جامعة المنارة الخاصة

كلية الهندسة

هندسة الروبوتيك والانظمة الذكية

الإشارات والأنظمة

Signals and Systems

التحليل الترددي للإشارات المقطعة زمنياً

مدرس المقرر

د. السموءل صالح

الفصل الدراسي الثاني

المحاضرة السابعة

التحليل الترددي للإشارات المقطعة زمنياً

تحويل فورييه للإشارات المقطعة زمنياً: يعطى تحويل فورييه للإشارات المقطعة محدودة القدرة s(n) كالآتي:

$$S(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n).e^{-j\omega n}$$

ويمثل هذا التحويل المحتوى الترددي للإشارة s(n) المقطعة، ويكون ذا الطيف دورياً بالدور 2π حيث يمثل الطيف $S(\omega)=S(\omega+2\pi k)$

الشرط الاساسي لوجود تحويل فورييه هو عندما تكون السلسلة في العلاقة السابقة متقاربة. وتتقارب هذه السلسلة فقط عندما يكون التتابع s(n) قابل للجمع بقيمه المطلقة، أي:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(n)| < \infty$$

لحساب التحويل العكسي: يعطى تتابع الإشارة s(n) انطلاقاً من طيف الإشارة على دورواحد بالعلاقة:

$$s(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} S(\omega).e^{j\omega n}\,d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} S(f).e^{j\omega n}\,df$$

وبذلك يصبح من الصحيح دائما كتابة:

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|s(n)|\right]^2 \geq \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|s(n)|^2 = E_s$$

التحليل الترددي للإشارات المقطعة زمنياً

طيف كثافة القدرة Energy Density Spectrum: تعطى قدرة الإشارة المقطعة زمنياً s(n) بالعلاقة:

$$E_s=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|s(n)|^2$$

يمكن التعبيرعن القدرة E_s بوساطة حدود مميزة الطيف $S(\omega)$ وفق:

$$E_s=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}s(n).s^*(n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}s(n).[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}S^*(\omega)e^{-j\omega n}\,d\omega]$$

لنبدل في ترتيب التكامل والمجموع في العلاقة السابقة نحصل على ما يلي:

$$E_s=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}S^*(\omega).[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}s(n).e^{-j\omega n}\,.\,d\omega\,]$$

$$E_s=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|S(\omega|^2\,.d\omega \Rightarrow$$

تمثل علاقة بارسيفال للإشارات المقطعة زمنياً غير الدورية، ذات القدرة المحدودة.

$$E_s=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|s(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|S(\omega|^2\,.d\omega$$

وهو تابع دوري بقيم عقدية يمكن التعبيرعنه بالشكل:

$$S(\omega)=|S(\omega)|.e^{j\theta(\omega)}$$

إذا يعطى تابع كثافة طيف القدرة بالشكل:

$$G_{ss}(\omega)=|S(\omega)|^2$$

التحليل الترددي للإشارات المقطعة زمنياً

<u>مثال:</u>

حدد وارسم طيف كثافة القدرة للإشارة s(n):

$$s(n)=a^{n}.u(n) \qquad ; \quad -1<a<1 \qquad for\ \ a=\frac{1}{2}\ \ and\ \ a=-\frac{1}{2}$$

الحل:

بما أن طويلة a أصغر من الواحد $\{|a|<1\}$ فإن التتابع s(n) قابل للجمع وهذا ما يمكن تبيانه بتطبيق علاقة مجموع السلسلة الهندسية كالآتي:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|s(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty}|a|^{n} = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

وبالتالي فإن تحويل فورييه لـ s(n) موجود ونحصل عليه كالآتي:

$$S(\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}a^{n}.e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(a.e^{-j\omega})^{n}$$

وبما أن $|a.e^{-j\omega}|=|a|<1$ لذا يمكن استخدام علاقة المجموع كالآتي:

$$S(\omega)=\frac{1}{1-a\,e^{-j\omega}}$$

وبالتالي فأن طيف كثافة القدرة يعطى كما يلي:

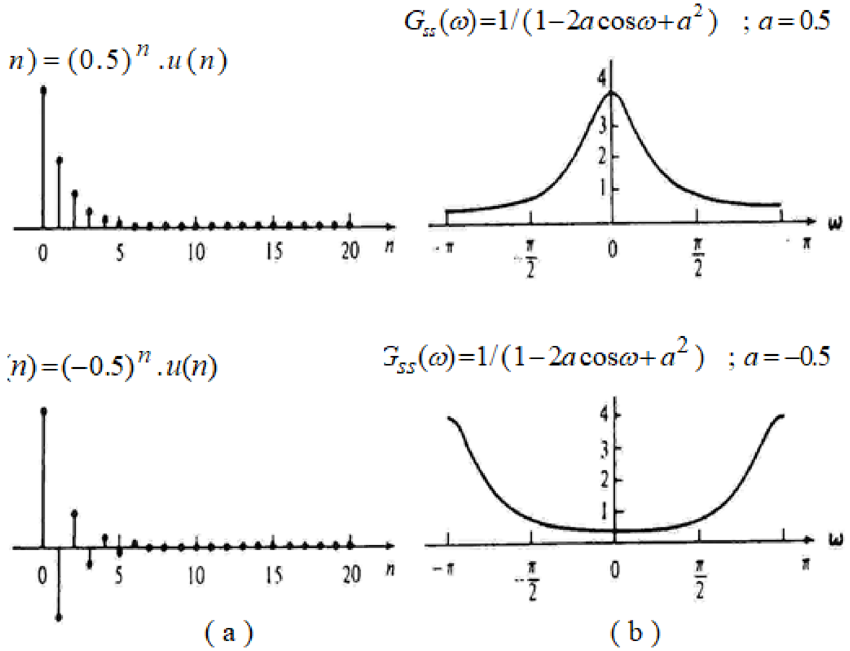
$$G_{SS}(\omega)=|S(\omega)|^{2}=S(\omega).S^{*}(\omega)$$

$$G_{SS}(\omega)=\frac{1}{(1-a\,e^{-j\omega})(1-a\,e^{j\omega})}$$

وبشكل مكافئ كالآتي:

$$G_{SS}(\omega)=\frac{1}{1-2a\cos\omega+a^{2}}$$

يبين الشكل تابعي الإشارة s(n) من أجل قيمتين مختلفتين لـ a وطيف كثافة القدرة الموافق لكل منهما.



b- طيف كثافة القدرة لكل منهما.

ملخص خصائص تحويل فورييه للإشارات المقطعة

Property	Time Domain	Frequency Domain
Notation	$x(n)$	$X(\omega)$
	$x_1(n)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(n)$	$X_2(\omega)$
Linearity	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Time shifting	$x(n-k)$	$e^{-j\omega k}X(\omega)$
Time reversal	$x(-n)$	$X(-\omega)$
Convolution	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Correlation	$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(-\omega)$
		$= X_1(\omega)X_2^*(\omega)$
		[if $x_2(n)$ is real]
Wiener–Khintchine theorem	$r_{xx}(l)$	$S_{xx}(\omega)$
Frequency shifting	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(\omega-\omega_0)$
Modulation	$x(n)\cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}X(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)$
Multiplication	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda$
Differentiation in		
the frequency domain	$nx(n)$	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Conjugation	$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
Parseval's theorem	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$	

عند تقطيع الطيف S(w) بمسافة ترددية متساوية $w_k=2\pi k/N$ ينتج:

$$S\left(\frac{2\pi k}{N}\right)=\sum_{n=0}^{L-1} s(n)\, e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} \quad ; k = 0,1,2,\dots, N-1$$

باعتبار $N \geq L$ ينتج:

N-point DFT
$$S(k)=\sum_{n=0}^{N-1} s(n)\, e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} \quad ; k = 0,1,2,\dots, N-1$$

N-point IDFT
$$s(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(k)\, e^{j2\pi k\frac{n}{N}} \quad ; n = 0,1,2,\dots, N-1$$

تحويل فورييه المتقطع كعمليات تحويل خطية

بفرض المعامل $w_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}}$ تصبح علاقتا تحويل فورييه المتقطع:

N-point DFT $$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)\, w_N^{kn} \quad ; k = 0,1,2, \dots, N-1$$

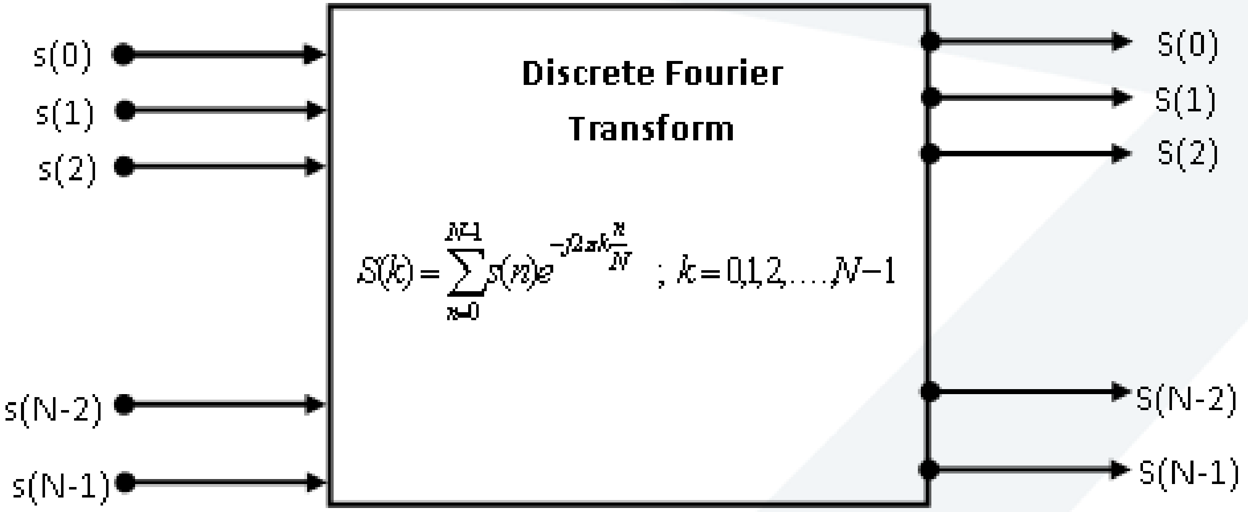
N-point IDFT $$s(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(k)\, w_N^{-kn} \quad ; n = 0,1,2, \dots, N-1$$

- إن حساب كل نقطة من التحويل يتطلب N عملية ضرب عقدية و N-1 عملية جمع عقدية
- إن حساب N نقطة للتحويل يتطلب N^2 عملية ضرب عقدية و N(N-1) عملية جمع عقدية

تعرض هذه العمليات عمليا كعمليات تحويل خطية على التتابعات S(k) and S(n) على التوالي

تحويل فورييه المتقطع

يبين الشكل تمثيلا تخطيطياً لتحويل فورييه المقطع لتتابع غيردوري كعملية معالجة لدخل متوازي وخرج متوازي.



يمكن تلخيص الصيغ الرياضية للتحويل DFT والتحويل IDFT كما يلي:

DFT

$$S(k)=\sum_{n=0}^{N-1} s(n)e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} \qquad k=0,1,2,\dots,N-1$$

IDFT

$$s(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k)e^{j2\pi k\frac{n}{N}} \qquad n=0,1,\dots,N-1$$

حساب التحويل DFT و IDFT باستخدام المصفوفات

تحويل فورييه السريع Fast Fourier Transform (FFT):

حساب التحويل DFT و IDFT باستخدام المصفوفات

من العلاقتين السابقتين وبفرض وجود المعامل W_N الذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

بذلك يمكن إعادة صياغة العلاقتين السابقتين لتحويل فورييه المقطع وعكسه وفق:

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$s(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k) W_N^{-kn} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

يمكن التعبيرعن تتابع الإشارة S(n) حيث n = 0 , 1 , 2 , ... , N-1 بشعاع ذي Nنقطة، N-Point vector

أي بوساطة مصفوفة ذات N سطروعامود واحد كما يلي:

$$\vec{s}_N = \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ s(N-1) \end{bmatrix}$$

كما يمكن أن نعبر عن تتابع العينات الترددية والتي هي ناتج تحويل فورييه المقطع للإشارة s(n) أي

بوساطة شعاع ذي Nنقطة أي بوساطة مصفوفة ذات Nسطروعامود واحد كالآتي:

$$\vec{S}_N = \begin{bmatrix} S(0) \\ S(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ S(N-1) \end{bmatrix}$$

حساب التحويل DFT و IDFT باستخدام المصفوفات

نأخذ $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ونعرف المصفوفة N × N الآتية:

$$\vec{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & . & . & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & . & . & W_N^{2(N-1)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & . & . & W_N^{(N-1(N-1))} \end{bmatrix}$$

بالاعتماد على التعاريف السابقة يمكن التعبير عن تحويل فورييه المقطع DFT بوساطة الشكل المصفوفي الآتي:

$$\vec{S}_N = \vec{W}_N \,.\, \vec{s}_N$$

تعرف W_N بمصفوفة التحويل الخطي . Linear Transformation Matrix نلاحظ أنها مصفوفة متناظرة وبمعرفة معكوس هذه المصفوفة يمكن التعبير عن تحويل فورييه المتقطع العكسي وفق:

$$\vec{s}_N = \vec{W}_N^{-1} \vec{S}_N \,.$$

But: $\overrightarrow{W_N^{-1}} = \frac{1}{N} . \overrightarrow{W_N^*}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{s_N} = \frac{1}{N} . \overrightarrow{W_N^*} . \overrightarrow{S_N}$