جامعة المنارة الخاصة

كلية الهندسة

هندسة الروبوتيك والانظمة الذكية

الإشارات والأنظمة

Signals and Systems

تحويل Z وتطبيقاته في تحليل الجمل LTI

تحويل Z الكسري وتحويله المعكوس

مدرس المقرر

د. السموءل صالح

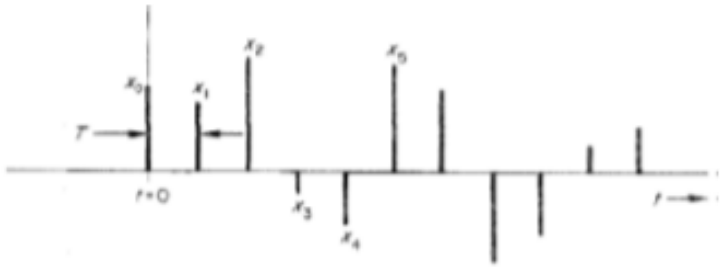
تحويل Z وتطبيقاته في تحليل الجمل LTI

١- تحويل Z المباشر The Direct Z – Transform :

يتم استنتاج تحويل Z من تحويل لابلاس وذلك بفرض لدينا الاشارة المقطعة زمنيا x(t) بالمقدار T ثانية ويعبر عنها بالشكل:

$$x(t)= x_0 .\delta(t)+x_1.\delta(t-T) +x_2.\delta(t-2T)+x_3.\delta(t-3T)+\cdots$$

بأخذ تحويل لابلاس لهذه الاشارة مع العلم أن تحويل لابلاس للومضة الواحدية و انزياحها معطى بالعلاقة: $\delta(t) \Leftrightarrow 1 \quad and \quad \delta(t-T) \Leftrightarrow e^{-ST}$



فان التحويل هو: $X(S)= x_0 +x_1.e^{-sT} +x_2.e^{-s2T} +x_3e^{-s3T} +\cdots$

لنفرض المقدار $Z=e^{sT}=e^{(\sigma+jw)T}=e^{\sigma}\cos wt + je^{\sigma}\sin wt$ حيث :

T يعبر عن زمن أخذ العينات أو التقطيع ويقاس بالثانية، نعوض في X(S) :

$$X(Z)= x_0 +x_1.Z^{-1} +x_2.Z^{-2} +x_3Z^{-3} +\cdots$$

ملاحظات: ١- المتحول $Z^{-1}=e^{-ST}$ يعبر عن العينة ويمثل بشكل بسيط وحدة تأخير زمني.

٢- كل المعطيات المتقطعة والانظمة المتقطعة زمنيا يمكن التعبير عنها بالمتحول Z بالنتيجة يمكن التعبير عن النظام المقطع السبي الاتي:

بتعريف تحويل Z وحيد الجانب (فقط القيم الموجبة) وفق: $X[n]= X[0] +X[1] +X[2] +X[3]+\cdots$

$$X(Z)= x_0 +x_1.Z^{-1} +x_2.Z^{-2} +x_3Z^{-3} +\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} X[n]Z^{-n}$$

Z متحول عقدي *complex variable*

٣- بالنتيجة يعطى تحويل Z للإشارات المقطعة زمنياً S(n) كسلسلة طاقة Power Series ثنائية الجانب كالآتي: $X(z)=Z\{x(n)\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$

تحويل Z وتطبيقاته في تحليل الجمل LTI

١- تحويل Z المباشر The Direct Z – Transform:

أمثلة: أوجد تحويل Z وحيد الجانب للإشارات:

$$s_1(n)=\{1,2,5,7,0,1\} \quad , \quad s_2(n)=\{1,2,5,7,0,1\}$$

$$Z^+\{s_1(n)\}=S_1^+(z)=1+2z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+z^{-5}$$

تحويل Z ثنائي الجانبي

$$Z\{s_2(n)\}=z^2+2z+5+7z^{-1}+z^{-3}$$

$$Z^+\{s_2(n)\}=S_2^+(z)=5+7z^{-1}+z^{-3}$$

ملاحظات: ١- أن تحويل Z وحيد الجانب وثنائي الجانب غير منطبقين بالنسبة للإشارات غير السببية.

٢- إن خواص تحويل Z وحيد الجانب هي نفسها لتحويل Z ثنائي الجانب عدا خاصية الإزاحة الزمنية. في حال التأخير والتقديم الزمني.

٣- بما أن تحويل Z عبارة عن سلسلة طاقة غير محددة فهي موجودة فقط من أجل تلك القيم لـ Z والتي تكون من أجلها هذه السلسلة متقاربة، إن مجال التقارب *The Region of Convergence(ROC)* للسلسلة *S(z)* هو مجموعة لكل القيم (قيم z) التي تكون من أجلها *S(z)* بقيم محدودة، لهذا في كل وقت نورد فيه تحويل Z يجب أن نشير إلى مجال تقاربه.

أمثلة: أوجد تحويل Z للإشارات الآتية المحددة زمنياً:

$$a)\ s(n)=\{1,2,5,7,0,1\}$$

$$S(z)=\sum_{n=0}^{5} s(n).z^{-n}=s(0).z^0+s(1).z^{-1}+s(2).z^{-2}+s(3).z^{-3}$$

$$+s(4).z^{-4}+s(5).z^{-5}=1+2z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+z^{-5}$$

مجال التقارب *ROC*: كل قيم المجال العقدي (مستوي z) ما عدا $z=0$.

تحويل Z وتطبيقاته في تحليل الجمل LTI

١- تحويل Z المباشر The Direct Z – Transform :

أمثلة: أوجد تحويل Z للإشارات الآتية المحددة زمنياً:

مجال التقارب ROC: كل قيم المجال العقدي (مستوي z) ما عدا z = 0 و z=∞ .

$d-\quad s(n)=\delta(n+k) \quad ; \quad k>0 \quad , \quad S(z)=z^{k}$

مجال التقارب :ROC كامل مستوي z ما عدا z=∞

b)- $s(n)=\{1, 2, \mathbf{5}, 7, 0, 1\}$

$$S(z)=\sum_{n=-2}^{3} s(n).z^{-n}=s(-2).z^{2}+s(-1).z+s(0).z^{0}+s(1).z^{-1}$$
$$+s(2).z^{-2}+s(3).z^{-3}=z^{2}+2z+5+7z^{-1}+z^{-3}$$

c)- $s(n)=\delta(n) \Rightarrow , S(z)=1$

مجال التقارب :ROC كامل مستوي z.

نلاحظ أن المعامل لـ z^{-n} يمثل قيمة عينة الإشارة عند اللحظة الزمنية n

تحويل Z وتطبيقاته في تحليل الجمل LTI

١- تحويل Z المباشر The Direct Z – Transform :

أمثلة: أوجد تحويل Z للتتابع المبين وحيث α=constant :

$$s(n)=\alpha^n.u(n)=\begin{cases}\alpha^n & n\geq 0\\ 0 \quad ; & n<0\end{cases}$$

نلاحظ بأن الإشارة $S(n)$ تحوي على عدد غير منتهي من العينات غير الصفرية

$$s(n)=\{1,\alpha,\alpha^{2},\alpha^{3},.....,\alpha^{n}\}$$

يمثل تحويل Z لـ $s(n)$:

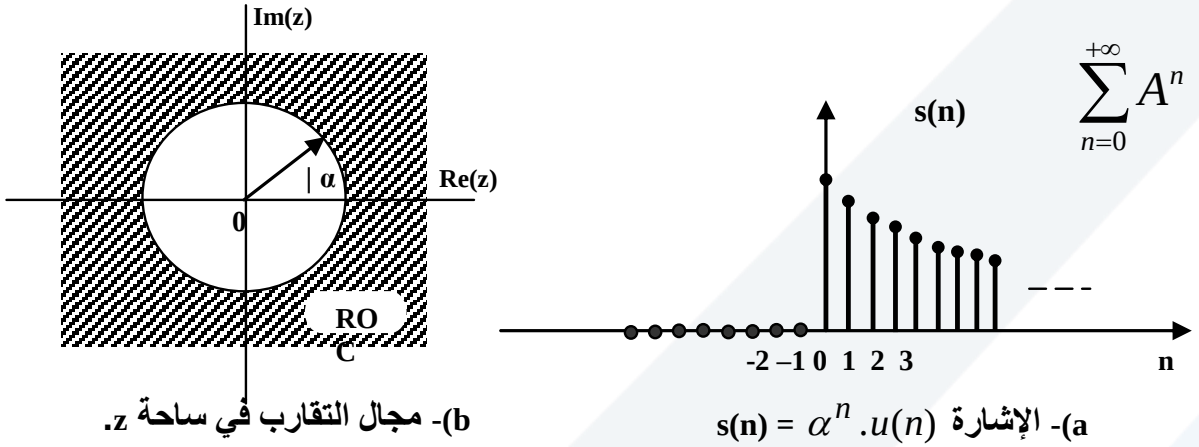
$$S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n u(n).z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha z^{-1})^n=1+\alpha\ Z^{-1}+\alpha^2 Z^{-2}+.....\alpha^n Z^{-n}+...$$

يمثل سلسلة هندسية غير محدودة *Infinite Geometric Series* من الشكل:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}A^n=1+A+A^2+.....=\frac{1-A^{\infty}}{1-A}\qquad Where\quad A=\alpha Z^{-1}$$

وتكون هذه السلسلة متقاربة إذا كان $A<1$، وبالتالي من اجل $|\alpha\ z^{-1}|<1$ أو $|Z|>|\alpha|$ فإن السلسلة تتقارب إلى:

$$S(z)=\frac{1}{1-\alpha\ z^{-1}}=\frac{Z}{Z-\alpha}\quad ,ROC:\ |Z|>|\alpha|$$



a)- الإشارة $s(n)=\alpha^n.u(n)$

b)- مجال التقارب في ساحة z.

الإشارة السببية $s(n)$ ومجال تقارب تحويل Z لها في الساحة العقدية.

١- تحويل Z المباشر The Direct Z – Transform :

أمثلة: أوجد تحويل Z للتتابع المبين وحيث α=constant ومجال التقارب للسلسلة S(Z):

$$s(n)=-\alpha^n\ u(-n-1)=\begin{cases}0 & for \quad n\geq 0\\ -\alpha^n & for \quad n\leq -1\end{cases}$$

الحل: من التعريف:

$$S(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}s(n).z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-\alpha^n)u(-n-1).z^{-n}$$

ببعض الفرضيات والاستنتاج الرياضي نصل للحد العام للسلسلة التالية:

$$\left[A+A^2+A^3+.....\right]=-\left[1+A+A^2+.....\right]=\frac{-A}{1-A}\qquad ،A=\alpha^{-1}.z$$

وبالاستنتاج الرياضي نصل للعلاقة النهائية التالية:

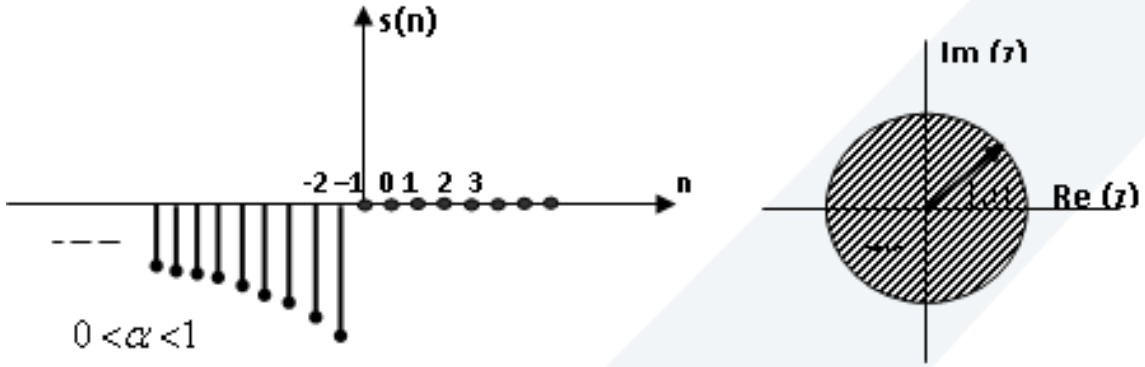
$$Z\{-\alpha^n u(-n-1)\}=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}\qquad ROC:\quad |z|<|\alpha|$$

بمقارنة نتائج هذا المثال مع المثال السابق نجد:

$$Z\{\alpha^n u(n)\}=Z\{-\alpha^n u(-n-1)\}=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

الفرق هو فقط في مجالات التقارب:

$$Z\{\alpha^n u(n)\} \qquad : ROC \quad |z|>\alpha$$
$$Z\{-\alpha^n u(-n-1)\} \qquad : ROC \quad |z|<\alpha$$



يوضح الشكل (٢) هذه التتابع ومجال التقارب لسلسلة z

١- تحويل Z المباشر The Direct Z – Transform :

أوجد تحويل Z للتتابع: $s(n)=\alpha^n u(n)+b^n u(-n-1)$

الحل: من تعريف تحويل Z وبالاستفادة من التمرين السابق يمكن ان نكتب:

$$S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}b^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha z^{-1})^n+\sum_{l=1}^{+\infty}(b z^{-1})^l \quad \Rightarrow \quad S(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}-\frac{1}{1-b z^{-1}}$$

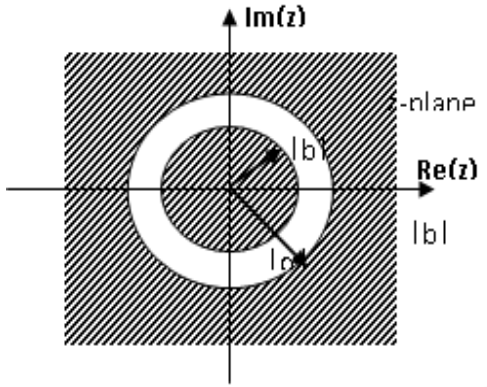
ولكن حتى يتحدد وجود هذه السلسلة من الطاقة S(z) يجب تحديد مجال التعريف للمقدارين وفق:

- إن سلسلة الطاقة الأولى متقاربة من أجل: $|\alpha z^{-1}|<1$ أو $|\alpha|<|z|$

- إن سلسلة الطاقة الثانية متقاربة من أجل: $|b z^{-1}|<1$ أو $|b|<|z|$

لتحديد تقارب S(z) نميز حالتين:

١- إذا كانت $|\alpha|>|b|$ عندها يكون ROC كما في الشكل:



مجال التقارب لتحويل Z

نلاحظ أن مجالي الـ ROC لا يتقاطعان وبالتالي لا نستطيع إيجاد قيم لـ z والتي يكون من أجلها كلا السلسلتين متقاربتين بالوقت نفسه معاً وبناءً عليه فإن S(z) تكون غير موجودة.

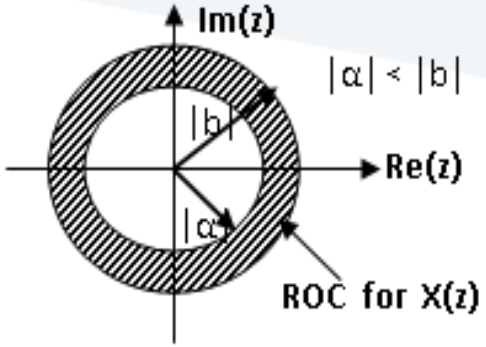
تحويل Z وتطبيقاته في تحليل الجمل LTI

١- تحويل Z المباشر The Direct Z – Transform:

أوجد تحويل Z للتتابع: $s(n)=\alpha^n u(n)+b^n u(-n-1)$

لتحديد تقارب S(z) نميز حالتين:

٢- إذا كانت $|b|>|\alpha|$ عندها يكون ROC كما في الشكل:



مجال التقارب لتحويل Z

عندها يكون S(z) متقارب من أجل قيم Z المبينة في الشكل في هذه الحالة يوجد في ساحة z قطاع بشكل شريحة دائرية تكون السلسلتين من أجل قيم Z فيه متقاربتين بالوقت نفسه، في هذه الحالة يكون:

$$S(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}-\frac{1}{1-b z^{-1}}=\frac{b-\alpha}{\alpha+b-z-\alpha b z^{-1}}$$

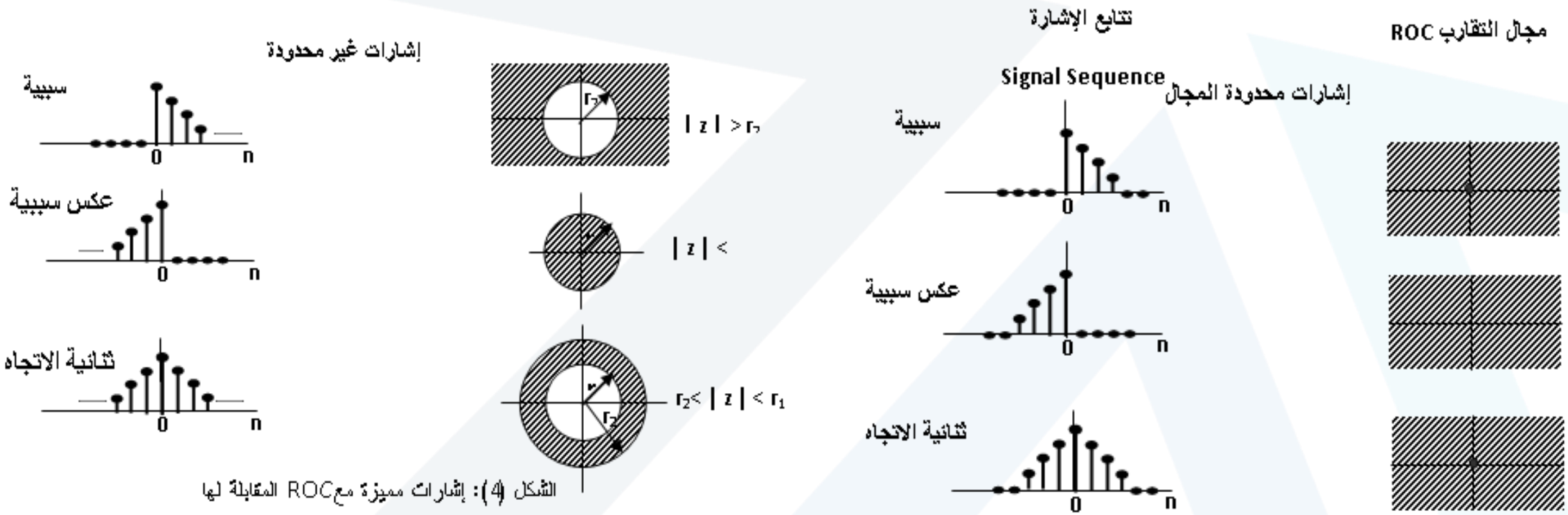
$$ROC: \quad |\alpha|<|z|<|b|$$

أن ROC (مجال التقارب) يعتمد على كون الإشارة محدودة أو غير محدودة (زمن حياتها) وعلى كونها سببية أو غير سببية وباتجاهين، هذه الحقائق مبينة في الجدول الاتي:

نوع الإشارة	مجال التقارب ROC
محدودة وسببية	كامل مستوى z باستثناء z=0
محدودة وعكس السببية	كامل مستوى z باستثناء z= ∞
محدودة وثنائية الإتجاه	كامل مستوى z باستثناء z= ∞ و z=0
غير محدودة وسببية	كامل مستوى z خارج الدائرة: $\|z\|>\|r_2\|$
غير محدودة وعكس السببية	داخل الدائرة: $\|z\|<\|r_1\|$
غير محدودة وثنائية الإتجاه	شريحة دائرية: $r_2<\|z\|<r_1$

١- تحويل Z المباشر The Direct Z – Transform :

نبين هذه الإشارات ومجالات تقارب لكل منها في الشكل



الشكل (4): إشارات مميزة مع ROC المقابلة لها

٢- تحويل Z العكسي The Inverse Z – Transform :

إذا كان تحويل Z لإشارة ما موجوداً أو متاحاً ويتوجب علينا تحديد تتابع الإشارة. إن الإجراء اللازم للتحويل من مجال Z إلى مجال الزمن يدعى بتحويل Z العكسي، إن استخلاص تتابع الإشارة *S(n)* من تحويل *Z* لها يتم باستخدام ما يدعى بتكامل كوشي *Cauchy Integral* والتي تعتبر نظرية هامة من نظرية المتحولات العقدية.

لدينا تحويل Z للتتابع معرفاً بالعلاقة:

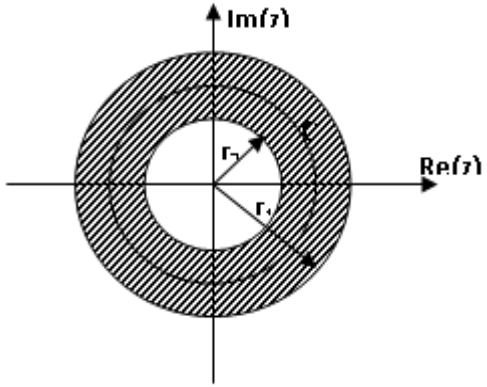
$$S(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).z^{-k}$$

نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ z^{n-1} ونكامل الطرفين على المنحني المغلق c داخل مجال التقارب ROC إلى *S(z)* ، مثل هذا المنحني المغلق مبين في الشكل وهكذا نحصل على:

$$\oint S(z)\,z^{n-1}\,dz=\oint_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).z^{n-1-k}\,dz=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k).\oint_c z^{n-1-k}\,dz$$

حسب كوشي

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{n-1-k}\,dz=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$



المنحني المغلق C للتكامل المعطى بالعلاقة المبينة

ومنه يكون $\oint_c S(z).z^{n-1}\,dz=2\pi\, js(n) \Rightarrow s(n)=\frac{1}{2\pi\, j}\oint_c S(z).z^{n-1}\,dz$ وهي تمثل علاقة تحويل Z العكسي.

٣- خصائص تحويل Z العكسي: إن خواص تحويل Z مشابهة لخواص تحويل فوريه وأهمها

أ- الخطية :Linearity ويتم التعبير عنها بالعلاقة الآتية:

$$Z\{a\,s_1(n)+b\,s_2(n)\}=Z\{a\,s_1(n)\}+Z\{b\,s_2(n)\}$$
$$=a\,S_1(z)+b\,S_2(z)$$

أي تحويل Z لمجموع عدة تتابعات يساوي مجموع تحويلات Z لكل من هذه التتابعات.

مثال: أوجد تحويل Z للإشارة: $s(n)=[3(2^n)-4(3^n)]\,u(n)$

الحل: نعرف الإشارة كما يأتي: $s(n)=a\,s_1(n)+b\,s_2(n)$ وبالتالي تصبح الإشارة : $s(n)=3s_1(n)-4s_2(n)$

وبالعودة للخاصية الخطية يتحقق: $S(z)=3S_1(z)-4S_2(z)$

من مثال سابق وجدنا: $ROC:|z|>|\alpha|$ $\quad Z\{\alpha^n u(n)\}=\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$

لدى تعويض $\alpha=3$ و $\alpha=2$ في العلاقة السابقة نحصل على:

$$Z\{2^n u(n)\}=S_1(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}} \qquad ROC:|z|>2$$

$$Z\{3^n u(n)\}=S_2(z)=\frac{1}{1-3z^{-1}} \qquad ROC:|z|>3$$

إن مجال تقاطع ROC لـ $S_1(z)$ و ROC لـ $S_2(z)$ يكون من أجل $|z|>3$

لهذا نعبر عن تحويل Z الكلي كما يأتي:

$$S(z)=\frac{3}{1-2z^{-1}}-\frac{4}{1-3z^{-1}} \qquad ROC:|z|>3$$

٣- خصائص تحويل Z العكسي: إن خواص تحويل Z مشابهة لخواص تحويل فوريه وأهمها

ب- خاصية الإزاحة الزمنية Time Shifting:

ويعبر عنها بالشكل الآتي: إذا كان $Z\{s(n)\}=S(z)$ فإنه يتحقق ما يأتي: $Z\{s(n-k)\}=z^{-k}.S(z)$

ج- خاصية التدريج في المجال Z: "Scaling in the Z – Domain" ويعبر عنها كما يأتي، إذا كان:

$$Z\{s(n)\}=S(z) \qquad r_1<|z|<r_2$$

فإن العلاقة الآتية تكون محققة وذلك من أجل a ثابت حقيقي أو عقدي $Z\{a^n.s(n)\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^n s(n)z^{-n}=S(\frac{z}{a})$ $ROC:\ |a|r_1<|z|<|a|r_2$

د - خاصية الانعكاس الزمني Time Reversal:

$$Z\{s(n)\}=S(z) \qquad ROC:\ r_1<|z|<r_2$$

$$Z\{s(-n)\}=S(z^{-1}) \qquad ROC:\ \frac{1}{r_2}<|z|<\frac{1}{r_1}$$

هـ- خاصية الانطواء Convolution Property:

إذا كان: $Z\{s_1(n)\}=S_1(z),\ Z\{s_2(n)\}=S_2(z)$ فإن: $S(z)=Z\{s_1(n)*s_2(n)\}=S_1(z)\cdot S_2(z)$

ويحدد ROC لـ S(z) كناتج لتقاطع ROCلـ $S_1(z)$ و ROCلـ $S_2(z)$.

٣- خصائص تحويل Z العكسي: إن خواص تحويل Z مشابهة لخواص تحويل فوريه وأهمها

و- خاصية الترابط Correlation Property: ويعبر عنها كالآتي: إذا كان $S_1(z)=Z\{s_1(n)\}$, $S_2(z)=Z\{s_2(n)\}$

فإنه يكون

$$Z\{r_{s_1s_2}(n)\}=R_{s_1s_2}(z)=S_1(z^{-1}).S_2(z)$$

$$Z\{r_{s_2s_1}(n)\}=R_{s_2s_1}(z)=S_1(z).S_2(z^{-1})$$

س - خاصية التفاضل في المجال Differentiation in the Z – Domain

إذا كان: $Z\{\ s(n)\ \}=S(z)$ فإن: $Z\{n.s(n)\}=-z\dfrac{d\,S(z)}{d\,z}$

البرهان:

$$S(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}s(n)\,z^{-n}\Rightarrow\frac{d\,S(z)}{d\,z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}s(n)(-n)z^{-n-1}=-z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[n\,s(n)]\,z^{-n}=-z^{-1}.Z\{n\,s(n)\}$$

$$\Rightarrow\quad Z\{n\,s(n)\}=-z\frac{d\,S(z)}{d\,z}$$

مثال: أوجد تحويل Z للإشارة: $s(n)=n\cdot a^n u(n)$

الحل: لنأخذ $s_1(n)=a^n\cdot u(n)$ وجدنا سابقا أن: $ROC:|z|>|a|$ $\quad S_1(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$

باستخدام خاصية التفاضل في المجال Z نجد أن: $Z\{n\cdot s_1(n)\}=Z\{n\cdot a^n\ s(n)\}=S(z)$

$$S(z)=-z\frac{d\,S_1(z)}{d\,z}=z\cdot\frac{a\,z^{-2}}{(1-az^{-1})^2}=\frac{a\,z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}\qquad ROC:|z|>|a|$$

٤- نظرية القيمة البدائية The Initial Value Theorem:

إذا كان التتابع s(n) سببي عندها يتحقق: $s(0)=\lim_{z\to\infty} S(z)$

البرهان: s(n) سببي لذا يكون: $S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} s(n).z^{-n}=s(0)+s(1).z^{-1}+s(2)\,z^{-2}+\ldots$

فعندما $z\to\infty$ فإن: $z^{-n}\to 0$ من أجل $n>0$ وبالنتيجة: $s(0)=\lim_{z\to\infty} S(z)$

١- تحويل Z الكسري Rational Z–Transform:

-- كثيرا من تحويلات Z يكون من أجلها S(z) عبارة عن تابع كسري وهذا يعني أن S(z) عبارة عن نسبة بين كثيري حدود لـ z^{-1} أو z كالآتي:

$$S(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_o+b_1z^{-1}+.....+b_Mz^{-M}}{a_o+a_1z^{-1}+.....+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}}$$

-- يمكن كتابته بشكل جداء أقواس لتحديد الاقطاب والاصفار

$$S(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_o}{a_o}z^{-M+N}\frac{(z-z_1)(z-z_2).....(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2).....(z-p_N)}$$

$$\Rightarrow S(z)=G.z^{-M+N}\frac{\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

-- تدعى القيم Z_k بأصفار التابع S(z) وهي قيم z التي يأخذ من أجلها التابع S(z) قيماً صفرية. وتدعى القيم Pk بأقطاب التابع S(z) وهي قيم Z التي يأخذ من أجلها التابع S(z) قيماً لانهائية (∞). وهكذا فإن للتابع S(z)، M صفراً محدداً و N قطباً محدداً. بالإضافة إلى |N-M| صفراً إذا كان N>M أو |N-M| قطباً إذا كان N<M وذلك في مركز الساحة العقدية لـ z أي من أجل z = 0.

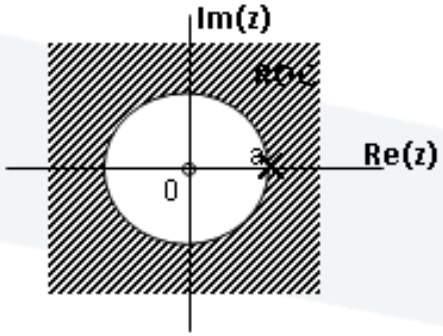
-- يمكن أن نمثل التابع S(z) وذلك بتحديد مو اقع الأصفار والأقطاب في الساحة العقدية لـz، حيث يرمز لموقع القطب بـ(x) ولموقع الصفر بـ(0). من الواضح وحسب التعريف فإن ROC لتحويل Z لا تحوي أي قطب.

١- تحويل Z الكسري Rational Z–Transform:

مثال: حدد أقطاب وأصفار التتابع $s(n) = a^n.u(n) \quad ;a > 0$

الحل: $S(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a} \quad ; \quad ROC:|z|>|a|$

من الواضح أن لـ $S(z)$ صفر وحيد هو $z = 0$ وقطب وحيد هو $p = a$. والشكل (6) يبين مخطط الأصفار والأقطاب لهذا التابع.



مخطط الأصفار والأقطاب للإشارة السببية $a^n u(n)$.

٢- تابع النقل لجملة LTI:

- يعرف تابع نقل الجملة LTI في المجال Z بتابع الجملة ويحدد وفق العلاقة الآتية:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{S(z)}$$

- حيث: $Y(z) = Z\{y(n)\}$ تحويل Z لتتابع الخرج. $S(z) = Z\{s(n)\}$ تحويل Z لتتابع الدخل. كما يحدد تابع الجملة لدى معرفة تتابع الاستجابة الومضي h(n) كالآتي:

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n).z^{-n}$$

- تعتبر العلاقة السابقة مفيدة عملياً في الحصول على H(z) إذا كانت الجملة LTI موصوفة بوساطة معادلة الفرق ذات العوامل الثابتة من الشكل:

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N} a_k .y(n-k)+\sum_{k=0}^{M} b_k .s(n-k)$$

- في هذه الحالة يمكن تحديد تابع الجملة H(z) مباشرة من العلاقة السابقة لدى حساب تحويل Z لكلا الطرفين في تلك العلاقة وبعد استخدام خاصية الخطية والإزاحة الزمنية نحصل:

$$Y(z)=-\sum_{k=1}^{N} a_k .Y(z).z^{-k}+\sum_{k=0}^{M} b_k .S(z).z^{-k} \quad \Rightarrow \quad H(z)=\frac{Y(z)}{S(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k .z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k .z^{-k}}$$

٢- تابع النقل الجملة LTI:

إذا تابع النقل H(z) العام لنظام LTI سببي ذو الدرجة N يعطى بالشكل:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{S(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k . z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k . z^{-k}} \Rightarrow H[z]=\frac{b_0+b_1z^{-1}+.....+b_{N-1}z^{-N+1}+b_Nz^{-N}}{1+a_1z^{-1}+.....+a_{N-1}z^{-N+1}+a_Nz^{-N}}$$

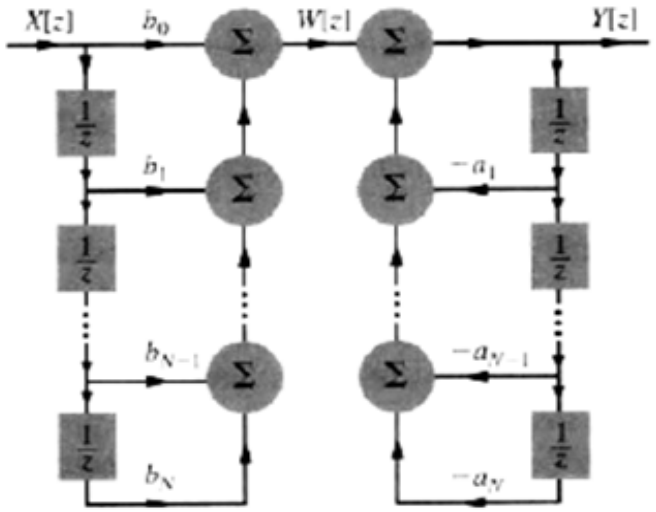
أذا يمكن تحقيق تابع النقل العام (تحويل Z) بثلاث طرق

-- الاولى: باستخدام الطريقة المباشرة وعلى فرض ان إشارة الدخل هي X (z)= S(z) وفق:

$$Y[z]=H[z]X[z]=\frac{b_0+b_1z^{-1}+.....+b_{N-1}z^{-N+1}+b_Nz^{-N}}{1+a_1z^{-1}+.....+a_{N-1}z^{-N+1}+a_Nz^{-N}}X[z]$$

$$=\left(\frac{1}{1+a_1z^{-1}+.....+a_{N-1}z^{-N+1}+a_Nz^{-N}}\right)\left(b_0+b_1z^{-1}+.....+b_{N-1}z^{-N+1}+b_Nz^{-N}\right)X[z]$$

$$=\left(\frac{1}{1+a_1z^{-1}+.....+a_{N-1}z^{-N+1}+a_Nz^{-N}}\right)W(z)$$



٢- تابع النقل الجملة LTI:

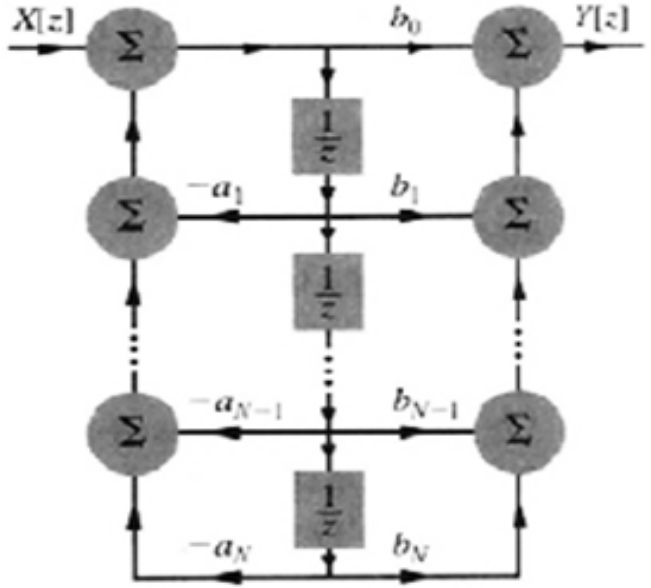
أذا يمكن تحقيق تابع النقل العام (تحويل Z) بثلاث طرق

-- الثانية: باستخدام الطريقة التراتبية وفق:

$$Y[z] = H[z]X[z] = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots\ldots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots\ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}} X[z]$$

$$= \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots\ldots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}\right)\left(\frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots\ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}}\right) X[z]$$

$$= \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots\ldots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}\right) W(z)$$



٢- تابع النقل الجملة LTI:

أذا يمكن تحقيق تابع النقل العام (تحويل Z) بثلاث طرق

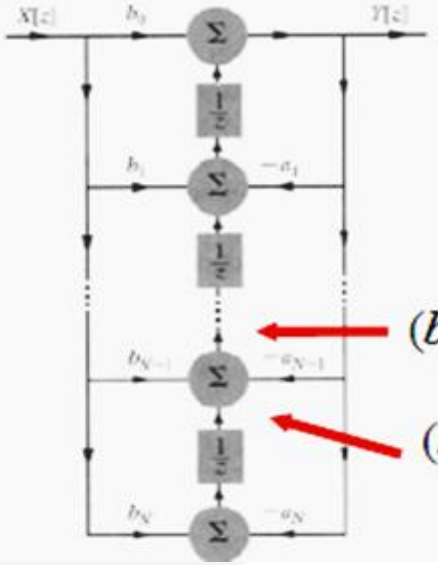
-- الثالثة: باستخدام طريقة التنضيد وفق:

- Or the transposed version:

$$Y[z]=H[z]X[z]=\frac{b_0+b_1z^{-1}+.....+b_{N-1}z^{-N+1}+b_Nz^{-N}}{1+a_1z^{-1}+.....+a_{N-1}z^{-N+1}+a_Nz^{-N}}X[z]$$

$$Y[z]+\left(a_1z^{-1}+.....+a_{N-1}z^{-N+1}+a_Nz^{-N}\right)Y[z]=\left(b_0+b_1z^{-1}+.....+b_{N-1}z^{-N+1}+b_Nz^{-N}\right)X[z]$$

$$Y[z]=\left(b_0+b_1z^{-1}+.....+b_{N-1}z^{-N+1}+b_Nz^{-N}\right)X[z]-\left(a_1z^{-1}+.....+a_{N-1}z^{-N+1}+a_Nz^{-N}\right)Y[z]$$

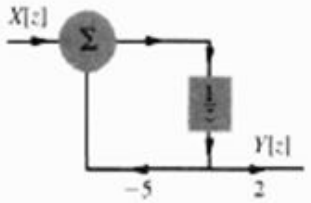
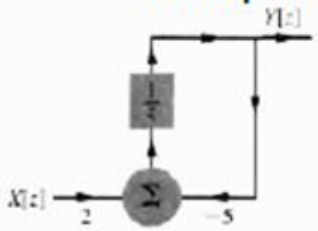
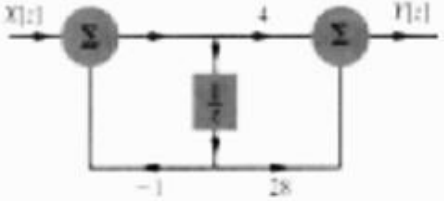
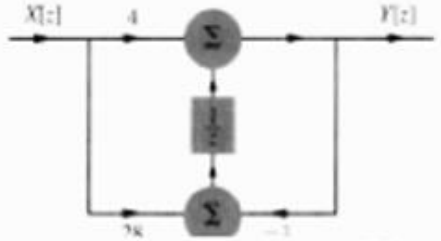
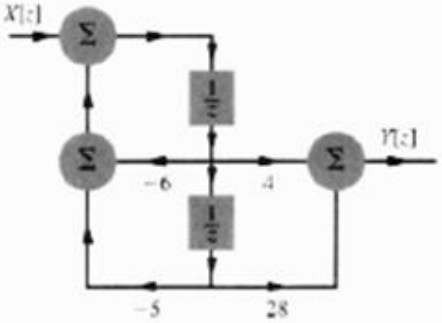
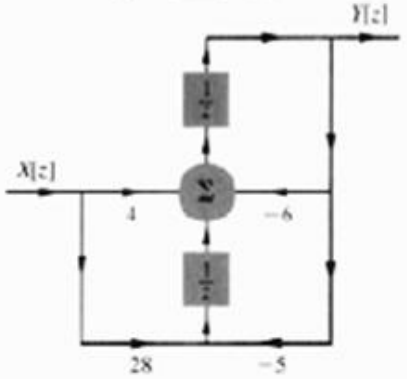


$$(b_NX[z]-a_NY[z])z^{-1}+(b_{N-1}X[z]-a_{N-1}Y[z])$$

$$(b_NX[z]-a_NY[z])z^{-1}$$

٢- تابع النقل الجملة LTI:

-- بعض الامثلة

	Direct Form II	Transposed
$H[z]=\frac{2}{z+5}=\frac{2z^{-1}}{1+5z^{-1}}$		
$H[z]=\frac{4z+28}{z+1}=\frac{4+28z^{-1}}{1+z^{-1}}$		
$H[z]=\frac{4z+28}{z^2+6z+5}=\frac{4+28z^{-1}}{1+6z^{-1}+5z^{-2}}$		

٣- تحويل Z الكسري المعكوس

Inversion of the Z–Transform:

- بوساطة تحويل Zالعكسي يمكن إيجاد أي حد من تتابع الإشارة s(n) بدلالة التابع S(z) وفق العلاقة الآتية:

$$s(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint S(z).z^{n-1}\,dz$$

- هناك ثلاث طرق تستخدم غالباً لحساب تحويل Z العكسي وهي:

أ)- الطريقة المباشرة وفق العلاقة السابقة باستخدام نظرية الرواسب.

ب)- النشر إلى سلسلة حدود بالمتغيرات z وz^{-1}.

ج)- النشر إلى كسور جزئية والبحث والمقارنة مع الجداول.

- بشكل عام فإن الطريقة الأولى أكثر تعقيداً وتتطلب معارفاً في نظرية المتحولات العقدية وبالتالي سنركز اهتمامنا على الطريقة الثانية والثالثة نظراً لأنهما اكثر فعالية من أجل غالبية التطبيقات العملية.

ب- نشر تحويل Z إلى سلسلة: Expansion of the Z–Transform in to Series

مثال: أوجد تحويل Z العكسي إذا كان:

$$S(z)=\frac{1}{1-1.5\,z^{-1}+0.5\,z^{-2}}$$

$$\begin{array}{r|l}
1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2} & 1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{7}{4}z^{-2}+\frac{15}{8}z^{-3}+\frac{31}{16}z^{-4}+\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
 & 1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2} \\
\hline
 & 1.5z^{-1}-0.5z^{-2} \\
 & 1.5z^{-1}-\frac{9}{4}z^{-2}+\frac{3}{4}z^{-3} \\
\hline
 & \frac{7}{4}z^{-2}-\frac{3}{4}z^{-3} \\
 & \frac{7}{4}z^{-2}-\frac{21}{8}z^{-3}+\frac{7}{8}z^{-4} \\
\hline
 & \frac{15}{8}z^{-3}-\frac{7}{8}z^{-4}
\end{array}$$

٣- تحويل Z الكسري المعكوس

Inversion of the Z–Transform:

ب- طريقة النشر إلى كسور أو توابع جزئية: يمكن كتابة التابع الكسري S(z) كما ذكرنا سابقاً وفق العلاقة:

$$S(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_o+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+b_M z^{-M}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_N z^{-N}}$$

إن التابع الكسري السابق ندعوه حقيقياً proper إذا كان a≠0 و M < N، أي أن عدد الأصفار يجب أن يكون أقل من عدد الأقطاب.

في حال كان التابع الكسري غير حقيقي أو غير أصلي improper عندها نكتب S(z) كمجموع كثير حدود وتابع كسري حقيقي أو أصلي بحيث يكون كثير الحدود كناتج قسمة البسط على المقام أما الكسر الحقيقي (الأصلي) فيمثل باقي القسمة، وهذا موضح في المثال الآتي.

$$S(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\underbrace{c_o+c_1 z^{-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+c_{M-N} z^{-(M-N)}}_{F(z)}+\frac{N_1(z)}{D(z)}$$

لنأخذ S(z) كتابع كسري حقيقي ولتبسيط المعالجة نلغي القوى السالبة لـ z وذلك بضرب البسط والمقام z^N لتصبح S(z) على الشكل الآتي:

$$\frac{S(z)}{z}=\frac{b_o z^{N-1}+b_1 z^{N-2}+\ldots\ldots\ldots+b_M z^{N-M-1}}{z^N+a_1 z^{N-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_N}$$

وهذا الكسر حقيقي أو أصلي دائماً طالما $N>M$ ويضم فقط قوى موجبة لـ Z ، ويكون التابع $\frac{S(Z)}{Z}$ المبين كسرا حقيقيا دائما

$$\frac{S(z)}{z}=\frac{b_o z^{N-1}+b_1 z^{N-2}+\ldots\ldots\ldots+b_M z^{N-M-1}}{z^N+a_1 z^{N-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_N}$$

٣- تحويل Z الكسري المعكوس :*Inversion of the Z–Transform*

ب- طريقة النشر إلى كسور أو توابع جزئية:

الهدف هو نشر S(z) إلى كسور جزئية، لهذا الغرض نحول كثير حدود المقام إلى جداء أقواس بحيث تضم الأقطاب $p_1 , p_2 , \ldots\ldots\ldots\ldots , p_N$ ونميز حالتين:

١- حالة الأقطاب المنفصلة: Distinct Poles: نفترض أن كل الأقطاب منفصلة عندها نسعى إلى نشر *S(z)* كالتالي:

$$\frac{S(z)}{z}=\frac{A_1}{z-p_1}+\frac{A_2}{z-p_2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{A_N}{z-p_N}$$

تؤل المسألة الى تحديد قيم المعاملات $A_1 , A_2 , \ldots\ldots\ldots , A_N$ وفق: نضرب طرفي علاقة *S(z)/z* بالعامل $(z-p_k)$ حيث: $k = 1, 2, \ldots . , N$ ونعوض z بقيمة القطب P_k الموافق لهذا المعامل:

$$A_k = \left.\frac{(z-p_k)\,S(z)}{z}\right|_{z=p_k}$$

٢- حالة الأقطاب المتعددة (المتراكبة) Multiple – Order Poles:

إذا كان للتابع S(z) أقطاب متطابقة L، حيث يكون في مقامه العامل $(Z-P_K)^L$ عندها سيكون النشر وفق العلاقة السابقة غير صحيح ونحتاج في هذه الحالة إلى نشر تفاضلي.

٣- تحويل Z الكسري المعكوس امثلة

:Inversion of the Z–Transform

ب- طريقة النشر إلى كسور أو توابع جزئية:

$$S(z)=\frac{1}{1-1.5\,z^{-1}+0.5\,z^{-2}}$$

١- حالة الأقطاب المنفصلة: Distinct Poles:

٢- حالة الأقطاب المتعددة (المتراكبة) Multiple – Order Poles:

في المثال نناقش حالة وجود قطبين L=2 .

مثال: أوجد التوابع الجزئية (الكسور الجزئية) للتابع الأصلي: $S(z)=\frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$

نعبر عن S(z) بدلالة القوى الموجبة لـ z وفق الصيغة الآتية: $S(z)=\frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}$

نلاحظ بأن S(z) يملك قطب بسيط $p_1 = -1$ وقطب مضاعف $p_2 = p_3 = 1$.في مثل هذه الحالة يكون النشر كما يلي: $\frac{S(z)}{z}=\frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}=\frac{A_1}{z+1}+\frac{A_2}{z-1}+\frac{A_3}{(z-1)^2}$

ونكون قد عدنا إلى المسألة السابقة نفسها أي عملية حساب A_1 , A_2 , A_3.

وعملية حساب A_1 , A_3مماثلة تماماً لما هو موجود في المثال السابق، أما حساب العامل A_2 فيكون وفق مايلي: $A_2=\frac{d}{dz}[\frac{(z-1)^2 S(z)}{z}]_{z=1}=\frac{3}{4}$

والحساب وفق الطريقة السابقة يعطينا قيمة $A_3=\frac{1}{2}$, $A_1=\frac{1}{4}$.