Al-Manara University

جامعة المنارة

Faculty of Business Administration

كلية إدارة الأعمال

"Decisions Making Theory"

Chapter 6

"البرمجة الخطية وصنع القرارات

Linear Programming

Lect. Hadi KHALIL

Email: hadi.khalil@hotmail.fr

البرمجة الخطية Linear programming:

- هو الأسلوب الثاني الذي سنتطرق إليه في إطار حل المشاكل التي تتعلق باتخاذ القرار الأنسب من ضمن مجموعة من الخيارات المتاحة،

- أو بتخصيص الموارد بالطريقة المثلى بحيث يساهم في تحقيق الأهداف الموضوعة.

- ففي كثير من الأحيان، يهدف المستثمرون إلى تعظيم أرباحهم وتخفيض تكاليفهم، ضمن مجموعة من الشروط، تتعلق باستخدام المواد الأولية، أو عدد الكميات المنتجة من أصناف السلع، أو اختيار مصدر التوريد الأنسب.

البرمجة الخطية Linear programming::

- حيث يمكن التعبير عن هذه الأهداف والشروط على شكل دالات رياضية، إما معادلات أو متراجحات.

- وتأخذ هذه الدالات الشكل الخطي، بعبارة أخرى يهدف المستثمر إلى تعظيم الربح أو تخفيض التكلفة بشكل مشروط بمجموعة من القيود الخطية.

- وهنا يأتي دور البرمجة الخطية بإيجاد التوليفة المناسبة من المدخلات (مواد أولية، أسواق تصريف، أصناف إنتاج) لتحقيق أفضل المخرجات (تعظيم ربح، أو تخفيض تكلفة).

البرمجة الخطية Linear programming::

- إذا في البرمجة الخطية يتم استخدام الشروط الموضوعة للوصول للحل الأمثل:

- حيث يتم صياغة هذه الشروط إضافة لتابع الهدف على شكل معادلات خطية, ومن ثم يتم إيجاد الحل المشترك لمجموعة هذه المعادلات، بغية الوصول للحل الأمثل.

- وبالتالي نرى أنّ مفهوم البرمجة الخطية ترتبط ارتباط وثيق بأسلوب الحل المشترك لجملة المعادلات الخطية.

البرمجة الخطية – المعادلات الآنية Simultaneous Equations:

- سنقوم بداية بذكر مجموعة من النقاط المتعلقة بهذا الأسلوب والذي يعرف عادة المعادلات الآنية:

- إذا كان هناك متغير واحد مجهول، فإنّ معادلة واحدة كافية لإيجاد قيمة هذا المتغير. إمّا إذا كان هناك أكثر من متغير فإننا نحتاج لأكثر من معادلة لإيجاد قيمة هذه المتغيرات، وهذا ما يدعى بالمعادلات الآنية Simultaneous equations. وبالتالي إذا كان هناك n متغير مجهول، فإننا نحتاج إلى n معادلة مستقلة.

- مثلاً، بفرض أنّه كان لدينا x, y متغيرات مجهولان فإننا لا نستطيع إيجاد قيمتهما من معادلة واحدة ولتكن $x + y = 3$ إذا نحن بحاجة لمعادلة أخرى مثل $y - x = 1$
- ، وبحل هاتين المعادلتين المستقلتين يتضح أنّ قيمة $y = 2, x = 1$.
- ونقصد بمفهوم الاستقلالية هنا بأننا لا نستطيع الحصول على إحدى المعادلات عن طريق المعادلة الأخرى.

البرمجة الخطية – المعادلات الآنية

- مثلاً المعادلتين الآتيتين غير مختلفتين أو غير مستقلتين:

$$x - 10 = y \text{ أو } x + y = 10$$

$$2x + 2y = 20 \text{ أو } x + y = 10$$

- لنتطرق هنا إلى كيفية حل جملة المعادلات الآنية

- بافتراض أن لدينا متغيرين غير معروفين، ولدينا المعادلتين الآتيتين:

$$x - y = 7$$

$$x + 2y = 16$$

- طريقة الأفضل لحل هاتين المعادتين هي وضع إحدى المعادلتين بصيغة أحد المتغيرين يساوي مقدار ما، $x = \cdots$،
- وبعد ذلك نقوم بطرح هذه القيمة من المعادلة الأخرى.

$$x = y + 7$$

- نقوم بتعويض هذه القيمة بالمعادلة الأخرى؟

- ب

$$x + 2y = 16 \Rightarrow (y + 7) + 2y = 16 \;\; \Rightarrow 3y = 9 \;\; \Rightarrow y = 3$$

$$x - 3 = 7 \;\; \Rightarrow \;\; x =$$

- نستطيع التأكد من الحل عن طريق التعويض في المعادلات السابقة

- بعد هذه التذكير السريع لطريقة حل المعادلات سنبدئ بالتعرف على الطريقة البيانية في حل المعادلات:

البرمجة الخطية – الطريقة البيانية

- يمكن استخدام التمثيل البياني للمعادلات المقترحة لإيجاد الحل المطلوب، حيث يتم رسم كل معادلة و بالتالي تعبر نقطة تقاطع الأشكال الممثلة لكل معادلة عن الحل المشترك، كما سنرى في الأمثلة الآتية:

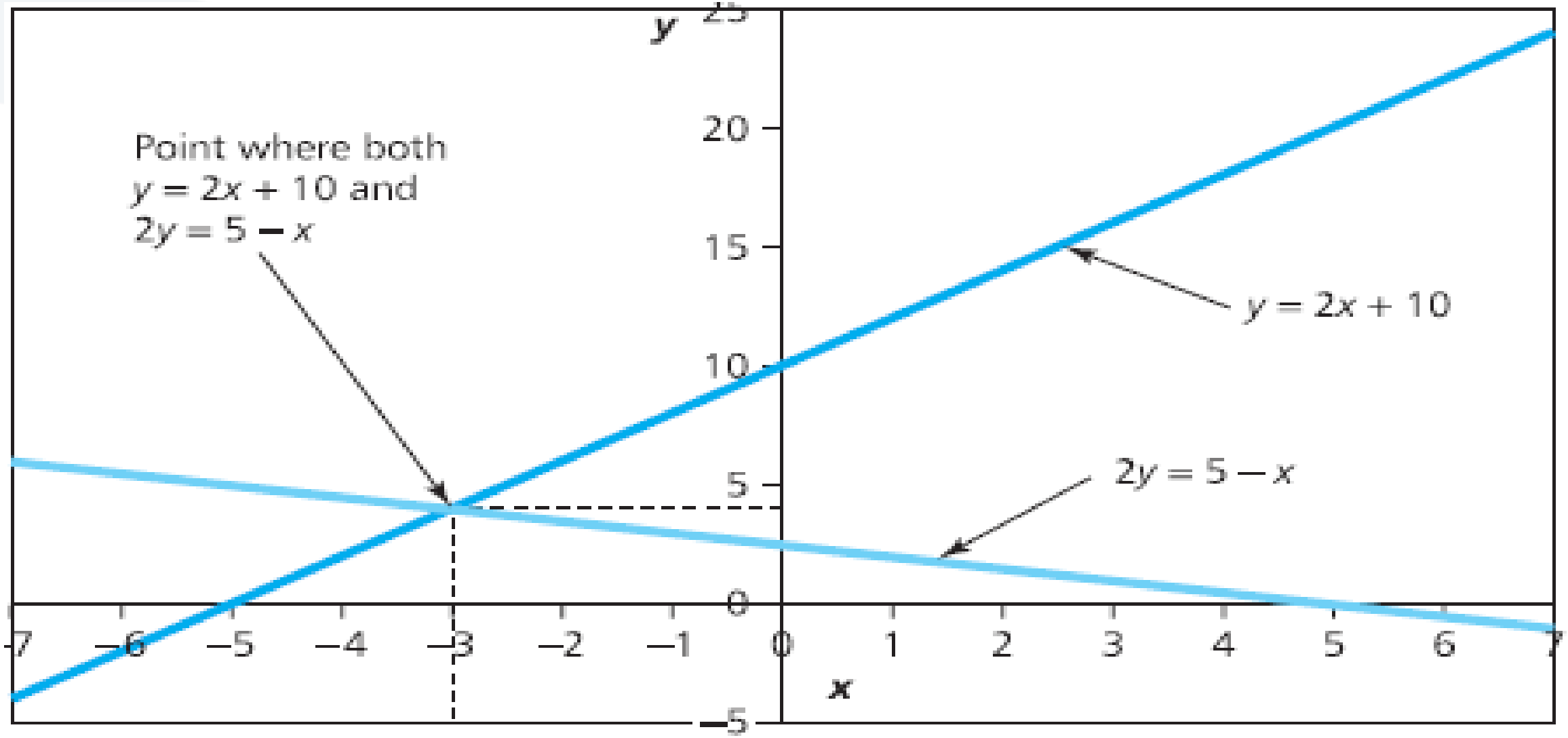
- مثال 1:

- ليكن لدينا المعادلتين:

$$y = 2x + 10$$
$$2y = 5 - x$$

- بما إنّ كل من هاتين المعادلتين هي معادلة من الدرجة الأولى، نقوم بالتمثيل البياني عن طريق رسم خط مستقيم، حيث نحدد الإحداثيات كما يأتي:
- من المعادلة الأولى عندما تكون
- $x = 0$، فإنّ $y = 10$، وعندما تكون $y = 0$ فإنّ $x = -5$،
- من المعادلة الثانية عندما تكون
- $x = 0$، فإنّ $y = 2.5$، وعندما تكون $y = 0$ فإنّ $x = 5$،
- <u>نقوم برسم هاتين المعادلتين فنحصل على :</u>

البرمجة الخطية – الطريقة البيانية



- نلاحظ أن نقطة تقاطع المستقيمين هي x=-3 و y=4 وهي تمثل الحل المشترك لجملة المعادلتين.
- وللتأكد نقوم بالتعويض في إحدى المعادلات:
- $4 = 2 * -3 + 10 \Rightarrow 4 = 6 - 10 \Rightarrow 4 = 4$
- ملاحظة: قد يكون هناك معادلات من الدرجة الثانية أو الثالثة، يمكن التمثيل البياني للوصول لأكثر من حل مشترك، والمجال هنا لا يتسع لذكرها.

البرمجة الخطية – الطريقة البيانية – وجود أكثر من متغيرين

- قد يصادف في حالات كثيرة وجود أكثر من متغيرين مجهولين، وهنا لإيجاد الحل المشترك كما ذكرنا سابقاً يلزمنا بالتالي أكثر من معادلتين. لنأخذ المثال الآتي:

- **مثال 2 :**

$$2x + y + 2z = 10 \qquad (1)$$
$$x - 2y + 3z = 2 \qquad (2)$$
$$-x + y + z = 0 \qquad (3)$$

- هنا نبدأ بالحل عن طريق ضرب المعادلة الثانية بـ 2 بحيث نقوم باستبعاد x من المعادلة الأولى :
- $2 * x - 4y + 6z = 4$
- نقوم بطرح المعادلة الناتجة من المعادلة الأولى:
- $y - (-4y) + 2z - 6z = 10 - 4 \Rightarrow$
- $5y - 4z = 6 \qquad (4)$
- والآن نقوم بضرب المعادلة الثالثة بـ 2 ونجمعها للمعادلة الأولى:
- $-2x + 2y + 2z = 0$

- بالجمع مع المعادلة الأولى ينتج:
- $y + 2y + 2z + 2z = 10 \Rightarrow$
- $3y + 4z = 10 \qquad (5)$
- نلاحظ اننا حصلنا على معادلتين جديدتين (4) و (5) وبمجهولين فقط، نقوم إذاً بحلهما عن طريق جمعهما:
- $8y = 16 \Rightarrow y = 2$
- إذاً نقوم بالتعويض بإحدى المعادلتين ولتكن (5) لإيجاد قيمة z:
- $3 * 2 + 4z = 10 \Rightarrow 4z = 10 - 6 \Rightarrow z = 1$

- ولإيجاد قيمة x نقوم بالتعويض في إحدى المعادلات الثلاث الأولى ولتكن (2):
- $x - 2y + 3z = 2 \Rightarrow x - 2 * 2 + 3 * 1 = 2$
- $\Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$
- إذا الحل المشترك للمعادلات الثلاث هو:
- ويمكن التأكد من الحل بالتعويض بإحدى المعادلات.
- **الآن يمكننا البدء ب طريقة استخدام البرمجة الخطية في صناعة القرارات :**

البرمجة الخطية *Linear optimisation*

- رأينا سابقاً أنّ المدراء يواجهون مشكلة تخصيص الموارد بالشكل الذي يحققون به أفضل النتائج (تعظيم أو تخفيض):
- ولكنّهم مقيدّون بمحدودية ومدى وفرة هذه الموارد والذي يحد من توفر الحلول الممكنة.
- وهذا ما نسميّه بالتحسين المقيّد: Constrained optimisation
- وتعد البرمجة الخطية أحد التقنيات التي تستخدم لحل مثل هذه المشاكل.

البرمجة الخطية *Linear optimisation*

- تتضمن البرمجة الخطية عدة خطوات أساسية، وأول ومن أهمّ هذه الخطوات هي صياغة المشكلة لكي تصبح قابلة للحل باستخدام العمليات الحسابية، وهذا ما سيتم توضيحه فيما يأتي:

- **أولا: صياغة المشكلة على شكل قيود خطية:**

- في مرحلة صياغة المشكلة يجب مراعاة أن تكون الصياغة على شكل قيود خطية أو متراجحات واضحة ودقيقة، بحيث تعبر هذه المتراجحات عن القيود المتعلقة بمحدودية الموارد أو بإمكانية المستثمر أو صاحب القرار(عدد ساعات، حجم الموارد الاولية، حجم الإنتاج، عدد العمال ، ...)

البرمجة الخطية *Linear optimisation*

- كذلك تتضمن صياغة المشكلة صياغة تابع الهدف بالنسبة لصاحب القرار والذي قد يكون على شكل تابع تعظيم للربح أو تخفيض للتكلفة.
- لنورد المثال الآتي لتوضيح كيفية صياغة المشكلة لكي تصبح قابلة للحل باستخدام البرمجة الخطية.
- **مثال 3:**
- لنفترض أن هناك مصنع صغير يقوم بتصنيع الأسمدة، وأنّه يقوم بإنتاج نوعين من الأسمدة A, B،

البرمجة الخطية *Linear optimisation*

- حيث يقوم بإنتاج هذين النوعين عن طريق نفس عملية الإنتاج، وباستخدام نفس المعدات لمزج المواد الخام، وتقطير المزيج، والتعبئة.

- ولكن المصنع يملك عدد محدود من المعدات فإنّ الوقت اللازم لكل عملية إنتاج هو وقت محدود. حيث يوجد فقط 40 ساعة لمزج المواد الخام، 40 ساعة لتقطير المزيج، و25 ساعة للتعبئة في الأسبوع. للتبسيط سنفترض أنّه لا يوجد أي قيود في مدى توفر المواد الخام.

البرمجة الخطية *Linear optimisation*

- ولنفترض أيضاً أنّ إنتاج الأسمدة يتم عبر دفعات، وإن كل دفعة تحتاج للوقت الآتي لإنتاج كلا النوعين من الأسمدة :

المرحلة	النوع A	النوع B
مزج المواد الخام	1	2
تقطير المزيج	2	1
التعبئة	1	1

- فإذا كان المصنع يحقق أرباح صافية بمقدار 300 وحدة نقدية من كل دفعة من النوع A، ويحقق أرباح صافية بمقدار 200 وحدة نقدية من كل دفعة من النوع B، <u>فالسؤال هنا ما هو مقدار دفعات الإنتاج الواجب تصنيعه في الأسبوع.</u>

البرمجة الخطية *Linear optimisation*

- نلاحظ أنّ هذه المشكلة هي مشكلة تحسين أو تعظيم هدف وهو الربح، وذلك مقيّد بعدد ساعات تشغيل المعدات لكل نوع من الأسمدة.

- نطلق هنا على عدد الدفعات الواجب تصنيعها من النوع A (G)، والنوع B (T) بمتغيرات القرار *Decisin variables*

- وبالتالي وبالاعتماد على البيانات السابقة فإنّ الوقت اللازم لخلط المزيج من المواد الأولية لتصنيع G من النوع A، و T من النوع B هو:

- $G + 2T \leq 40$
- كذلك الوقت اللازم لتقطير المزيج لتصنيع G من النوع A، و T من النوع B هو:
- $2G + T \leq 40$
- و الوقت اللازم لتعبئة G دفعة من النوع A، و T دفعة من النوع B هو:
- $G + T \leq 25$
- وهي ما تسمّى بقيود الهدف

البرمجة الخطية *Linear optimisation*

- ويوجد نوع آخر من القيود يسمّى بقيود عدم السلبية، كونه من غير الممكن أن تأخذ عدد دفعات الإنتاج أرقام سالبة.

$$G \geq 0$$

$$T \geq 0$$

- بعد تحديد القيود نقوم بصياغة تابع الهدف والذي يتضمن تعظيم الربح من الإنتاج:

$$300G + 200T \rightarrow MAX$$

البرمجة الخطية *Linear optimisation*

- وبالتالي يمكن صياغة مشكلة البرمجة الخطية كالآتي:

تعظيم

$300G + 200T$ تابع الهدف

من خلال القيود

$$\left.\begin{aligned} G + 2T &\le 40 \\ 2G + T &\le 40 \\ G + T &\le 25 \end{aligned}\right\}$$ القيود

بالإضافة

$G \ge 0$ and $T \ge 0$ قيود عدم السلبية

البرمجة الخطية *Linear optimisation*

- **مثال 4:**

- لنفرض أنّ أحد شركات الاستثمار لديها 1 مليون وحدة نقدية للاستثمار في أحد المحافظ المالية، وبعد استشارة بعض المختصين اتضح أن أحد المحافظ المالية تملك ست أنواع من الاستثمارات وفقاً للبيانات الآتية:

البرمجة الخطية *Linear optimisation*

النمو%	معدل الربح الموزع %	معدل الخطر%	نوع الاستثمار
22	4	18	1
7	5	6	2
12	9	10	3
8	7	4	4
15	6	12	5
8	8	8	6

البرمجة الخطية *Linear optimisation*

- فإذا كانت هذه الشركة تريد الاستثمار بأقل معدل خطر، ولكن بمعدل ربح موزع هو على الاقل 70000 وحدة نقدية، و معدل نمو عل الأقل 12%،

- **<u>فكيف يمكن صياغة المشكلة لكي تصبح قابلة للحل باستخدام البرمجة الخطية؟</u>**

- **<u>الحل:</u>**

- اولا نقوم بتحديد متغيرات القرار:

البرمجة الخطية *Linear optimisation*

- ليكن x1 هو المبلغ المستثمر في النوع الأول، و x2 هو المبلغ المستثمر في النوع الثاني، وهكذا حتى الاستثمار في النوع السادس

- نلاحظ ان هدف الشركة هو تقليل المخاطر، إذاً يمكن صياغة تابع الهدف:

$$0.18\,x_1 + 0.06\,x_2 + 0.1\,x_3 + 0.04\,x_4 + 0.12\,x_5 + 0.08\,x_6 \rightarrow MIN$$

- هذا الهدف يتم تحقيقه ضمن الشروط او القيود الآتية:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1000000$$

البرمجة الخطية *Linear optimisation*

- كذلك معدل الربح الموزع يجب أن يكون على الاقل 70000 وحد نقدية:

$$0.04\,x_1 + 0.05\,x_2 + 0.09\,x_3 + 0.07\,x_4 + 0.06\,x_5 + 0.08\,x_6 \geq 70000$$

- و معدل النمو في الاستثمار يجب أن يكون على الأقل 12% من الاستثمار 1 مليون:

$$0.22\,x_1 + 0.07\,x_2 + 0.12\,x_3 + 0.08 + 0.15\,x_5 + 0.08\,x_6 \geq 120000$$

- كذلك قيود عدم السلبية

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0$$

حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- في الواقع تتطلب البرمجة الخطية مستوى لا بأس به من الحسابات لإيجاد الحل المناسب (كمية الإنتاج الأمثل، نوع الإنتاج الأمثل، نوع الآلة، السوق المناسب ....) لتعظيم لربح او تخفيض التكلفة، وبالرغم من وجود برامج حاسوبية متخصصة في حل هذا النوع من المشاكل إلّا أنّه يعتبر من المفيد التعرف على أسلوب من اساليب حل البرمجة الخطية وهو الأسلوب البياني،
- وسنبين فيما يأتي كيفية استخدام هذا الأسلوب لحل مشكلة مصنع تصنيع الأسمدة الوارد في المثال رقم 3:

حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- لنستعيد أولا صيغة البرمجة الخطية للمشكلة المتعلقة بهذا المصنع:

تعظيم

$300G + 200T$ تابع الهدف

من خلال القيود

$$\left.\begin{array}{l} G + 2T \le 40 \\ 2G + T \le 40 \\ G + T \le 25 \end{array}\right\}$$ القيود

بالإضافة

$G \ge 0$ and $T \ge 0$ قيود عدم السلبية

- لنأخذ معادلة القيد الأول الذي يمثل الوقت اللازم لخلط لمزيج لكل من النوع A والنوع B:

- $$G + 2T \le 40$$

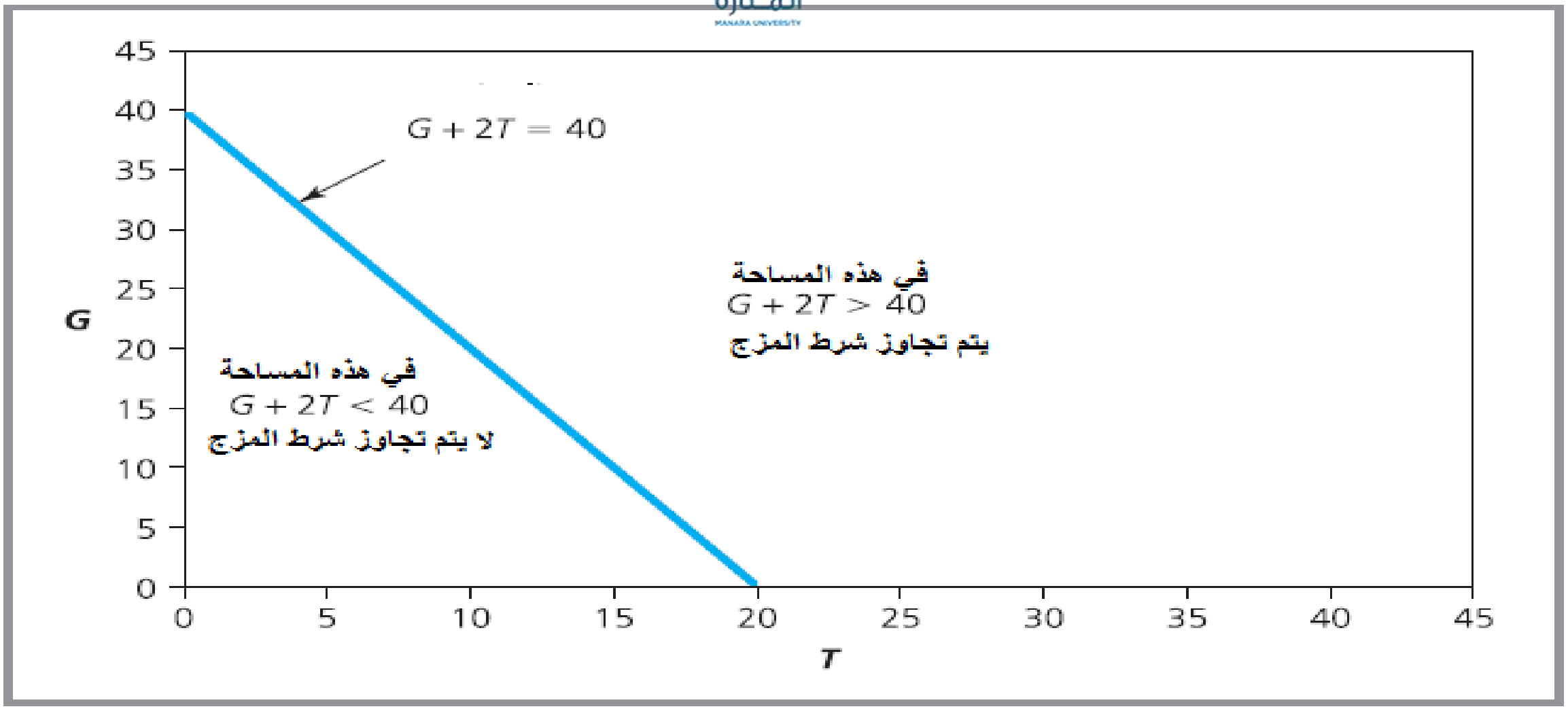
حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- نقوم بعدها برسم المستقيم $G+2T=40$، والطريقة الأسهل هي افتراض أنّ عدد الوحدات المنتجة G من النوع A يساوي الصفر ومن ثم نقوم بإيجاد قيمة الوحدات المنتجة T من النوع B،
- ومن ثم نقوم بتعيين النقطة $(0,T)$ ونعيد الأمر بافتراض أنّ عدد الوحدات المنتجة من النوع B يساوي الصفر ومن ثم نقوم بإيجاد قيمة الوحدات المنتجة من النوع A، ومن ثم نقوم بتعيين النقطة $(G,0)$ وبعدها نقوم بوصل المستقيم بين هاتين النقطتين:

حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- من المعادلة $G+2T=40$
- إذا كان $G=0 \Longrightarrow T=20$ إذا النقطة الأولى هي $(20\ ,0)$
- إذا كان $T = 0 \Longrightarrow G = 40$ إذا النقطة الثانية هي $(40,\ 0)$،
- بافتراض أن المحور العامودي يمثل نم ةجتنملا تادحولا ددع G النوع A و أنّ المحور الأفقي يمثل عدد الوحدات المنتجة T من النوع B، نقوم برسم مستقيم يصل النقطة الأولى بالنقطة الثانية كما هو موضح في الرسم الآتي:

حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:



حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- يلاحظ من الرسم البياني أنّ أي نقطة أعلى المستقيم تشكل توليفة من عدد الوحدات المنتجة لكل من النوع A والنوع B يتم تجاوز شرط الوقت المطلوب $G+2T\leq 40$، حيث يتم تجاوز 40 ساعة لخلط المزيج، بينما أي نقطة تحت الخط المستقيم تحقق هذه الشرط، مثلاً لنأخذ أي نقطة فوق المستقيم ولتكن

- $G=10,T=10$ نلاحظ أنّ الشرط $40\geq 10*2+10$ محقق، بينما إذا أخذنا نقطة أخرى فوق الخط المستقيم ولتكن $G=20,T=20$، نلاحظ أنّ الشرط $40\geq 20*2+20$ غير محقق.

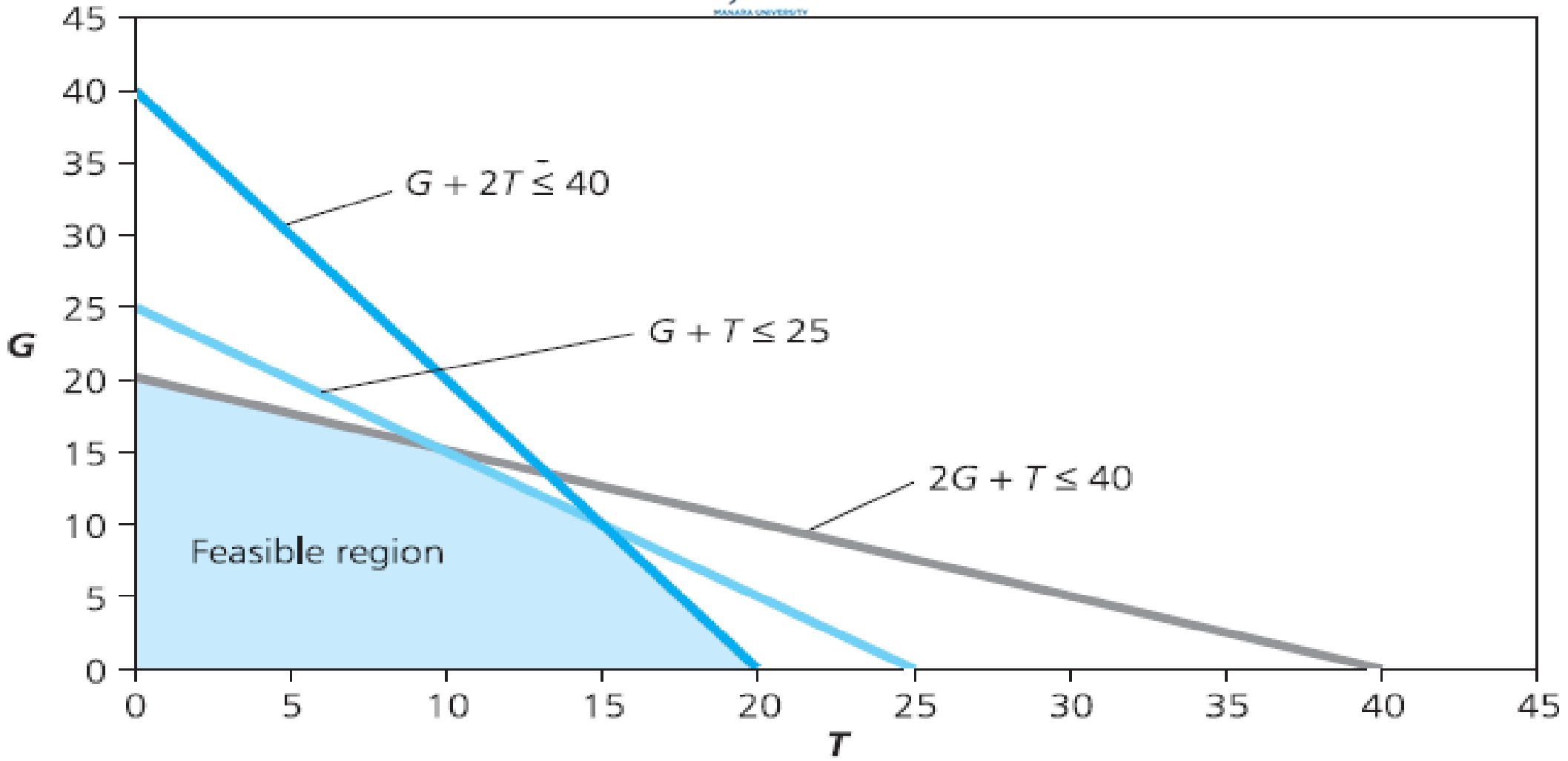
حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- يمكننا كذلك رسم القيدين الباقيين بنفس الطريقة السابقة:
- - الشرط المتعلق بالوقت اللازم لتقطير المزيج $2G + T \leq 40$
- من المعادلة $2G + T = 40$
- إذا كان $G = 0 \implies T = 40$ إذا النقطة الأولى هي $(0, 40)$
- إذا كان $T = 0 \implies G = 20$ إذا النقطة الثانية هي $(20, 0)$،
- بافتراض أن المحور العامودي يمثل نم ةجتنملا تادحولا ددع G النوع A و أنّ المحور الأفقي يمثل عدد الوحدات المنتجة T من النوع B، نقوم برسم مستقيم يصل النقطة الأولى بالنقطة الثانية.

حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- والشرط المتعلق بالوقت اللازم لتعبئة $G + T \leq 25$،
- من المعادلة $G + T = 25$
- إذا كان $G = 0 \Longrightarrow T = 25$ إذا النقطة الأولى هي $(0, 25)$
- إذا كان $T = 0 \Longrightarrow G = 25$ إذا النقطة الثانية هي $(25, 0)$،
- بافتراض أن المحور العامودي يمثل نم ةجتنملا تادحولا ددع G النوع A و أنّ المحور الأفقي يمثل عدد الوحدات المنتجة T من النوع B، نقوم برسم مستقيم يصل النقطة الأولى بالنقطة الثانية.
- نبين ما سبق في الرسم الآتي:

حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:



حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- وهنا نلاحظ أنّه إذا أخذنا بعين الاعتبار قيود عدم السلبية ، $G\geq 0$، $T\geq 0$، فإنّ المنطقة المظللة باللون الأورق تمثل منطقة الحلول، ويجدر الانتباه هنا إلى كلمة الحلول وليس الحل، حيث تتضمن هذه المنطقة عدة حلول ممكنة والتي يقع من ضمنها الحل الأمثل.
- ولإيجاد الحل الأمثل نقوم بالمنهجية الآتية:
- - انطلاقاً من تابع الهدف الذي يمثل تعظيم الأرباح

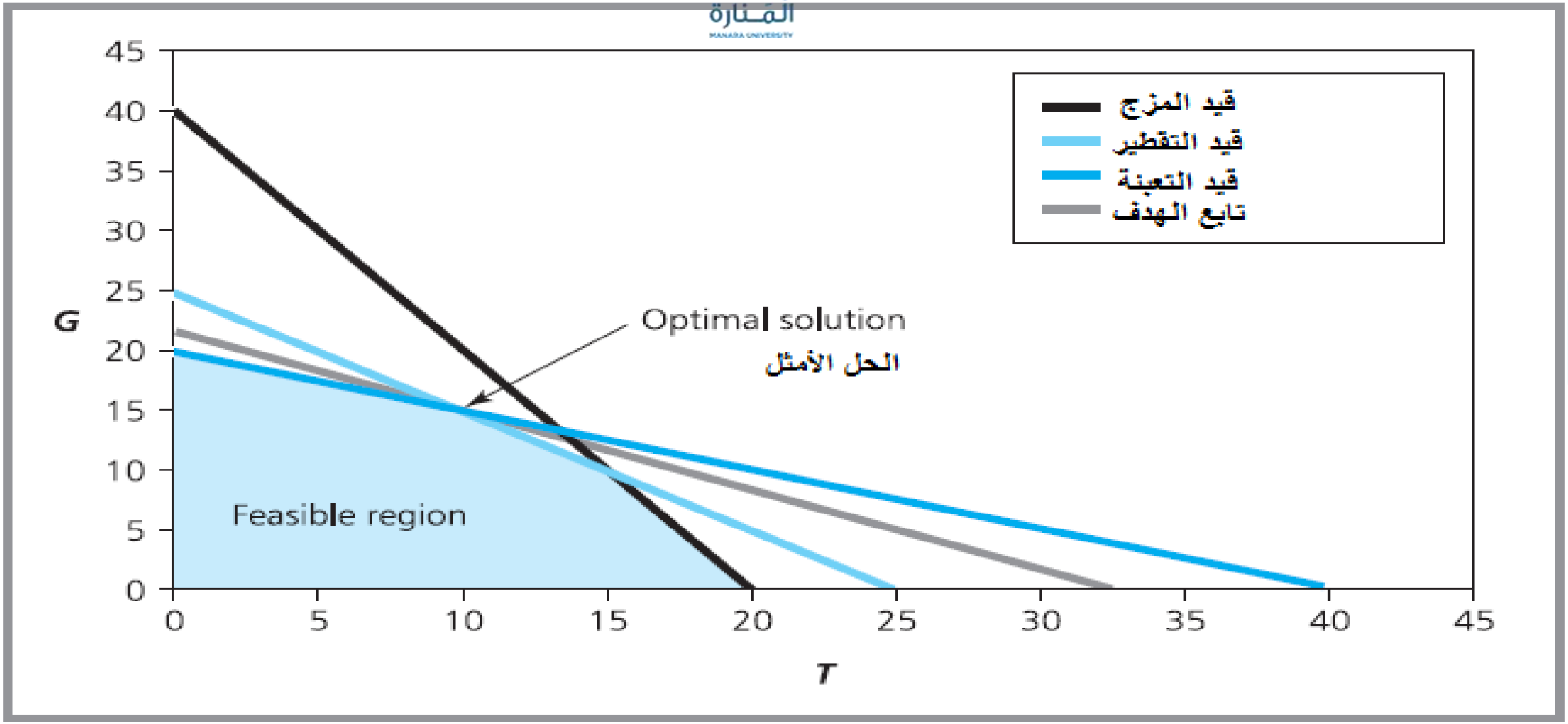
$$300G + 200T \rightarrow MAX$$

- نستطيع رسم خطوط مختلفة ممثلة لهذه المعادلة انطلاقاً من قيم

حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- حيث نرى أنّه كلّما ابتعدنا عن المركز يزداد الربح.
- - ولكن إذا أخذنا بعين الاعتبار منطقة الحلول التي تم تشكيلها اعتماد على شروط الوقت اللازم للمزج والتقطير والتعبئة، نلاحظ أنّه يمكن اعتماد مستوى الربح الذي لا يتجاوز هذه المنطقة وبالتالي بمحاكمة بسيطة نستنتج أنّ الكمية المثلى من G و هي الكمية التي تسمح بتعظيم الربح من جهة وبعدم تجاوز منطقة الحلول الممكنة من جهة أخرى.
- مما سبق نستنتج أنّ النقطة التي يتجاوز بعدها خط الأرباح منطقة الحلول الممكنة هي نقطة الحل الأمثل. كما نرى في الشكل الآتي:

حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:



حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- يبين هذا الشكل أنّ النقطة التي يتجاوز عندها خط تابع الهدف منطقة الحلول الممكنة هي نفسها تقاطع قيد التقطير مع قيد التعبئة والتي يعبر عنهما بالمعادلتين الآتيتين:
- - الشرط المتعلق بالوقت اللازم لتقطير المزيج
  - $2G + T = 40$
- والشرط المتعلق بالوقت اللازم لتعبئة المزيج
  - $G + T = 25$

حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- للوصول للقيم الدقيقة لكل من G و T نقوم بالحل المشترك للمعادلتين السابقتين، وذلك بطرح لمعادلة الثانية من الأولى فينتج:

$$\left.\begin{array}{r} 2G+T=40 \\ - \\ G+T=25 \end{array}\right\} \Rightarrow G=15$$

$$2*15+T=40 \Rightarrow T=10$$

- وهذا يعطي أنّه يجب انتاج في الأسبوع 15 دفعة من النوع A و 10 دفعات من النوع B

حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- وهذا يحقق أرباح أسبوعية مقدارها 6500 وحدة نقدية.
- $300 * 15 + 200 * 10 \rightarrow 6500$
- ولتحليل حساسية المخرجات السابقة تجاه التغير في أحد القيود، لنفترض أنّ إدارة المصنع تفكر في رفع عدد ساعات التقطير إلى 45 بحيث يكون :
- $2G + T \leq 45$

حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- هنا نقوم بإيجاد الحل المشترك للمعادلتين:

$$\left.\begin{array}{c} 2G+T=45 \\ - \\ G+T=25 \end{array}\right\} \Rightarrow G=20$$

$$2*20+T=45 \Rightarrow T=5$$

- وهذا يعطي أنّه يجب إنتاج في الأسبوع 20 دفعة من النوع A و 5 دفعات من النوع B، وهذا يحقق أرباح أسبوعية مقدارها 7000 وحدة نقدية.
- $300*20+200*5 \rightarrow 7000$

حل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني:

- تبعاً لما رأيناه سابقاً فإنّ المخرجات تتأثر فقط في حال التغير في الشرط الثاني (التقطير) والشرط الثالث (التعبئة)،
- **بينما التغير في الشرط الأول (المزج) لا يلعب دوراً في تحليل الحساسية كون الحل لا يعتمد عليه بصورة مباشرة.**