) \Rightarrow$$

وبشكل مدمج وملخص توصف الاستجابة كالآتي:

$$y(n) = a^{n+1}.y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k.s(n-k)$$

هذه العلاقة تحوي جزأين: الجزء الأول الذي يحوي الحد $y(-1)$ يشكل الشرط المبدئي للجملة، الجزء الثاني فيشكل استجابة الجملة على الدخل $s(n)$.

وصف الجمل LTI بوساطة معادلات الفروق ذات العوامل الثابتة

$$y(n)=a^{n+1}.y(-1)+\sum_{k=0}^{n}a^{k}.s(n-k)$$

مناقشة: ١- إذا كانت الجملة باقية في الحالة الابتدائية، أي أن حل الجملة يبدأ عند *n=0* بمعنى آخريكون مخرجها معدوماً من أجل $n \geq 0$ وبالتالي: $y(-1)=0$ وتكون الجملة عندها ذات حلول بدائية صفرية ويدعى خرج مثل هذه الجملة بالاستجابة صفرية الحالة ***Zero-State Response*** أو الاستجابة القسرية ***Forced Response*** ويرمز لهذه الاستجابة بـ $y_{zs}(n)$. وتعطى الاستجابة القسرية لهذه الجملة بالشكل:

$$y_{zs}(n)=\sum_{k=0}^{n}a^{k}.s(n-k) \qquad n \geq 0$$

أن العلاقة السابقة هي عبارة عن انطواء للإشارة مع الاستجابة النبضية: $h(n)=a^{n}.u(n)$

أن الجملة الموصوفة بمعادلة فروق من الترتيب الأول واعتماداً على علاقة استجابتها النبضية بأنها سببية **Causal**

مناقشة: ٢- إذا كان $y(-1)\neq 0$ وكان $s(n)=0$ من أجل قيم n عندها تدعى هذه الجملة بالجملة ذات الاستجابة صفرية الدخل ***Zero-Input Response*** أو الاستجابة الحيادية ***Natural Response*** ويرمزلها بـ $y_{zi}(n)$.

- انطلاقاً من العلاقة العامة للخرج وبتعويض من أجل نحصل على: $y_{zi}=a^{n+1}\cdot y(-1),\ldots\ldots n \geq 0$

نلاحظ أن هذه الاستجابة لا تعتمد على الدخل إنما على الشروط البدائية للجملة وحالة الجملة الطبيعية وبهذا فإن هذه الاستجابة تعبرعن الجملة نفسها وتعرف بأنها الاستجابة الحرة **Free Response**.

إن الجملة الموصوفة بوساطة معادلة الفروق من الترتيب الأول تُعدُّ أبسط جملة عودية ممكنة في صنف عام من الجمل العودية التي يمكن وصفها بوساطة معادلات فروق خطية ذات عوامل ثابتة. الشكل العام لمعادلات مثل هذه الجمل يكون كالآتي:

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_{k}\,.\,y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_{k}\,.\,s(n-k) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N}a_{k}\,.\,y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}b_{k}\,.\,s(n-k) \qquad with \qquad a_{0}=1$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot s(n-k) \quad with \quad a_0 = 1$$

العدد الصحيح N يدعى بترتيب أو درجة معادلة الفرق أو ترتيب الجملة.

تعبر العلاقة السابقة عن خرج الجملة في الزمن n مباشرة كمجموع موزون للمخارج السابقة، $y(n-1), y(n-2), \dots\dots, y(n-N)$ فضلاً عن عينات إشارة الدخل السابقة والآنية.

تكون الجملة خطية إذا تحققت الشروط الثلاثة المبينة والجملة التي لا تحقق هذه الشروط هي جملة غير خطية.

١ - الاستجابة الكلية تساوي مجموع استجابة الحالة الصفرية واستجابة الدخل الصفري أي: $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$

٢ - تطبيق مبدأ التنضد على الاستجابة في الحالة الصفرية. (Zero – state linear).

3 - طبيق مبدأ التنضد على الاستجابة في الدخل الصفري. (Zero – input linear)

إن الاستجابة النبضية $h(n)$ كما سبق هي استجابة الجملة لدى تطبيق الومضة الواحدية $\delta(n)$ عليها.

في حالة الجملة العودية فإن $h(n)$ هي ببساطة الاستجابة القسرية عندما يكون الدخل: $s(n) = \delta(n)$ على سبيل المثال: في حالة الجملة *LTI* العودية من الترتيب الأول فإن الاستجابة القسرية تكون كالآتي:

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot s(n-k)$$

فإذا عوضنا $s(n)$ بـ $\delta(n)$ نحصل على:

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot \delta(n-k) = a^n \cdot \quad ; \quad n \geq 0$$

أي يكون: $h(n) = a^n \cdot u(n)$ وهذا يطابق ما حصلنا عليه سابقاً.

في الحالة العامة يكون: $n \geq 0 \quad ; \quad y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k) \cdot s(n-k)$ فإذا كان: $s(n) = \delta(n)$ نحصل على: $y_{zs}(n) = h(n)$

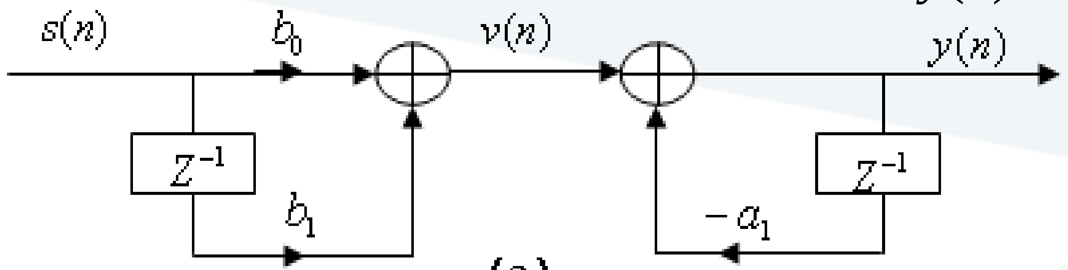
- بنيات تحقيق الجمل LTI:

تحقيق الجمل LTIالموصوفة بوساطة معادلات الفروق الخطية ذات العوامل الثابتة. في البداية نأخذ الجملة LTI ذات الترتيب الأول:

$$y(n) = -a_1 \cdot y(n-1) + b_0 \cdot s(n) + b_1 \cdot s(n-1)$$

١- التحقيق بالشكل المباشرالأول *Direct Form I Structure*:

يستعمل عنصرا تأخير منفصلين الأول لعينات إشارة الدخل والثاني لعينات إشارة الخرج وفق الشكل المبين:



(a)

يمكن تجزئة الجملة السابقة إلى جملتين: الأولى غيرعودية موصوفة بالعلاقة:

والجملة الثانية جملة عودية موصوفة العلاقة:

$$v(n) = b_0 \cdot s(n) + b_1 \cdot s(n-1)$$

$$y(n) = -a_1 \cdot y(n-1) + v(n)$$

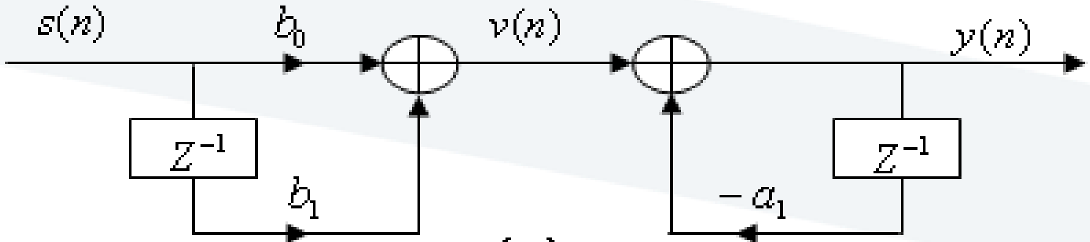
اعتماداً على الخاصية التبادلية للانطواء: $h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n)$

وهذا يعني إمكانية تغيير ترتيب الجملة الكلية داخلياً بحيث نصنع الجملة العودية أولا وتليها الجملة غير العودية، يمكن أن نرتب الجملة كما في الشكل (b) حيث نحصل على علاقات الفروق الآتية:

$$\omega(n) = -a_1\, \omega(n-1) + s(n)$$

$$y(n) = b_o\, \omega(n) + b_1\, \omega(n-1)$$

- بنيات تحقيق الجمل LTI:



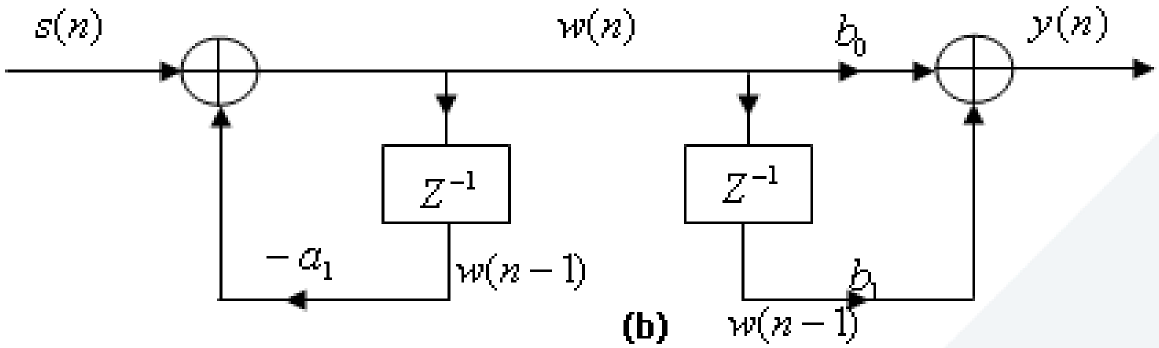
(a)

الشكل المباشر (a): $v(n) = b_0 \cdot s(n) + b_1 \cdot s(n-1)$

الشكل (b): ترتيب الجملة الكلية داخلياً بحيث نصنع الجملة العودية أولا وتليها الجملة غير العودية، يمكن أن نرتب الجملة وفق:

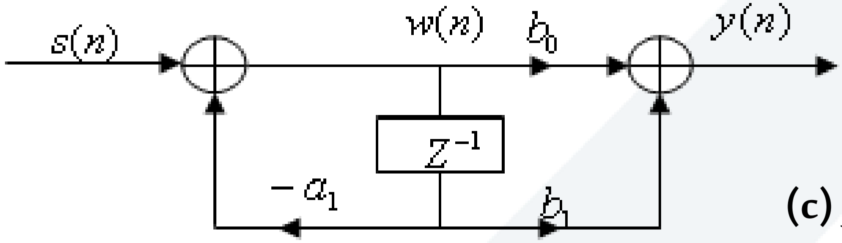
$$\omega(n) = -a_1\, \omega(n-1) + s(n)$$

$$y(n) = b_o\, \omega(n) + b_1\, \omega(n-1)$$



(b)

٢- نلاحظ وجود عنصري تأخير منفصلين لهما الدخل $\omega(n)$ نفسه والخرج نفسه $\omega(n-1)$. لهذا يمكن أن نستعيض عنهما بعنصر تأخير وحيد، وبذلك يصبح شكل تحقيق الجملة كما في الشكل (c) يدعى هذه الشكل للبناء بشكل البناء المباشر الثاني *Direct Form II Structure*



(c)

بمقارنة شكل التحقيق المباشر (a) مع المباشر(c) نجد أنه قد تمكنا في الثانية من توفير عنصر تأخير واحد وبالتالي فقد حققنا وفرفي حجم الذاكرة المطلوبة، يستخدم الشكل المباشر (c) بشكل أوسع في التطبيقات العملية كالمرشحات الرقمية نظراً لاختصار عدد عناصر التأخير الزمني.

بنيات تحقيق الجمل LTI:

تعميم النتيجة : هذه البنى يمكن أن تحقق لجمل LTI العودية والموصوفة بمعادلة الفروق الآتية:

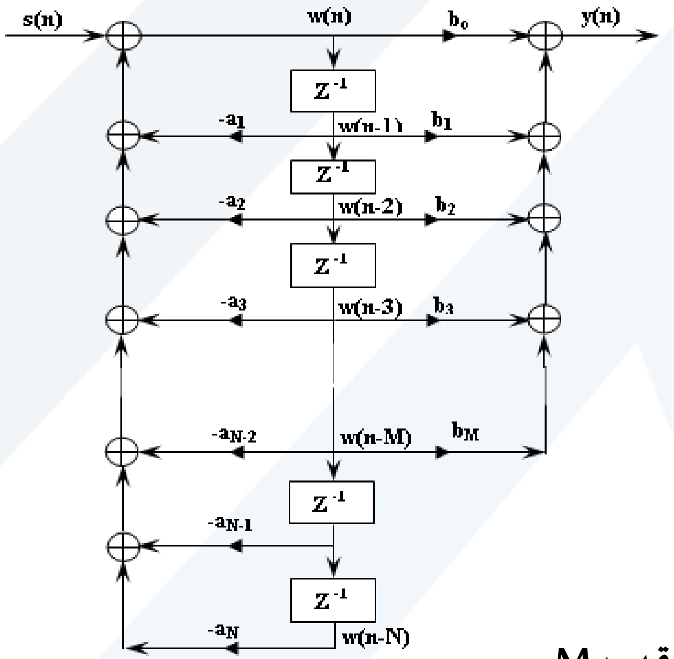
$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_k\,.y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k\,.s(n-k)$$

وكما بينا انه يمكن أن نجزئ هذه الجملة المحققة إلى جملتين مربوطتين تسلسلياً. الأولى غير عودية نصفها بالعلاقة:

$$v(n)=\sum_{k=0}^{M}a_k\,.s(n-k)$$

والثانية عودية نصفها بالعلاقة:

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_k\,.y(n-k)+v(n)$$



الشكل المباشر C من أجل:
.$N>M(\,M=N-2\,)$

نحسب التتابع $\omega\,(n)$ وفق العلاقة:

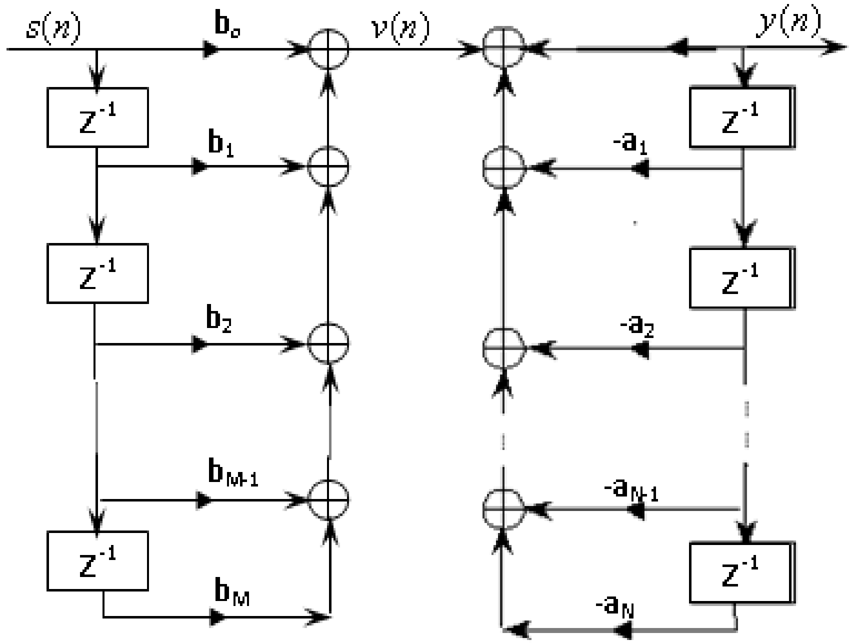
$$w(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_k\,.w(n-k)+s(n)$$

وبالنتيجة يحسب الخرج من العلاقة الآتية:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k\,.w(n-k)$$

وبهذا يتحقق اختصاراً لعدد عناصر التأخير قدره M

والممثلة في الشكل الاتي الذي يدعى ببنية التحقيق من الشكل المباشر a وكما هو مبين يتطلب هذا التحقيق *M+N* عنصر تأخير و*M+N+1* عنصر جداء.



الشكل المباشر a.

- بنيات تحقيق الجمل LTI:

حالات خاصة:

١- من أجل $a_k = 0$ حيث $(k = 1, 2, 3, ..., N)$ عندها تصبح علاقات التحويل (علاقة الدخل – الخرج) للجملة كالآتي:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k . s(n-k)$$

وتكون الجملة عندها من النموذج غير عودي، وتكون الاستجابة النبضية $h(n)$ لهذه الجملة كالآتي:

$$h(n) = \begin{cases} b_k & 0 \le k \le M \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

٢- من أجل M = 0 في العلاقة العامة لجملة LTI عندها تصبح الجملة LTI جملة عودية بحتة وتوصف هذه الجملة الناتجة بعلاقة الفروق الآتية:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k . y(n-k) + b_o . s(n)$$

في هذه الحالة يكون خرج الجملة تركيب خطي مثقل لـ Nمخرج ماضي ودخل آني.

مثال: لدينا الجملة LTI موصوفة بمعادلة الفروق الآتية:

$$y(n) = -a_1 . y(n-1) - a_2 . y(n-2) + b_o . s(n) + b_1 . s(n-1) + b_2 . s(n-2)$$

والمطلوب: ١- ما هي قيم M , N للحصول على معادلة الفروق المعبرة عن هذه الجملة انطلاقاً من العلاقة العامة.

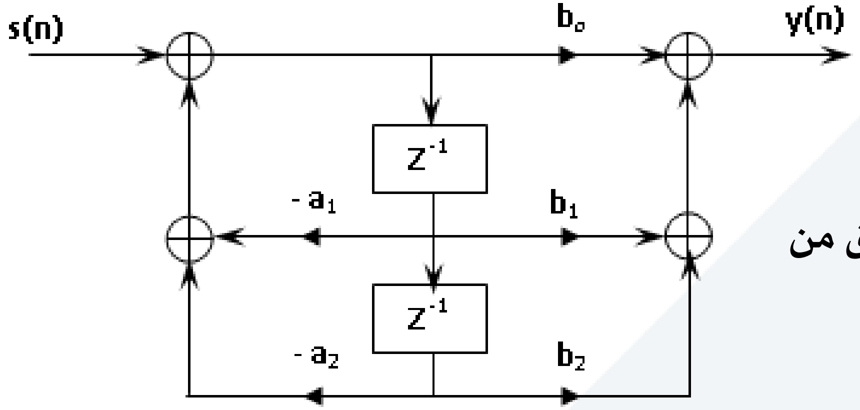
٢- ارسم البنية من الشكل المباشر C لتحقيق هذه الجملة.

٣- إذا كان $a_1 = a_2 = 0$ اكتب معادلة الفروق الناتجة وارسم بنية التحقيق من الشكل المباشر II هل الجملة الناتجة عودية أم غيرعودية؟

٤- إذا كان $b_1 = b_2 = 0$ اكتب معادلة الفروق المميزة للجملة الناتجة. وارسم بنية التحقيق من الشكل المباشر الثاني II، هل الجملة عودية أم عودية بحتة أم غيرعودية؟.

الحل: ١- بالمقارنة مع معادلة الفروق العامة نجد أن $N=2$، $M=2$.

٢- رسم البنية من الشكل المباشر C لتحقيق هذه الجملة.



(a)