صناعة القرارات

الفصل السادس – تطبيقات 2

مثال 1

إذا كان لديك نوعين من المنتجات يحتاج المنتج الأول إلى ساعة عمل وساعتين تجميع، ويحتاج المنتج الثاني إلى ساعة عمل وساعة تجميع علمًا بأن المتاح من ساعات العمل هو ٦ ساعات والمتاح من ساعات التجميع هو ١٠ ساعات وأن ربح الوحدة الأولى ٣ ليرة، وربح الوحدة الثانية ٤ ليرة، وأن السوق لا يستوعب أكثر من ٤ وحدات من المنتج الثاني. والمطلوب صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أعظم ربح؟

الحل:

أولا :نقوم بعمل جدول كالتالي:

المنتجات / القيود	المنتج الأول $س_1$	المنتج الثاني $س_2$	المتاح (المتوفر)
عمل	١	١	≤ ٦
تجميع	٢	١	≤ ١٠
طلب السوق	—	ص	≤ ٤
الربح	٣	٤	

ملاحظة:

-إذا كان القرار تعظيم ربح وكانت الطاقة غير مشروطة نجعل المتراجحة أقل من أو يساوي <= .

إذا كان القرار تقليل تكلفة وكانت الطاقة غير مشروطة نجعل المتراجحة أكبر من أو يساوي =< .

ثانيًا :يكون نموذج البرمجة الخطية كالآتي

1- دالة الهدف ر↑ = $3س_1 + 4س_2$

2- القيود

- قيد العمل $1س_1 + 1س_2 <= 6$
- قيد التجميع $2س_1 + 1س_2 <= 10$
- قيد السوق $1س_2 <= 4$

3- قيد عدم السلبية ويعني الحل يجب أن يكون دائمًا في الربع الأول الموجب

مثال 2

نفرض أن شركة للنسيج تنتج ثلاثة أنواع من الثياب وتمر بمراحل كما في الجدول التالي:

العمليات / النوع	القص	الحياكة	الكي	الربح
كبير	٢	٣	٢	٦٠
وسط	٢	٤	٣	٩٠
صغير	١	٢	١	٥٥
الزمن	١٢٠	١٨٠	١٥٠	

والمطلوب إيجاد النموذج الخطي؟

الحل:

نفرض أن المنتج الكبير س ١ ، والمنتج الوسط س ٢ ، والمنتج الصغير س ٣

دالة الهدف ه (س↑) = $60 س_1 + 90 س_2 + 55س_3$

وحيث أن المتاح من الزمن غير مشروط ونحن نريد تعظيم ربح، لذلك نستخدم أصغر من أو يساوي =>

القيود:

$2 س_1 + 2س_2 + س_3 <= 120$ قيد القص

$3 س_1 + 4س_2 + 2س_3 <= 180$ قيد الحياكة

$2س_1 + 3س_2 + س_3 <= 150$ قيد الكي

قيد عدم السلبية : س ١ ، س ٢ ، س ٣ س >= صفر

مثال رقم 3

تقوم أحد المستشفيات بشراء خليط من الطعام $ط_1$ بسعر ٦٥ ليرة للكيلو الواحد وخليط آخر من الطعام $ط_2$ بسعر ٨٥ ليرة للكيلو. ويحتوي كل كيلو جرام من $ط_1$ ٢٥ وحدة فيتامين (أ) وعلى ٤٠ وحدة من فيتامين (ب)، كما يحتوي كل كيلو جرام من $ط_2$ على ٣٠ وحدة من فيتامين (أ) وعلى ٤٥ وحدة من فيتامين (ب) فإذا كانت حاجة المستشفى اليومية ٣٤٠٠ وحدة من فيتامين (أ) على الأكثر، و ٢٥٠٠ وحدة من فيتامين (ب) على الأقل. كما أنه لا يزيد عدد الكيلو ات من الطعام $ط_2$ على ٨٠ كيلو جرام. والمطلوب وضع البرنامج الخطي للمشكلة؟

الحل:

نفرض أن $ط_1 = س_1$ ، $ط_2 = س_2$

المنتج / القيد	$س_1$	$س_2$	المتاح
فيتامين (أ)	٢٥	٣٠	≤ ٣٤٠٠ على الأكثر
فيتامين (ب)	٤٠	٤٥	≥ ٢٥٠٠ على الأقل
		$س_2$	≤ ٨٠ لا يزيد
التكلفة أو سعر الشراء	٦٥	٨٥	

القيود:

25 $س_1$ + 30 $س_2$ <=3400 قيد الفيتامين(أ)

40 $س_1$ + 45 $س_2$ >= 2500 قيد الفيتامين (ب)

$س_2$ <= 80 قيد الطلب على س ٢

قيد عدم السلبية: س ١ ، س ٢ >= صفر

حل البرمجة الخطية بيانيا

خطوات الحل البياني

١ -يتم تحديد دالة الهدف على شكل معادلة رياضية تمثل المتغيرين للمشكلة المراد حلها.

٢ -يتم تحديد قيود المسألة على شكل متباينات.

٣ -يرسم محورين متعامدين، المحور الأفقي يمثل المتغير (س) والمحور العمودي يمثل المتغير (ص).

٤ -نرسم المستقيمات التي تحددها المتباينات ونحدد المنطقة المقبولة والمنطقة المرفوضة (تحديد منطقة الحل).

٥ -تحديد الحل الأمثل للبرنامج الخطي.

- تعني علامة > أن منطقة الحل على يمين أو أعلى الخط المستقيم .
- تعني علامة < أن منقطة الحل على يسار أو أسفل الخط المستقيم .
- إذا كانت جميع علامات المتباينات أو إشارات المتباينات أقل من أو يساوي <= تكون منطقة الحل محصورة بين تقاطع المستقيمات ونقطة الأصل.
- إذا كانت إشارات المتباينات تحتوي على أكبر من أو أقل من فإن منطقة الحل تكون أبعد من منطقة الأصل (0.0).

مثال 4

أوجد أكبر ربح ممكن إذا كانت دالة الهدف ه↑ = 15 س$_1$ + 20 س$_2$

طبقًا للآتي:

3 س$_1$ + 2 س$_2$ <= 240 (1)

س$_1$ + 2س$_2$ >= 160 (2)

س$_1$ <= 60 (3)

س$_1$ ، س$_2$ >= 0

الحل :

١ - نهمل دالة الهدف مؤقتًا.
٢ - نحول المتراجحات إلى معادلات.

القيد الأول

$٣س_١ + ٢س_٢ = ٢٤٠$

نفرض أن $س_١$ = صفر

$٣ \times ٠ + ٢س_٢ = ٢٤٠$

$٢س_٢ = ٢٤٠$

$\frac{٢}{٢}س_٢ = \frac{٢٤٠}{٢} = ١٢٠$

$س_٢ = ١٢٠$

المحور الصادي

$س_١ ، س_٢$

$(٠ ، ١٢٠)$

$٣س_١ + ٢س_٢ = ٢٤٠$

نفرض أن $س_٢$ = صفر

$٣س_١ + ٢ \times ٠ = ٢٤٠$

$٣س_١ = ٢٤٠$

$\frac{٣}{٣}س_١ = \frac{٢٤٠}{٣} = ٨٠$

$س_١ = ٨٠$

المحور السيني

$س_١ ، س_٢$

$(٨٠ ، ٠)$

القيد الثاني

$س_١ + ٢س_٢ = ١٦٠$

نفرض أن $س_١$ = صفر

$٠ + ٢س_٢ = ١٦٠$

$٢س_٢ = ١٦٠$

$\frac{٢}{٢}س_٢ = \frac{١٦٠}{٢} = ٨٠$

$س_٢ = ٨٠$

المحور الصادي

$س_١ ، س_٢$

$(٠ ، ٨٠)$

$س_١ + ٢س_٢ = ١٦٠$

نفرض أن $س_٢$ = صفر

$س_١ + ٢ \times ٠ = ١٦٠$

$س_١ = ١٦٠$

المحور السيني

$س_١ ، س_٢$

$(١٦٠ ، ٠)$

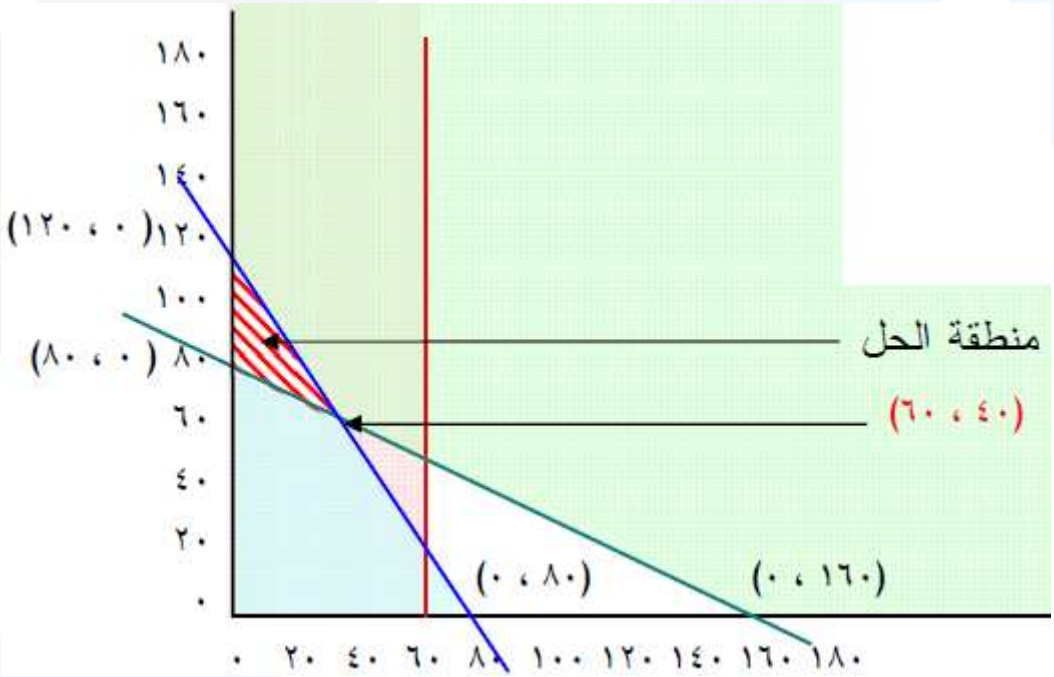
القيد الثالث $س_1 = 60$ **(0، 60)**

3 - الرسم البياني

$$240 = 2س_2 + 3س_1$$

$$160 = 2س_2 + س_1$$

$$60 = س_1$$



ولإيجاد نقطة الحل حسابيًا نوجد تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني باستخدام المحددات، كما يمكن إيجادها بطريقة الحذف والتعويض.

$$240 = 2س_2 + 3س_1$$

$$160 = 2س_2 + س_1$$

باستخدام طريقة المحددات

$$\Delta \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٦ - ٢ = ٤$$

$$\Delta س_١ \begin{vmatrix} ٢٤٠ & ٢ \\ ١٦٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٤٨٠ - ٣٢٠ = ١٦٠$$

$$\Delta س_٢ \begin{vmatrix} ٣ & ٢٤٠ \\ ١ & ١٦٠ \end{vmatrix} = ٤٨٠ - ٢٤٠ = ٢٤٠$$

$$س_١ = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{١٦٠}{٤} = ٤٠$$

$$س_٢ = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{٢٤٠}{٤} = ٦٠$$

النقطة هي (٤٠ ، ٦٠)

للوصول إلى الحل الأصل نقوم بالتعويض بأركان أو نقاط منطقة الحل في دالة الهدف

نقاط الحل	دالة الهدف ١٥س١ + ٢٠س٢	قيمة الدالة
(٤٠ ، ٦٠)	١٥ × ٤٠ + ٢٠ × ٦٠	١٨٠٠
(٠ ، ١٢٠)	١٥ × ٠ + ٢٠ × ١٢٠	٢٤٠٠
(٠ ، ٨٠)	١٥ × ٠ + ٢٠ × ٨٠	١٦٠٠

∴ نجد أن أعظم ربح هو ٢٤٠٠ عند النقطة (٠ ، ١٢٠)

وبذلك يمكن إنتاج س١ = ٠ ، س٢ = ١٢٠

مثال رقم 5

أوجد أكبر قيمة للدالة هـ = ٦س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$

طبقاً للآتي:

٦س$_{١}$ + ٦س$_{٢}$ ≤ ٤٢ ..... ①

− س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≤ ٤ ..... ②

س$_{١}$ ≤ ٢ ..... ③

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≥ صفر

القيد الأول

نفرض أن س$_{١}$ = صفر

٦س$_{١}$ + ٦س$_{٢}$ = ٤٢

٦×٠ + ٦س$_{٢}$ = ٤٢

٦س$_{٢}$ = ٤٢

$\frac{٦}{٦}$س$_{٢}$ = $\frac{٤٢}{٦}$ = ٧

س$_{٢}$ = ٧

المحور الصادي

س$_{١}$ ، س$_{٢}$

(٠ ، ٧)

٦س$_{١}$ + ٦س$_{٢}$ = ٤٢

نفرض أن س$_{٢}$ = صفر

٦س$_{١}$ + ٦×٠ = ٤٢

٦س$_{١}$ = ٤٢

$\frac{٦}{٦}$س$_{١}$ = $\frac{٤٢}{٦}$ = ٧

س$_{١}$ = ٧

المحور السيني

س$_{١}$ ، س$_{٢}$

(٧ ، ٠)

القيد الثاني

نفرض أن س$_{١}$ = صفر

− س$_{١}$ + س$_{٢}$ = ٤

٠ + س$_{٢}$ = ٤

س$_{٢}$ = ٤

المحور الصادي

س$_{١}$ ، س$_{٢}$

(٠ ، ٤)

نفرض أن س$_{٢}$ = صفر

− س$_{١}$ + س$_{٢}$ = ٤

− س$_{١}$ = ٤

$\frac{-س_{١}}{-١}$ = $\frac{٤}{-١}$

س$_{١}$ = −٤

المحور السيني

س$_{١}$ ، س$_{٢}$

(−٤ ، ٠)

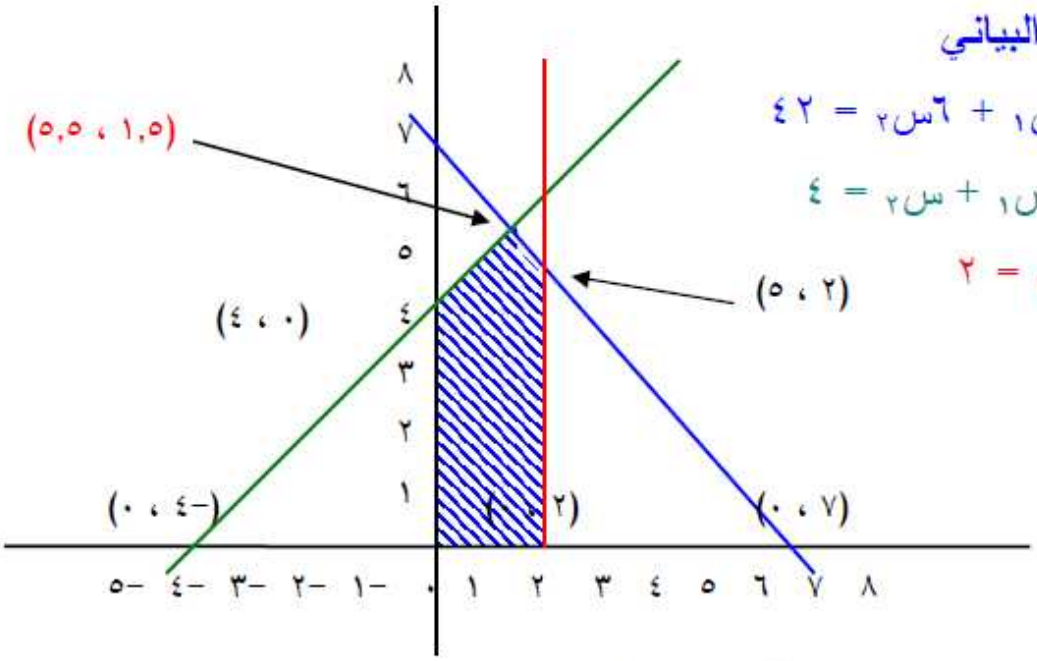
القيد الثالث $س_1 = ٢$ (٢ ، صفر)

الرسم البياني

① $٦س_1 + ٦س_2 = ٤٢$

② $-س_1 + س_2 = ٤$

③ $س_1 = ٢$



ولإيجاد نقطة الحل حسابياً نوجد تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني باستخدام المحددات، كما يمكن إيجادها بطريقة الحذف والتعويض.

$٦س_1 + ٦س_2 = ٤٢$

$-س_1 + س_2 = ٤$

باستخدام طريقة المحددات:

$$\Delta \begin{vmatrix} ٦ & ٦ \\ ١- & ١ \end{vmatrix} = ٦ - (٦-) = ١٢$$

$$\Delta س_1 \begin{vmatrix} ٤٢ & ٦ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٤٢ - ٢٤ = ١٨$$

$$\Delta س_2 \begin{vmatrix} ٦ & ٤٢ \\ ١- & ٤ \end{vmatrix} = ٢٤ - (٤٢-) = ٦٦$$

$$س_١ = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{١٨}{١٢} = ١,٥$$

$$س_٢ = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{٦٦}{١٢} = ٥,٥$$

∴ النقطة هي (١,٥ ، ٥,٥)

ولإيجاد نقطة القيد الأول مع القيد الثالث

$$٦س_١ + ٦س_٢ = ٤٢$$

$$س_١ = ٢$$

نقوم بالتعويض عن قيمة $س_١ = ٢$ في المعادلة الأولى $٦س_١ + ٦س_٢ = ٤٢$

$$٦ \times ٢ + ٦س_٢ = ٤٢$$

$$١٢ + ٦س_٢ = ٤٢$$

$$١٢ + \frac{٦}{٦} س_٢ = ٤٢$$

$$\frac{٦}{٦} س_٢ = ٤٢ - ١٢$$

$$\frac{٦}{٦} س_٢ = ٣٠$$

$$\frac{٦}{٦} س_٢ = \frac{٣٠}{٦}$$

$$س_٢ = ٥$$

للوصول إلى الحل الأمثل نعوض بأركان منطقة الحل في دالة الهدف

نقاط الأركان	دالة الهدف ٦س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$	قيمة الدالة
(٠ ، ٠)	(٦ × ٠) + (٤ × ٠) = ٠ + ٠	صفر
(٠ ، ٤)	(٦ × ٠) + (٤ × ٤) = ٠ + ١٦	١٦
(١,٥ ، ٥,٥)	(٦ × ١,٥) + (٤ × ٥,٥) = ٩ + ٢٢	٣١
(٢ ، ٥)	(٦ × ٢) + (٤ × ٥) = ١٢ + ٢٠	٣٢
(٢ ، ٠)	(٦ × ٢) + (٤ × ٠) = ١٢ + ٠	١٢

نجد أن أعظم ربح هو ٣٢ عند النقطة (٢ ، ٥)

مثال رقم 6

أوجد أقل تكلفة للمشكلة التالية:

↓ د = ٤س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$

بشرط أن:

س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ ≥ ١٠

س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≥ ٦

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≥ صفر

القيد الأول

نفرض أن س$_{١}$ = صفر

س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ = ١٠

٣س$_{٢}$ = ١٠

س$_{٢}$ = $\frac{١٠}{٣}$ = ٣,٣

س$_{٢}$ = ٧

المحور الصادي

س$_{١}$ ، س$_{٢}$

(٠ ، ٣,٣)

نفرض أن $س_٢$ = صفر

$س_١ + ٣س_٢ = ١٠$

$س_١ = ١٠$

المحور السيني
$س_١$ ، $س_٢$
(١٠ ، ٠)

القيد الثاني

$س_١ + س_٢ = ٦$

نفرض أن $س_١$ = صفر

$س_٢ = ٦$

المحور الصادي
$س_١$ ، $س_٢$
(٠ ، ٦)

نفرض أن $س_٢$ = صفر

$س_١ + س_٢ = ٦$

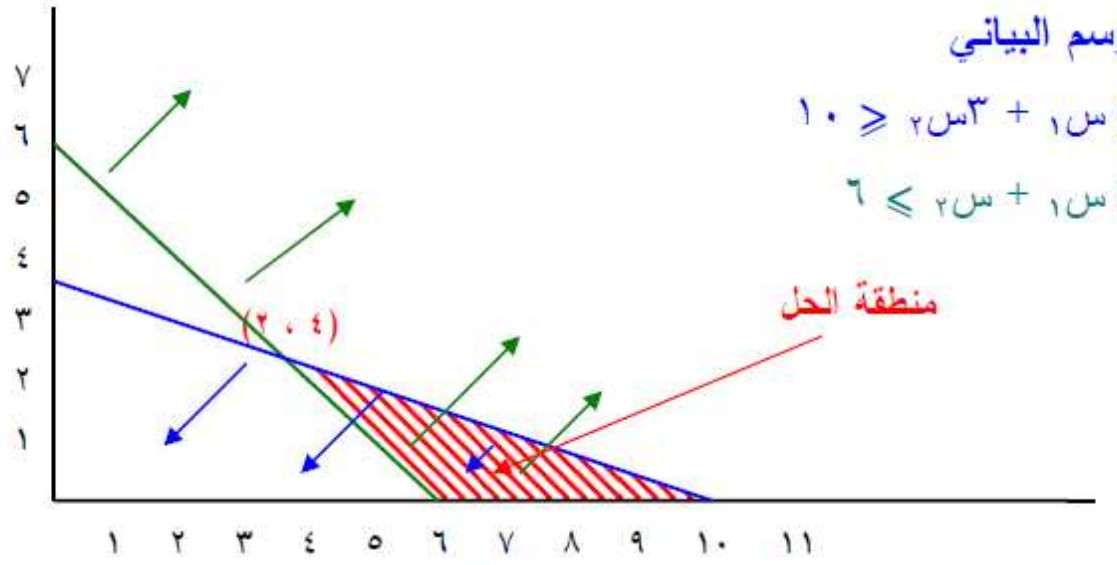
$س_١ = ٦$

المحور السيني
$س_١$ ، $س_٢$
(٦ ، ٠)

الرسم البياني

① $س_١ + ٣س_٢ \leq ١٠$

② $س_١ + س_٢ \geq ٦$



ولإيجاد نقطة الحل حسابيا نوجد تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني باستخدام المحددات، كما يمكن إيجادها بطريقة الحذف والتعويض.

$س_١ + ٣س_٢ = ١٠$

$س_١ + س_٢ = ٦$

باستخدام طريقة المحددات:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ١ - ٣ = -٢$$

$$\Delta س_١ = \begin{vmatrix} ١٠ & ١ \\ ٦ & ١ \end{vmatrix} = ١٠ - ١٨ = -٨$$

$$\Delta س_٢ = \begin{vmatrix} ١ & ١٠ \\ ١ & ٦ \end{vmatrix} = ٦ - ١٠ = -٤$$

$$س_١ = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-٨}{-٢} = ٤$$

$$س_٢ = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-٤}{-٢} = ٢$$

∴ النقطة هي (٤ ، ٢)

وللوصول إلى الحل الأمثل نعوض بأركان منطقة الحل في دالة الهدف

نقاط الأركان	دالة الهدف $٤س_١ + ٤س_٢$	قيمة الدالة
(٦ ، ٠)	(٤ × ٦) + (٤ × ٠) = ٢٤	٢٤
(١٠ ، ٠)	(٤ × ١٠) + (٤ × ٠) = ٤٠	٤٠
(٤ ، ٢)	(٤ × ٤) + (٤ × ٢) = ٢٤	٢٤

∴ نجد أن أقل تكلفة هي ٢٤ عند النقطة (٦ ، ٠) أو (٤ ، ٢) ويمكن أن يختار مدير المشروع بين هاذين النقطتين لينتج عندهما وكلاهما سوف يشكلان أقل تكلفة.