

المحاضرة الثالثة  
تصميم المتحكمات الرقمية  
د. نسمة أبو طبق

الفقرات الرئيسية  
المتحكم التناسبي التكاملي  
المتحكم التناسبي التكاملي التفاضلي  
التصميم بالطرق التجريبية  
المتحكم الصناعي  
المتحكم Deadbeat  
التصميم بطريقة مسار الجذور  
مخطط ايفانس

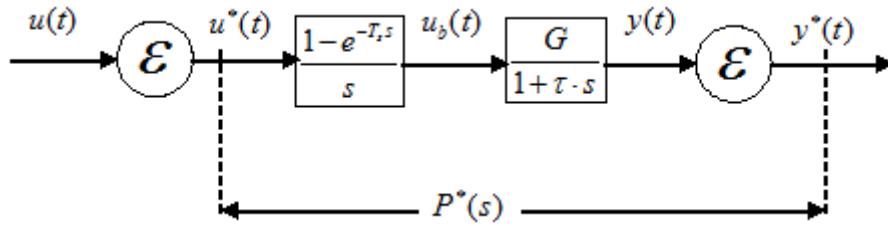
## تصميم المتحكمات الرقمية

المقدمة:

سنعالج فيما يلي تصميم المتحكمات الرقمية من النوع التناسبي التفاضلي التكاملي ومن أنواع أخرى بطرق متعددة. المتحكم التناسبي التكاملي:

التحكم بنظام من الدرجة الأولى

ليكن لدينا النظام من الدرجة الأولى المسبوق بماسك صفري كما في الشكل (1-3) التالي.



الشكل (1-3) نظام من الدرجة الأولى

نحن نبحث عن متحكم رقمي تناسبي تكاملي حتى تلبى الحلقة المغلقة متطلبات معينة. تابع نقل النظام مع الماسك الصفري:

$$P^*(s) = P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = Z \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{G}{1 + \tau \cdot s} \right]$$

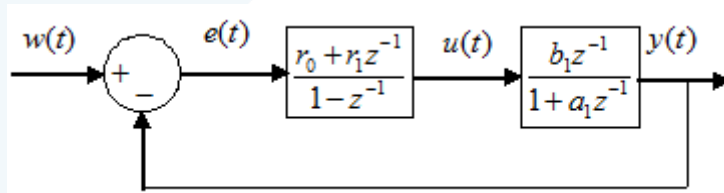
$$= G \frac{1 - \lambda}{z - \lambda}; \lambda = e^{-T/\tau}$$

نكتب تابع النقل للنظام مع الماسك بالشكل:

$$P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

تابع نقل المتحكم PI:

$$K(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{r_0 + r_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$



الشكل (2-3) النظام مع المتحكم بحلقة مغلقة

إن تصميم المتحكم PI الرقمي يعني إيجاد قيمة  $r_0, r_1$  وذلك لوضع خوارزمية التحكم المناسبة وهنا نميز حالتين: أولاً- سلوك الحلقة المغلقة من الدرجة الأولى

تابع نقل النظام:

$$P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

$$K(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{r_0(1 + \frac{r_1}{z^{-1}})}{1 - z^{-1}} \quad \text{تابع نقل المتحكم PI}$$

$$L_{yy} = K(z)P(z) = \frac{r_0 b_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad \text{تابع نقل الحلقة المفتوحة}$$

حيث تم اختصار بسط المتحكم  $(1 + \frac{r_1}{z^{-1}})$  مع مقام النظام  $1 + a_1 z^{-1}$

$$\frac{r_1}{r_0} = a_1 \quad \text{هذا يعني أن}$$

تابع نقل الحلقة المغلقة:

$$\Gamma(z) = \frac{K(z)P(z)}{1 + K(z)P(z)} = \frac{r_0 b_1 z^{-1}}{1 + (r_0 b_1 - 1)z^{-1}} \quad (1-3)$$

نقوم بتثبيت سلوك الحلقة المغلقة بالزمن المستمر  $\frac{1}{1 + T_o s}$  باختيار مناسب لـ  $T_o$ . نقوم بعدها بتحويل تابع النقل

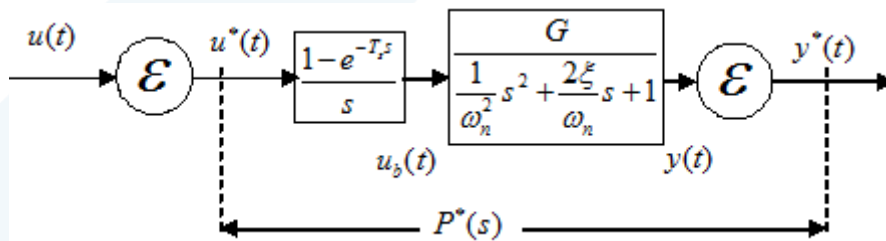
المستمر للحلقة المغلقة للزمن المتقطع كما يلي:

$$\Gamma(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-T_o s}}{s} \frac{1}{1 + T_o s} \right] = \frac{(1 - \lambda_o) z^{-1}}{1 - \lambda_o z^{-1}}; \lambda_o = e^{-T_o/T_o}$$

$$r_0 b_1 = 1 - \lambda_o \Rightarrow r_0 = \frac{1 - \lambda_o}{b_1} \Rightarrow r_1 = a_1 r_0 \quad \text{بالمقارنة مع العلاقة (1-3) فإن}$$

التحكم بنظام من الدرجة الثانية بوساطة PIDN

يوضح الشكل (3-3) نظام من الدرجة الثانية مسبق بماسك صفري.



الشكل (3-3) نظام درجة ثانية مسبق بماسك صفري

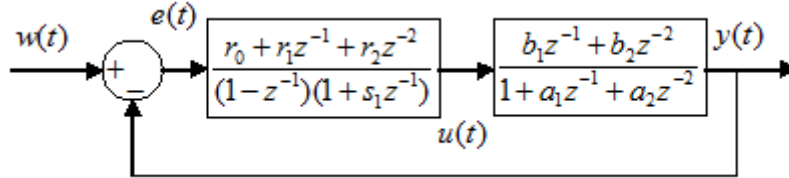
تحويل Z للنظام مع الماسك الصفري:

$$P(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1} \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{1}{s} \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1} \right]$$

تابع النقل لنظام من الدرجة الثانية مسبق بماسك صفري يكتب كما يلي:

$$P(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

يوضح الشكل (4-3) التالي المخطط الصندوقي للحلقة المغلقة للنظام مع متحكم تناسبي تكاملي تفاضلي مع مرشح .PIDN



الشكل (4-3) نظام الحلقة المغلقة

نميز بالنسبة للحلقة المغلقة إمكانية الحصول على نوعين من السلوك وهما: سلوك من الدرجة الثانية وسلوك من الدرجة الرابعة. بهدف التبسيط لن ندرس حالة الدرجة الرابعة.

سلوك الحلقة المغلقة من الدرجة الثانية

في هذه الحالة يلغي بسط المتحكم مقام النظام. يمكن كتابة تابع نقل المتحكم كما يلي:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{r_0 \left(1 + \frac{r_1}{r_0} z^{-1} + \frac{r_2}{r_0} z^{-2}\right)}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})}$$

$$1 + \frac{r_1}{r_0} z^{-1} + \frac{r_2}{r_0} z^{-2} = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

$$a_1 = \frac{r_1}{r_0}, a_2 = \frac{r_2}{r_0}$$

$$L_{yy} = K(z)P(z) = \frac{r_0 b_1 z^{-1} + r_0 b_2 z^{-2}}{1 + (s_1 - 1)z^{-1} - s_1 z^{-2}} \quad \text{تابع نقل الحلقة المفتوحة:}$$

$$\Gamma(z) = \frac{L_{yy}}{1 + L_{yy}} = \frac{r_0 b_1 z^{-1} + r_0 b_2 z^{-2}}{1 + (s_1 - 1 + r_0 b_1)z^{-1} + (r_0 b_2 - s_1)z^{-2}} \quad \text{تابع نقل الحلقة المغلقة:}$$

$$= \frac{r_0 b_1 z^{-1} + r_0 b_2 z^{-2}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}$$

$$p_1 = s_1 - 1 + r_0 b_1; p_2 = r_0 b_2 - s_1$$

بفرض قيم معينة لـ  $p_1; p_2$  يمكن إيجاد قيم ثوابت المتحكم من العلاقات التالية:

$$s_1 = r_0 b_2 - p_2, r_2 = a_2 r_0, r_1 = a_1 r_0, r_0 = \frac{1 + p_1 + p_2}{b_1 + b_2}$$

مثال 1-3: لديك نظام من الدرجة الأولى تابع نقله  $P(s) = \frac{0.5}{1 + 50s}$  صمم متحكم رقمي PI للحصول على سلوك

$$\Gamma(s) = \frac{1}{1 + 16.66s} \quad \text{الحلقة المغلقة المرغوب التالي:}$$

الحل: تابع نقل النظام مع الماسك الصفري:

$$P^*(s) = P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = Z \left[ \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} \frac{0.5}{1 + 50s} \right]$$

$$= 0.5 \frac{1 - \lambda}{z - \lambda}; \lambda = e^{-T_s/50}$$

نكتب تابع النقل بالشكل:

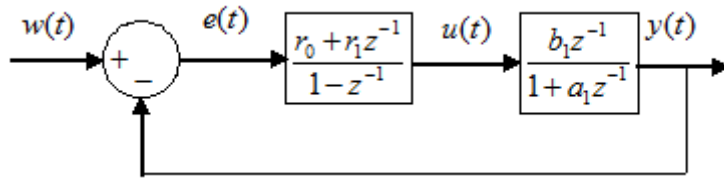
$$P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

$$b_1 = 0.5(1 - \lambda), a_1 = -\lambda, \lambda = e^{-T_s/50} \quad \text{حيث:}$$

تابع نقل المتحكم PI:

$$K(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{r_0 + r_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

سيتم إيجاد ثوابت المتحكم كما يلي:



الشكل (5-3) النظام مع المتحكم بحلقة مغلقة

$$K(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{r_0(1 + \frac{r_1}{r_0} z^{-1})}{1 - z^{-1}} \quad \text{تابع نقل المتحكم PI:}$$

$$L_{yy} = K(z)P(z) = \frac{r_0 b_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad \text{تابع نقل الحلقة المفتوحة:}$$

حيث تم اختصار بسط المتحكم  $(1 + \frac{r_1}{r_0} z^{-1})$  مع مقام النظام  $1 + a_1 z^{-1}$ .

$$\frac{r_1}{r_0} = a_1 \quad \text{هذا يعني أن:}$$

تابع نقل الحلقة المغلقة:

$$\Gamma(z) = \frac{K(z)P(z)}{1 + K(z)P(z)} = \frac{r_0 b_1 z^{-1}}{1 + (r_0 b_1 - 1)z^{-1}}$$

نقوم بتثبيت سلوك الحلقة المغلقة بالزمن المستمر  $\frac{1}{1 + T_o s}$  باختيار مناسب لـ  $T_o = 16.66$ . نقوم بعدها بتحويل

تابع النقل المستمر للحلقة المغلقة للزمن المتقطع كما يلي:

$$\Gamma(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} \frac{1}{1 + 16.66s} \right] = \frac{(1 - \lambda_o) z^{-1}}{1 - \lambda_o z^{-1}}; \lambda_o = e^{-T_s/16.66}$$

بالمقارنة مع العلاقة (1-3) فإن:

$$r_0 b_1 = 1 - \lambda_o \Rightarrow r_0 = \frac{1 - \lambda_o}{b_1}$$

$$\Rightarrow r_1 = a_1 r_0$$

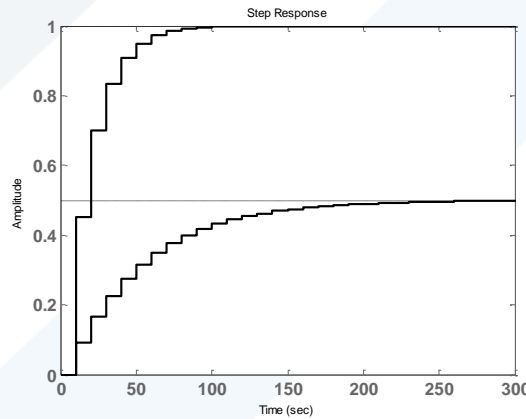
يجب الآن اختيار خطوة التقطيع التي تؤثر على قيم  $a_1, b_1, r_0, r_1$  بفرض  $T_s = 10[\text{sec}]$

$$b_1 = 0.5(1 - \lambda) = 0.0906, a_1 = -0.8187, \lambda = e^{-10/50} = 0.8187$$

$$\lambda_o = e^{-10/16.66} = 0.5487, \Rightarrow r_0 = \frac{1 - \lambda_o}{b_1} = 4.9815$$

$$\Rightarrow r_1 = a_1 r_0 = -4.0783$$

يوضح الشكل (6-3) التالي استجابة الخطوة الواحدية للنظام بدون تحكم ولحلقة المغلقة.



الشكل (6-3) استجابة الخطوة الواحدية

مثال 2-3: نظام من الدرجة الثانية له تابع النقل التالي:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.5}{(1 + 50s)(1 + 20s)} = \frac{0.5}{1 + 70s + 1000s^2}$$

باعتبار خطوة التقطيع  $T_s = 10[\text{sec}] \cong \frac{1}{3} \sqrt{1000}$  المطلوب تحديد ثوابت المتحكم PIDN من أجل سلوك الحلقة

المغلقة من الدرجة الثانية  $\left[ \frac{rd}{\text{sec}} \right] \xi_o = 0.9, \omega_o = 0.06$ .

الحل: تحويل Z للنظام مع الماسك الصفري:

$$P(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} \frac{0.5}{(1 + 50s)(1 + 20s)} \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{1}{s} \frac{0.5}{(1 + 50s)(1 + 20s)} \right]$$

$$= 0.5 \frac{(1 + \frac{\lambda_2 T_1 - \lambda_1 T_2}{T_1 - T_2} - (\lambda_1 + \lambda_2))z^{-1} + (\frac{\lambda_1 T_2 - \lambda_2 T_1}{T_1 - T_2} + \lambda_1 \lambda_2)z^{-2}}{1 - (\lambda_1 + \lambda_2)z^{-1} + \lambda_1 \lambda_2 z^{-2}}$$

$$\lambda_1 = e^{-T_s/T_1} = e^{-10/50} = 0.8187; \lambda_2 = e^{-T_s/T_2} = e^{-10/20} = 0.6065$$

بالتعويض فيما سبق:

$$P(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{0.0199z^{-1} + 0.0158z^{-2}}{1 - 1.4253z^{-1} + 0.4966z^{-2}}$$

من أجل سلوك حلقة مغلقة من الدرجة الثانية  $\left[ \frac{rd}{\text{sec}} \right]$   $\xi_o = 0.9, \omega_o = 0.06$  يكون القطبين عقديين مترافقين

القسم الحقيقي سالب وقيمته:

$$r = \xi_o \omega_o = 0.9 \times 0.06 = 0.054$$

أما القسم الوهمي:

$$c = \omega_o \sqrt{1 - \xi_o^2} = 0.06 \sqrt{1 - 0.9^2} = 0.0262$$

مقام تابع نقل الحلقة المغلقة:

$$1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$$

$$p_1 = -2e^{-rT_s} \cos(T_s c) = -1.1259$$

حيث:

$$p_2 = e^{-2rT_s} = 0.3396$$

بالتالي:

$$1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} = 1 - 1.1259z^{-1} + 0.3396z^{-2}$$

من العلاقات السابقة يكون:

$$r_2 = a_2 r_0 = 2.976, r_1 = a_1 r_0 = -8.542, r_0 = \frac{1 + p_1 + p_2}{b_1 + b_2} = 5.993$$

$$s_1 = r_0 b_2 - p_2 = -0.245$$

تابع نقل المتحكم:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})} = \frac{5.993 - 8.542z^{-1} + 2.976z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.245z^{-1})}$$

معادلة الفرق للمتحكم:

$$u(k) = 5.993 \cdot e(k) - 8.542 \cdot e(k-1)$$

$$+ 2.976 \cdot e(k-2) + 1.245 \cdot u(k-1) - 0.245 \cdot u(k-2)$$

يمكن أيضاً حساب المتحكم في الزمن المستمر ثم التحويل للزمن المتقطع كما يلي:

بفرض تم اعتماد القيم التالية لثوابت المتحكم:

المطلوب. يمكن باستخدام القوانين اللاحقة إيجاد المتحكم الرقمي  $K_p = 4.04, T_i = 60.7, T_d = 7.2, N = 0.778$ .

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})}$$

$$s_1 = -\frac{T_d}{T_d + NT_s}, r_0 = K_p \left(1 + \frac{T_s}{T_i} - Ns_1\right),$$

$$r_1 = K_p \left(s_1 \left(1 + \frac{T_s}{T_i} + 2N\right) - 1\right), r_2 = -K_p s_1 (1 + N)$$

بالتعويض:

$$s_1 = -0.4806$$

$$r_0 = 6.2158$$

$$r_1 = -9.3229$$

$$r_2 = 3.4525$$

بالتالي:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})} = \frac{6.2158 - 9.3229 z^{-1} + 3.4525 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.4806 z^{-1})}$$

معادلة الفرق للمتحكم:

$$u(k) = 6.216 \cdot e(k) - 9.323 \cdot e(k-1) + 3.453 \cdot e(k-2)$$

$$+ 1.481 \cdot u(k-1) - 0.481 \cdot u(k-2)$$

#### 6-7-5 تصميم المتحكمات بطريقة زيغلر نيكولاس

جميع المتحكمات التشابهية قابلة للتحويل إلى رقمية و الأكثر شهرة هي المتحكمات PID. هناك عدة طرق يمكن أن تتبعها لتحديد ثوابت المتحكم PID انطلاقاً من نموذج النظام المتحكم به. لكن قد لا يوجد لدينا النموذج بالتالي يكون التصميم عن طريق التجربة أو ما يسمى طريقة زيغلر نيكولاس. يمكن إضافة لما ورد سابقاً استنتاج تحويل Z للمتحكمات PID كما يلي:

تابع نقل المتحكم في الزمن المستمر:

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

تابع نقل المتحكم في الزمن المتقطع:

$$u(k) = K_p \left( e(k) + \frac{T_s}{T_i} \sum_0^k e(j) + T_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T_s} \right)$$

$$u(k) = K_p \left( e(k) + \frac{T_s}{T_i} e(k) + T_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T_s} \right) \quad \text{بالإصلاح:}$$

$$u(k+1) = K_p \left( e(k+1) + \frac{T_s}{T_i} \sum_0^{k+1} e(j) + T_d \frac{e(k+1) - e(k)}{T_s} \right) \quad \text{بالتالي:}$$



أي أن:

$$u(k+1) = K_p(e(k+1) + \frac{T_s}{T_i}(e(k+1) + e(k))) + T_d \frac{e(k+1) - e(k)}{T_s}$$

بالطرح:

$$u(k+1) - u(k) = K_p(e(k+1) - e(k)) + \frac{T_s}{T_i}e(k+1) + T_d \frac{e(k+1) - 2e(k) + e(k-1)}{T_s}$$

بالتحويل إلى المستوى Z:

$$(z-1)U(z) = K_p(z-1 + \frac{T_s}{T_i}z + T_d \frac{z-2+z^{-1}}{T_s})E(z)$$

بالإصلاح:

$$\begin{aligned} \frac{U(z)}{E(z)} &= K_p \left(1 + \frac{T_s}{T_i} \frac{z}{z-1} + T_d \frac{z-2+z^{-1}}{T_s(z-1)}\right) \\ &= K_p \left(1 + \frac{T_s}{T_i} \frac{z}{z-1} + T_d \frac{z^2 - 2z + 1}{T_s z(z-1)}\right) \\ &= K_p + K_i T_s \frac{z}{z-1} + \frac{K_d}{T_s} \frac{(z-1)}{z} \end{aligned}$$

هذا الشكل لتابع النقل لـ PID هو شكل تعليمي وما يستخدم في الصناعة مختلف قليلاً.

#### التطبيقات الصناعية لـ PID

1- الفعل التفاضلي المثالي يسبب زيادة شديدة في الضجيج العالي التردد وبالتالي نستخدم عملياً تفاضلاً مع مرشح كما يلي:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p + K_i T_s \frac{z}{z-1} + \frac{K_d}{T_s} \frac{(z-1)}{(z-a)}; a=0.1$$

2- عند تغير المرجع كإشارة خطوة واحدة تفاضلاً إشارة الخطأ بين المرجع والخرج كبيرة جداً وتساوي تقريباً مشتق نبضة ديراك. بالتالي يولد المتحكم PID إشارة تحكم بمطال كبير جداً. هذا المطال قد لا يكون مقبولاً من جهة النظام وبالتالي فالحل يكون بتطبيق فعل التفاضل على الخرج فقط.

$$U(z) = K_p E(z) + K_i T_s \frac{z}{z-1} E(z) - \frac{K_d}{T_s} \frac{(z-1)}{(z-a)} Y(z); a=0.1$$

3- نفس الملاحظات السابقة ولكن بالنسبة للفعل التناسبي وبالتالي ينتقل أيضاً الفعل التناسبي للخروج.

$$U(z) = K_i T_s \frac{z}{z-1} E(z) - \left[ K_p + \frac{K_d}{T_s} \frac{(z-1)}{(z-a)} \right] Y(z); a=0.1$$

وهو التشكيل الأفضل للمتحكم PID.

تصميم تاكاشي (Takahashi) لمتحكم PID رقمي

يعطى تابع نقل المتحكمات في Z بالعلاقات التالية:

$$PID \quad U(z) = K_i T_s \frac{z}{(z-1)} E(z) - \left[ K_p + \frac{K_d}{T_s} \frac{(z-1)}{z} \right] Y(z)$$

$$PI \quad U(z) = K_i T_s \frac{z}{(z-1)} E(z) - K_p Y(z)$$

$$P \quad U(z) = K_p e(z)$$

تكتب معادلة الفرق للأنواع الثلاثة كما يلي:

$$u(k) = u(k-1) + K_i T_s e(k) - K_p (y(k-1)$$

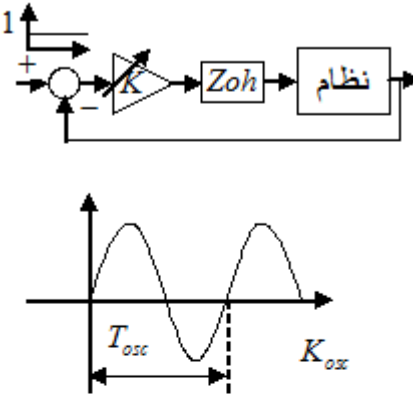
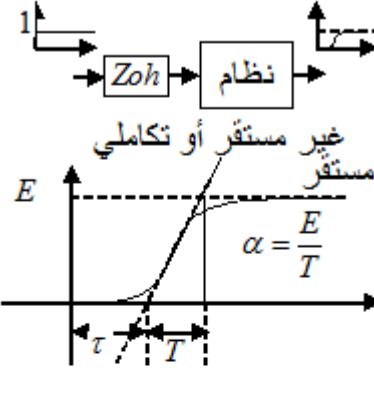
$$- y(k)) - \frac{K_d}{T_s} (y(k) - 2y(k-1) + y(k-2))$$

$$u(k) = K_p e(k)$$

كما في طريقة زيغلر نيكولاس هناك تجربتان تجربة الحلقة المفتوحة وتجربة الحلقة المغلقة. تطبق التجربتان على الأنظمة المستقرة وغير المستقرة والتكاملية كما هو موضح في الشكل (5-5).

يصغر هذا التعيير قيمة الخطأ

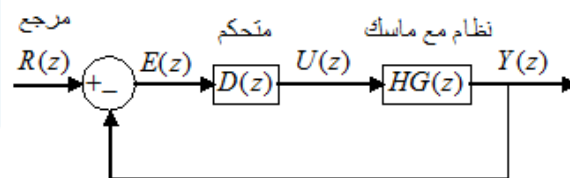
$$\sum_{k \geq 0} |e(k)|$$

	حلقة مغلقة	حلقة مفتوحة
		
P	$K_p = 0.5K_{osc}$	$K_p = \frac{1}{\alpha(\tau + T_s)}$
PI	$K_p = 0.45K_{osc} - 0.5K_iT_s$ $K_i = 0.54 \frac{K_{osc}}{T_{osc}}$	$K_p = \frac{0.9}{\alpha(\tau + 0.5T_s)} - 0.5K_iT_s$ $K_i = \frac{0.27}{\alpha(\tau + 0.5T_s)^2}$
PID	$K_p = 0.6K_{osc} - 0.5K_iT_s$ $K_i = 1.2 \frac{K_{osc}}{T_{osc}}$ $K_d = \frac{3}{40} K_{osc} T_{osc}$	$K_p = \frac{1.2}{\alpha(\tau + T_s)} - 0.5K_iT_s$ $K_i = \frac{0.6}{\alpha(\tau + 0.5T_s)^2}$ $K_d = \frac{0.5}{\alpha}$

الشكل (7-3) تصميم تاكاشي للمتحكمات PID

متحكمات رقمية أخرى غير ال PID

يمكن بشكل عام استخدام الشكل (8-3) عند تصميم المتحكمات الرقمية.



الشكل (8-3) النظام المتقطع زمنياً

يمثل  $HG(z)$  تحويل  $Z$  للنظام مسبق بماسك صفري. تابع نقل الحلقة المغلقة للنظام في الشكل (8-3) يمكن أن

يكتب كما يلي:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

عند التصميم نثبت سلوك الحلقة المغلقة على مقادير مرغوبة. يترجم ذلك بتابع نقل الحلقة المغلقة المرغوب وليكن  $T(z)$ . ثم نقوم بحساب المتحكم  $D(z)$  من العلاقة التالية:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

بإصلاح العلاقة السابقة يمكن حساب:

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{T(z)}{1 - T(z)} \quad (2-3)$$

تفيد العلاقة السابقة إذن بحساب المتحكم الرقمي بمعرفة نموذج النظام وتابع نقل الحلقة المغلقة المرغوب. يجب أن يختار المتحكم  $D(z)$  بحيث يكون مستقراً وقابل للتحقيق فيزيائياً. لا يكون  $D(z)$  قابل للتحقيق فيزيائياً إلا إذا كانت درجة المقام أعلى أو تساوي درجة البسط. سنقوم فيما يلي باستعراض عدة طرق شائعة لتصميم المتحكمات بالاعتماد على الشكل (8-3).

### 1-3-9-5 المتحكم Dead-beat

باستخدام متحكم من هذا النوع يتبع النظام المغلق دخلاً كخطوة واحدة ولكن بتأخير زمني لخطوة تقطيع أو أكثر. هذا يعني أن استجابة الخرج يجب أن تساوي الواحد في أية لحظة تقطيع بعد تطبيق دخل تابع خطوة واحدة. تابع النقل للحلقة المغلقة المطلوب يكون إذن:

$$T(z) = z^{-k}$$

من العلاقة (2-3) يكون المتحكم:

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{T(z)}{1 - T(z)} = \frac{1}{HG(z)} \frac{z^{-k}}{1 - z^{-k}}$$

يتم تحديد قيمة  $k$  بحيث تكون درجة المقام أعلى من البسط.

مثال 3-3: ليكن تابع نقل الحلقة المفتوحة للنظام  $G(s) = \frac{e^{-2s}}{1+10s}$  صمم متحكم رقمي Dead-beat للنظام بفرض

$$T_s = 1[\text{sec}]$$

الحل: تابع نقل النظام مع ماسك صفري:

$$HG(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} \frac{e^{-2s}}{1 + 10s} \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{1}{s} \frac{e^{-2s}}{1 + 10s} \right]$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1}) z^{-2} Z \left[ \frac{1}{s(1 + 10s)} \right] = (1 - z^{-1}) z^{-2} Z \left[ \frac{1}{s \left( \frac{1}{10} + s \right)} \right]$$

من جداول تحويل  $Z$  نحصل على:

$$HG(z) = (1 - z^{-1}) z^{-2} \frac{z(1 - e^{-0.1})}{(z-1)(z - e^{-0.1})} = z^{-3} \frac{(1 - e^{-0.1})}{1 - e^{-0.1} z^{-1}}$$

$$HG(z) = \frac{0.095z^{-3}}{1-0.904z^{-1}} \quad (3-3)$$

من العلاقة (3-3) و (2-3):

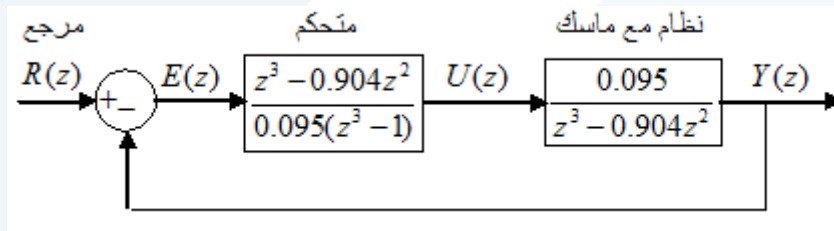
$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{T(z)}{1-T(z)} = \frac{1-0.904z^{-1}}{0.095z^{-3}} \frac{z^{-k}}{1-z^{-k}}$$

$$D(z) = \frac{z^{-k} - 0.904z^{-1-k}}{0.095z^{-3} - 0.095z^{-3-k}}$$

حتى تكون درجة المقام أعلى من البسط يجب أن تكون قيمة  $k \geq 3$  (درجة أعلى حد في المقام) نختار قيمة  $k = 3$  فنحصل على العلاقة التالية:

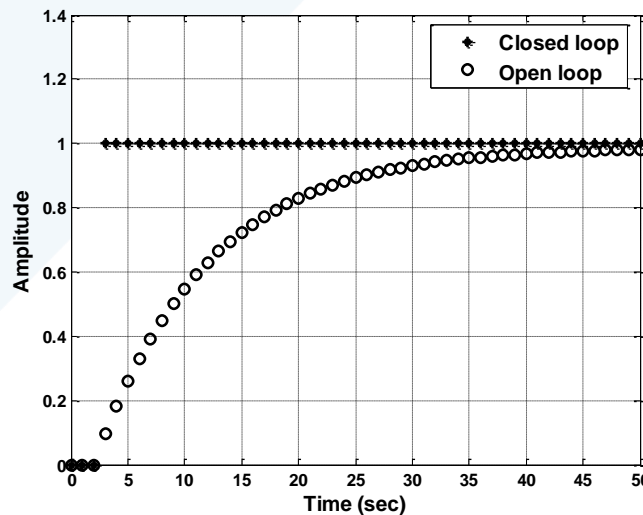
$$D(z) = \frac{z^{-3} - 0.904z^{-4}}{0.095z^{-3} - 0.095z^{-6}} = \frac{z^3 - 0.904z^2}{0.095(z^3 - 1)}$$

يبين الشكل (9-3) المخطط الصندوقي للنظام مع المتحكم.

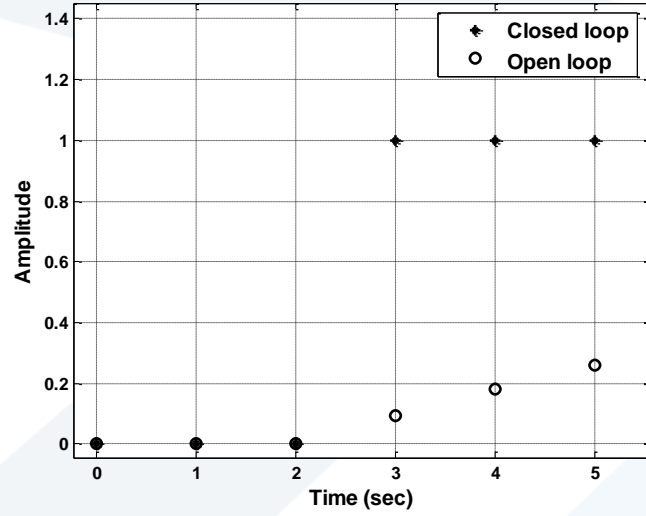


الشكل (9-3) المخطط الصندوقي للنظام مع المتحكم

يبين الشكل (10-3) الاستجابة الزمنية لخرج النظام الموضح في الشكل (9-3) لدخل خطوة واحدة. يلاحظ أن الخرج مع تحكم يصل إلى القيمة 1 بعد 3[sec] أي في لحظة التقطيع الثالثة ويبقى على هذه القيمة. أما من دون تحكم فإن النظام يملك حالة عابرة طويلة نسبياً أكثر من 50 ثانية وتأخير زمني مقداره 3 ثوان.

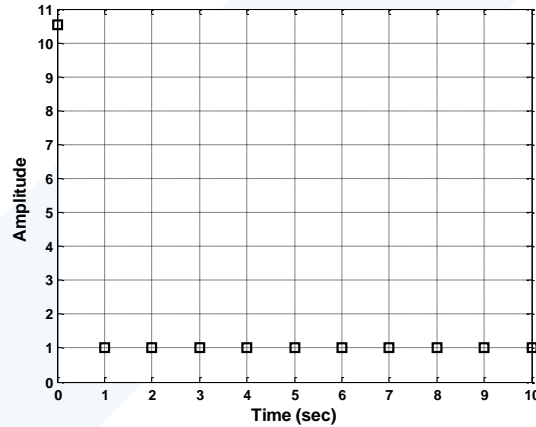


الشكل (a-10-3) استجابة الخطوة الواحدة للحلقة المغلقة



الشكل (b-10-3) تكبير استجابة الخطوة الواحدية للحلقة المغلقة

يجب الإشارة إلى أن الخرج يساوي الواحد في لحظة التقطيع ولكن خلال فترة التقطيع قد يكون الخرج مهتزاً. يوضح الشكل (11-3) إشارة التحكم المطبقة على دخل النظام (مع الماسك).



الشكل (11-3) إشارة التحكم

نلاحظ أن المتحكم يعطي إشارة تحكم ممتازة إلا أن هذه الإشارة قد تكون غير مقبولة من النظام أو قد لا يمكن توليدها بسبب إشباع التحكم وذلك في الواقع العملي.

### 2-3-9-5 متحكم Dahlin

نحصل على المتحكم Dahlin من إجراء تعديلات على المتحكم Dead-beat و ينتج استجابة أسية بزمن ميت أكثر نعومة من الاستجابة في حالة ال Dead-beat الشكل (12-3).

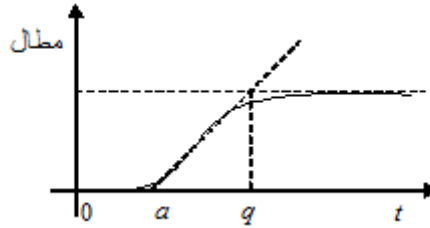
تابع نقل الحلقة المغلقة المرغوب:

$$T(s) = \frac{e^{-as}}{1+qs}$$

خرج الحلقة المغلقة عند دخل خطوة واحدة:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{e^{-as}}{1+qs}$$

حيث نختار قيمة  $a, q$  من أجل الحصول على الاستجابة المطلوبة حسب الشكل (12-3).



الشكل (12-3) استجابة الخرج لتابع الخطوة الواحدة في الدخل

خرج الحلقة المغلقة المكافئ في المستوي  $Z$  من الجداول وذلك بوضع  $a = kT_s$  الذي يحدد التأخير الزمني.

$$Y(z) = \frac{z^{-k-1}(1-e^{-T_s/q})}{(1-z^{-1})(1-e^{-T_s/q}z^{-1})}$$

يتم اختيار  $k$  بحيث تكون درجة المقام أعلى أو تساوي درجة البسط. يتم اختيار قيمة  $q$  من مواصفات الأداء المطلوبة للحلقة المغلقة.

ويكون تابع النقل للحلقة المغلقة من الشكل:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z^{-k-1}(1-e^{-T_s/q})}{(1-z^{-1})(1-e^{-T_s/q}z^{-1})} \frac{(1-z^{-1})}{1} = \frac{z^{-k-1}(1-e^{-T_s/q})}{(1-e^{-T_s/q}z^{-1})}$$

نحصل على تابع نقل المتحكم من العلاقة (5-7) كما يلي:

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{T(z)}{1-T(z)} = \frac{1}{HG(z)} \frac{z^{-k-1}(1-e^{-T_s/q})}{1 - \frac{z^{-k-1}(1-e^{-T_s/q})}{(1-e^{-T_s/q}z^{-1})}}$$

$$= \frac{1}{HG(z)} \frac{z^{-k-1}(1-e^{-T_s/q})}{1 - e^{-T_s/q}z^{-1} - (1-e^{-T_s/q})z^{-k-1}}$$

مثال 4-3: ليكن تابع نقل الحلقة المفتوحة للنظام  $G(s) = \frac{e^{-2s}}{1+10s}$  صمم متحكم رقمي Dahlin للنظام بفرض

$$T_s = 1[\text{sec}]$$

الحل: تابع نقل النظام مع ماسك صفري:

$$HG(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} \frac{e^{-2s}}{1 + 10s} \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{1}{s} \frac{e^{-2s}}{1 + 10s} \right]$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1}) z^{-2} Z \left[ \frac{1}{s(1 + 10s)} \right] = (1 - z^{-1}) z^{-2} Z \left[ \frac{\frac{1}{10}}{s \left( \frac{1}{10} + s \right)} \right]$$

من جداول تحويل Z نحصل على:

$$HG(z) = (1 - z^{-1}) z^{-2} \frac{z(1 - e^{-0.1})}{(z-1)(z - e^{-0.1})} = z^{-3} \frac{(1 - e^{-0.1})}{1 - e^{-0.1} z^{-1}}$$

$$HG(z) = \frac{0.095 z^{-3}}{1 - 0.904 z^{-1}}$$

نختار من أجل الحلقة المغلقة  $q = 1$  أي أن الحلقة المغلقة أسرع بعشر مرات من النظام.  
تابع نقل المتحكم حسب العلاقة (3-3):

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{z^{-k-1} (1 - e^{-T_s/q})}{1 - e^{-T_s/q} z^{-1} - (1 - e^{-T_s/q}) z^{-k-1}}$$

$$= \frac{1 - 0.904 z^{-1}}{0.095 z^{-3}} \frac{z^{-k-1} (1 - e^{-1})}{1 - e^{-1} z^{-1} - (1 - e^{-1}) z^{-k-1}}$$

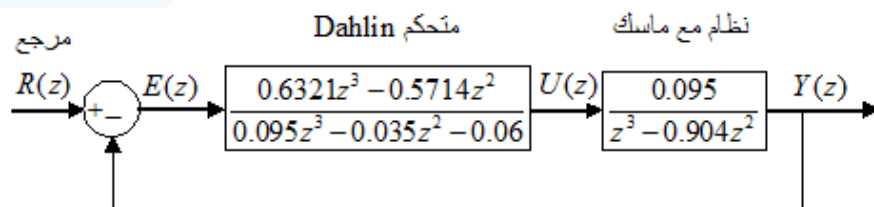
$$D(z) = \frac{1 - 0.904 z^{-1}}{0.095 z^{-3}} \frac{0.6321 z^{-k-1}}{1 - 0.3679 z^{-1} - 0.6321 z^{-k-1}}$$

نوجد قيمة  $k$  بحيث تكون درجة المقام أعلى أو تساوي درجة البسط كما يلي: أعلى درجة بالمقام 3 - وأعلى درجة بالبسط  $-k - 1 = -3 \Rightarrow k = 2$  بالمساواة والإصلاح .

هذا يعني:

$$D(z) = \frac{1 - 0.904 z^{-1}}{0.095 z^{-3}} \frac{0.6321 z^{-3}}{1 - 0.3679 z^{-1} - 0.6321 z^{-3}} = \frac{0.6321 z^3 - 0.5714 z^2}{0.095 z^3 - 0.035 z^2 - 0.06}$$

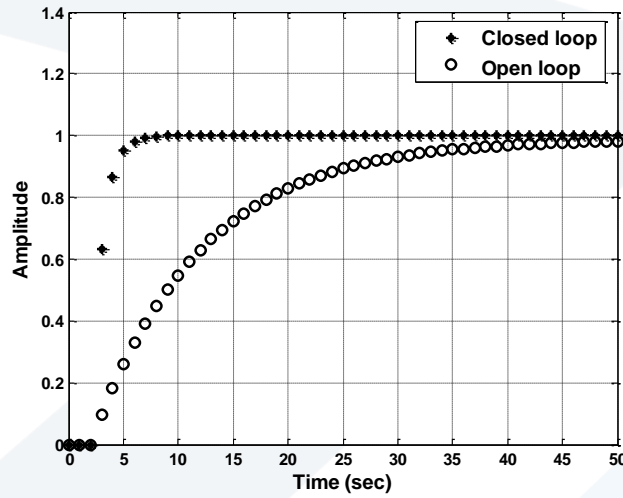
المخطط الصندوقي للحلقة المغلقة موضح بالشكل (13-3) التالي:



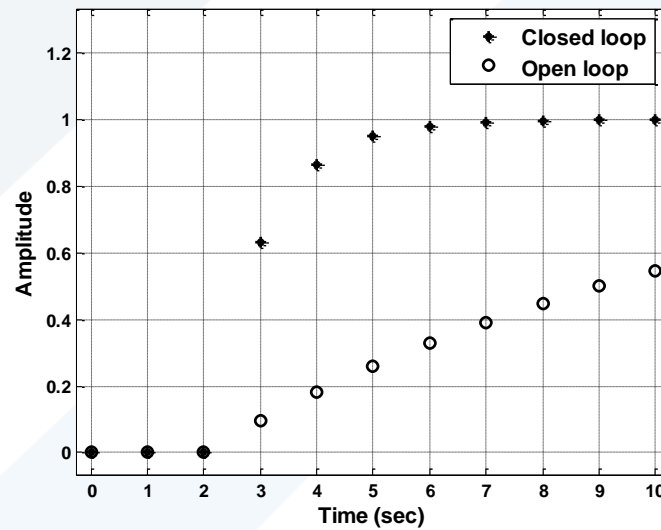
الشكل (13-3) مخطط الحلقة المغلقة مع متحكم Dahlin

الاستجابة الزمنية المتقطعة للحلقة المغلقة ولها شكل أسّي واضح الشكل (14-3).



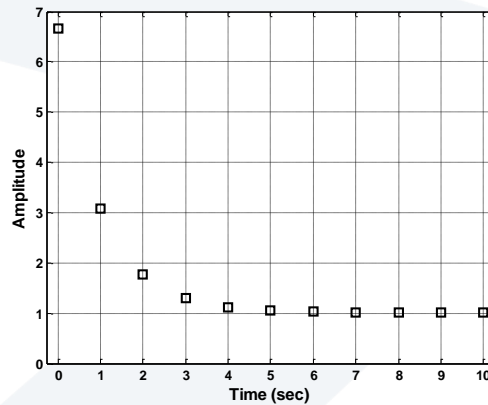


الشكل (a-14-3) استجابة الحلقة المغلقة مع متحكم Dahlin



الشكل (b-14-3) استجابة الحلقة المغلقة مع متحكم Dahlin

يلاحظ التأخير الزمني في استجابة الحلقة المغلقة وقدره  $a = kT_s = 2(\text{sec})$ .  
 إشارة التحكم المتقطعة موضحة بالشكل (3-15) التالي ويلاحظ أنها مقبولة أكثر من ناحية المطال حيث تساوي القيمة العظمى للمطال 7 بدل أكثر من 10 في حالة المتحكم Dead-beat.



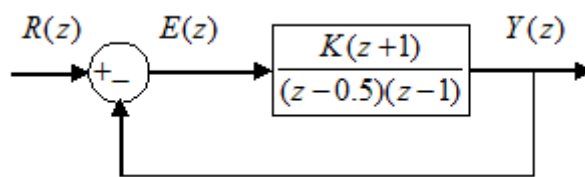
الشكل (15-3) إشارة التحكم المتقطعة

### 3-4-9-5 الطريقة التخطيطية في التحكم بتوضع الأقطاب

تعتمد الطريقة التخطيطية على مسار الجذور في تصميم المتحكمات (المعوضات (Compensators)). باستخدام مسار الجذور يمكن توضع أقطاب الحلقة المغلقة للنظام بمجرد تغيير الربح  $K$  للحلقة المفتوحة. إلا أن ذلك قد لا يكفي وعند ذلك نحتاج لاستخدام المعوضات الديناميكية (متأخر (Lag) - متقدم (Lead) - متأخر متقدم (Lead-Lag)). من أجل نظام من الدرجة الأولى يمكن فقط تغيير الثابت الزمني للحلقة المغلقة بتغيير قيمة ربح الحلقة المفتوحة. بالنسبة لنظام من الدرجة الثانية يؤدي تغيير ربح الحلقة المفتوحة إلى تغيير قيم معامل التخماد  $\zeta$  و التردد الطبيعي غير المتخامد  $\omega_n$ . أما عندما نريد توضع الأقطاب في أماكن محددة فإننا نحتاج فعلاً لاستخدام المعوضات وتغيير الربح وحده لا يكفي.

مثال 3-5:

لنأخذ النظام في الشكل (16-3). أوجد الربح  $K$  الذي يؤدي إلى معامل تخامد للحلقة المغلقة  $\zeta = 0.7$ .



الشكل (16-3) المخطط الصندوقي

الحل:

$$\frac{(z+1)}{(z-0.5)(z-1)}$$

نرسم باستخدام برنامج MATLAB مسار جذور الحلقة المغلقة للنظام

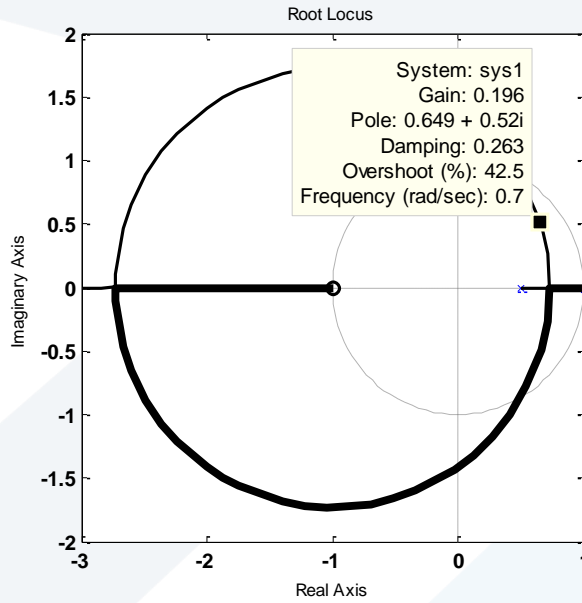
$$a=[1 \ 1]$$

$$b=\text{conv}([1 \ -1],[1 \ -0.5])$$

$$\text{sys1}=\text{tf}(a,b,1)$$

$$\text{rlocus}(\text{sys1})$$

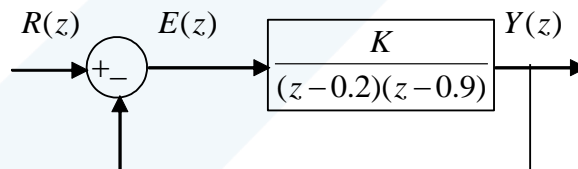
قيمة الربح اللازم للحصول على المواصفات المطلوبة هي  $K = 0.196$  وذلك مباشرة من الشكل (17-3).



الشكل (17-3) مسار جذور النظام بحلقة مغلقة

مثال 6-3:

ليكن لدينا النظام الموضح في المخطط الصندوقي في الشكل (18-3). المطلوب توزيع أقطاب النظام بحلقة مغلقة في  $z_{1,2} = 0.3 \pm j0.3$ .

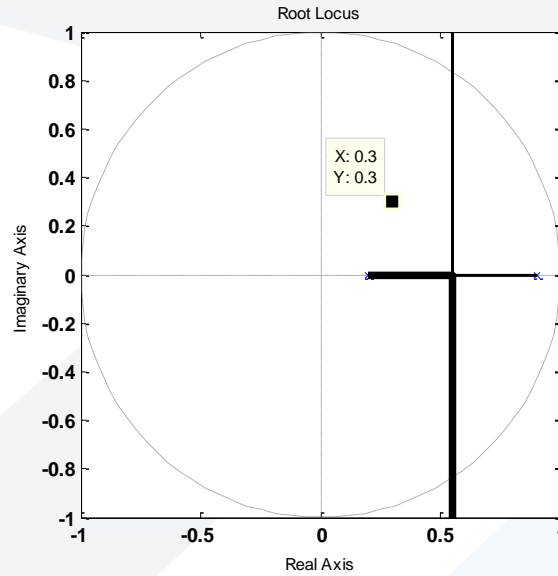


الشكل (18-3) المخطط الصندوقي للنظام

الحل:

في هذا المثال سنلاحظ أننا بحاجة لاستخدام معوض لجعل مسار الجذور يمر من الأقطاب المفروضة. نرسم مسار

الجذور للنظام  $\frac{1}{(z-0.2)(z-0.9)}$  فنحصل على الشكل (19-3) التالي.



الشكل (19-3) مسار جذور النظام بدون معوض

نلاحظ أن تغيير الربح وحده لا يكفي للحصول على موقع الأقطاب المطلوب لذلك نحتاج إلى معوض سنقوم بحسابه كما يلي:

تحديد النقص بالزاوية بعد حساب زاوية تابع النقل عند الأقطاب الجديدة:

$$\begin{aligned}\angle G(z) &= -\angle(0.3 + j0.3 - 0.2) - \angle(0.3 + j0.3 - 0.9) \\ &= -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{0.3}{0.1}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{0.3}{-0.6}\right) = -45^\circ\end{aligned}$$

بما أن مجموع الزوايا عند الأقطاب الجديدة يجب أن يكون من مضاعفات فردية لـ  $-180^\circ$  فإن المعوض يجب أن يساهم بزاوية  $-135^\circ - (-45^\circ) = -180^\circ$ .

يتم الحصول على الزاوية السابقة باستخدام معوض من الشكل  $D(z) = \frac{z-n}{z-p}$

$$\begin{aligned}\angle D(z) &= \angle(0.3 + j0.3 - n) - \angle(0.3 + j0.3 - p) \\ &= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{0.3}{0.3-n}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{0.3}{0.3-p}\right) = -135^\circ\end{aligned}$$

يوجد عدة قيم للزوج  $n, p$  تحقق المعادلة السابقة. نختار على سبيل المثال  $n = 0.5$  عندئذ:

$$\begin{aligned}124^\circ - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{0.3}{0.3-p}\right) &= -135^\circ \\ p &= 0.242\end{aligned}$$

ويصبح تابع نقل المعوض إذن  $D(z) = \frac{z-0.5}{z-0.242}$  أي أن المعوض يضيف صفراً وقطباً ويعدل مسار الجذور كما

في الشكل (5-89). يلاحظ أن مسار الجذور للنظام مع المعوض يمر بالأقطاب الجديدة  $z_{1,2} = 0.3 \pm j0.3$ . أما قيمة

الرياح التي تجعل  $z_{1,2} = 0.3 \pm j0.3$  أقطاباً للحلقة المغلقة فهي تساوي  $K = 0.178$ . يمكن استنتاج قيمة الرياح السابقة من مخطط مسار الجذور باستخدام MATLAB أو تحسب مباشرة من شرط المطال كما يلي:

$$\left| k \frac{z-0.5}{z-0.242} \frac{1}{(z-0.2)(z-0.9)} \right|_{z=0.3+j0.3} = 1$$

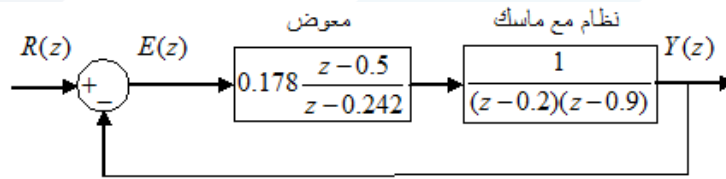
$$k = \frac{1}{\left| \frac{z-0.5}{z-0.242} \frac{1}{(z-0.2)(z-0.9)} \right|_{z=0.3+j0.3}}$$

$$= \frac{1}{\left| \frac{z-0.5}{z-0.242} \frac{1}{(z-0.2)(z-0.9)} \right|_{z=0.3+j0.3}} = \frac{1}{5.563} = 0.178$$

تابع نقل المعوض إذن:

$$D(z) = 0.178 \frac{z-0.5}{z-0.242}$$

يوضح الشكل (20-3) التالي المخطط الصندوقي للنظام مع المعوض.

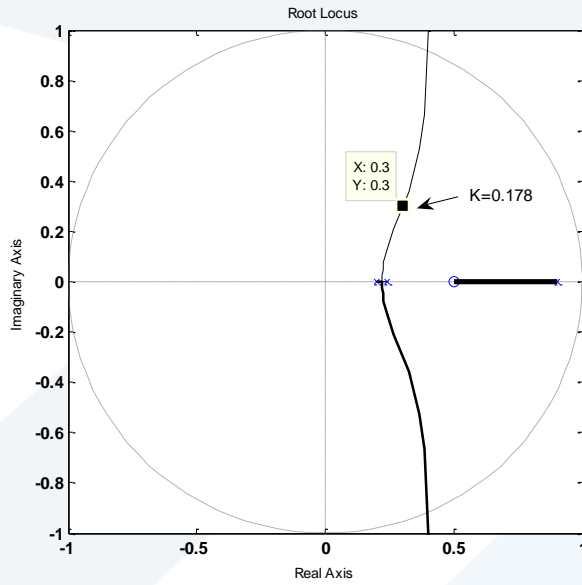


الشكل (20-3) المخطط الصندوقي للنظام مع المعوض

نرسم باستخدام MATLAB مخطط مسار الجذور للنظام مع المعوض بحلقة مفتوحة:

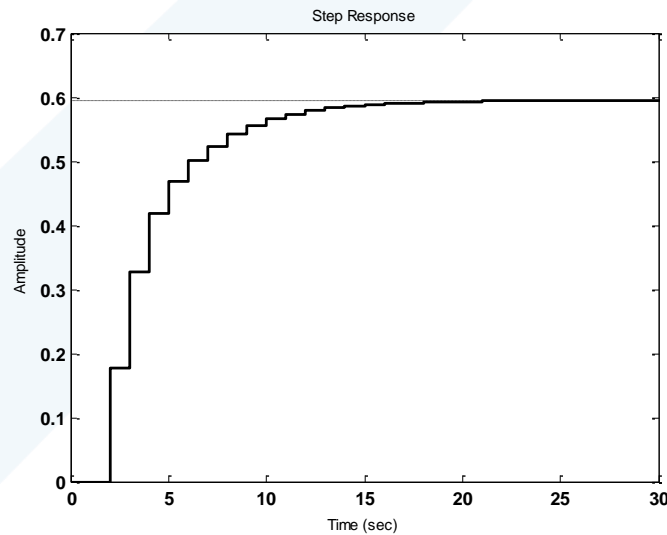
$$\frac{z-0.5}{z-0.242} \frac{1}{(z-0.2)(z-0.9)}$$

فنحصل على الشكل (21-3) باختبار الأقطاب  $z_{1,2} = 0.3 \pm j0.3$  يمكن الحصول على الرياح الموافق لهذا التوضع للأقطاب.



الشكل (21-3) مسار جذور النظام مع معوض

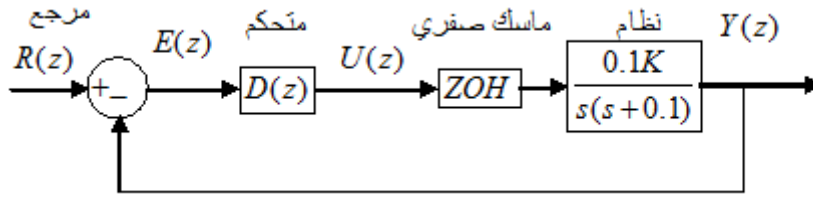
الاستجابة الزمنية للنظام بحلقة مغلقة مع معوض موضحة بالشكل (22-3) حيث يلاحظ بوضوح وجود خطأ حالة مستقرة.



الشكل (22-3) استجابة الخطوة الواحدية في الزمن المستمر للنظام بحلقة مغلقة مع معوض

مثال 7-3:

ليكن لدينا النظام بالشكل (23-3) و المطلوب تصميم متحكم لهذا النظام مع تجاوز أعظمي مئوي أقل من 17% و زمن استقرار  $t_s \leq 10$ [sec] بفرض أن خطوة التقطيع  $T_s = 1$ [sec].



الشكل (23-3) المخطط الصندوقي

الحل:

نوجد أقطاب النظام بحلقة مغلقة في المستوي  $Z$  كما يلي:

من أجل:

$$\xi \geq 0.5 \text{ فإن } M_p \leq 17\%$$

$$t_s \leq 10 \text{ [sec] يعني:}$$

$$\xi \omega_n \geq \frac{4.6}{t_s} \Rightarrow \omega_n \geq 0.92$$

$$\xi = 0.6, \omega_d = 3 \frac{\text{rad}}{s} \Rightarrow s_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_d$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

بالتحويل للمستوي  $Z$ :

$$z_{1,2} = e^{-\xi \omega_n T_s} (\cos(T_s \omega_d) \pm j \sin(T_s \omega_d)) = 0.44 \pm j 0.3451$$

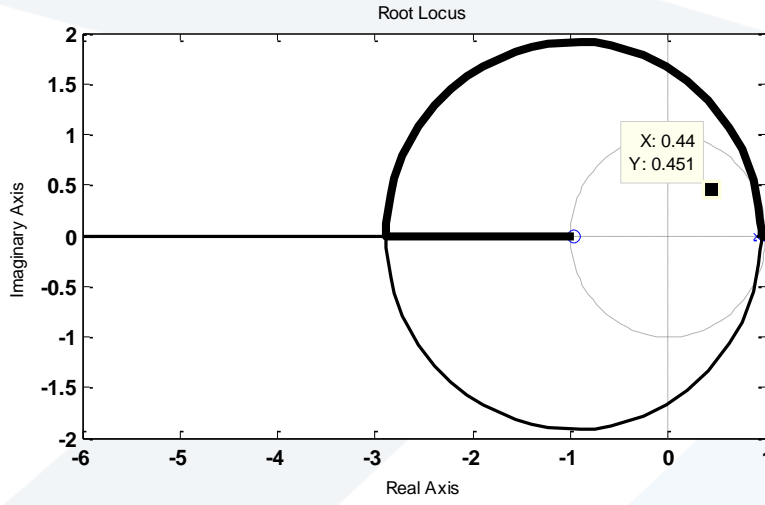
قطبين عقدين مترافقين:

تحويل للنظام مع الماسك الصفري:

$$HG(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} \frac{0.1k}{s(s+0.1)} \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{0.1k}{s^2(s+0.1)} \right]$$

$$HG(z) = \frac{0.00484k(z + 0.9672)}{(z-1)(z-0.9048)}$$

نرسم باستخدام MATLAB مسار الجذور للنظام بدون معوض كما في الشكل (24-3).



الشكل (24-3) مسار الجذور للنظام

واضح أن تغيير الريج وحده لا يكفي للوصول للأقطاب المرغوبة بل يلزم استخدام معوض:

$$D(z) = \frac{z - n}{z - p}$$

تحديد النقص بالزاوية بعد حساب زاوية تابع النقل عند الأقطاب الجديدة:

$$\angle G(z) = \angle(0.44 + j0.451 + 0.9672) - \angle(0.44 + j0.451 - 1) - \angle(0.44 + j0.451 - 0.9048)$$

$$\angle G(z) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{0.451}{1.4082}\right) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{0.451}{0.559}\right) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{0.451}{0.4638}\right) = 101^\circ$$

بما أن مجموع الزوايا عند الأقطاب الجديدة يجب أن يكون من مضاعفات فردية لـ  $180^\circ$  فإن المعوض يجب أن يساهم بزاوية  $180^\circ - 101^\circ = 79^\circ$ .

يتم الحصول على الزاوية السابقة باستخدام معوض من الشكل:

$$D(z) = \frac{z - n}{z - p}$$

نحسب الزاوية:

$$\angle D(z) = \angle(0.44 + j0.451 - n) - \angle(0.44 + j0.451 - p)$$

$$\angle D(z) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{0.451}{0.44 - n}\right) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{0.451}{0.44 - p}\right) = 79^\circ$$

يوجد عدة قيم للزوج  $n, p$  تحقق المعادلة السابقة. نختار على سبيل المثال  $n = 0.6$  عندئذ:

$$109^\circ - \text{tg}^{-1}\left(\frac{0.451}{0.44 - p}\right) = 79^\circ$$

$$p = -0.34$$

ويكون تابع نقل المعوض إذن:



$$D(z) = k \frac{z-0.6}{z+0.34}$$

أي أن المعوض يضيف صفراً وقطباً ويعدل مسار الجذور كما في الشكل (25-3). يلاحظ أن مسار الجذور للنظام مع المعوض يمر بالأقطاب الجديدة  $z_{1,2} = 0.44 \pm j0.451$ . أما قيمة الربح التي تجعل  $z_{1,2} = 0.44 \pm j0.451$  أقطاباً للحلقة المغلقة فهي تساوي  $k = 122.6$ . يمكن استنتاج قيمة الربح السابقة من مخطط مسار الجذور باستخدام الـ MATLAB أو تحسب مباشرة من شرط المطال كما يلي:

$$\left| K \frac{z-0.6}{z+0.34} \frac{(z+0.9672)}{(z-1)(z-0.9048)} \right|_{z=0.44+j0.451} = 1$$

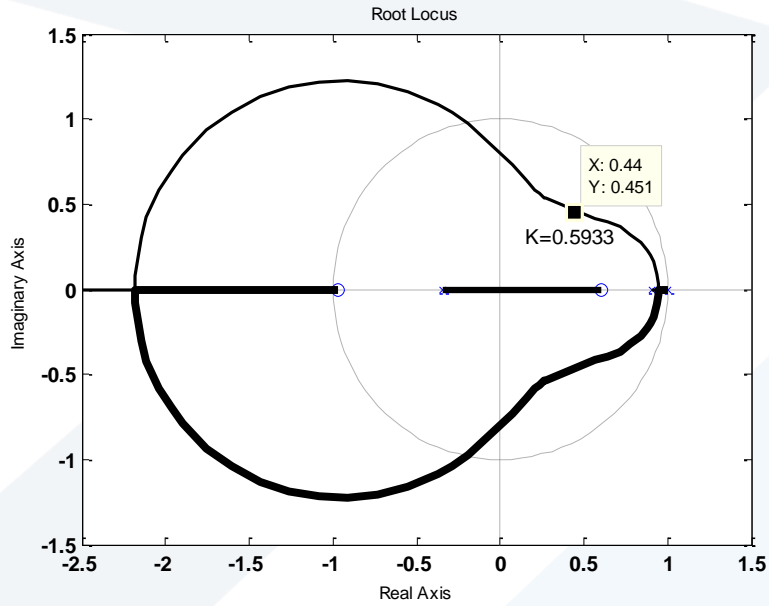
$$K = \frac{1}{\left| \frac{z-0.6}{z+0.34} \frac{(z+0.9672)}{(z-1)(z-0.9048)} \right|_{z=0.44+j0.451}} = 0.00484k = \frac{1}{1.66} = 0.5933$$

$$\Rightarrow k = 122.6$$

تابع نقل المعوض مع النظام إذن:

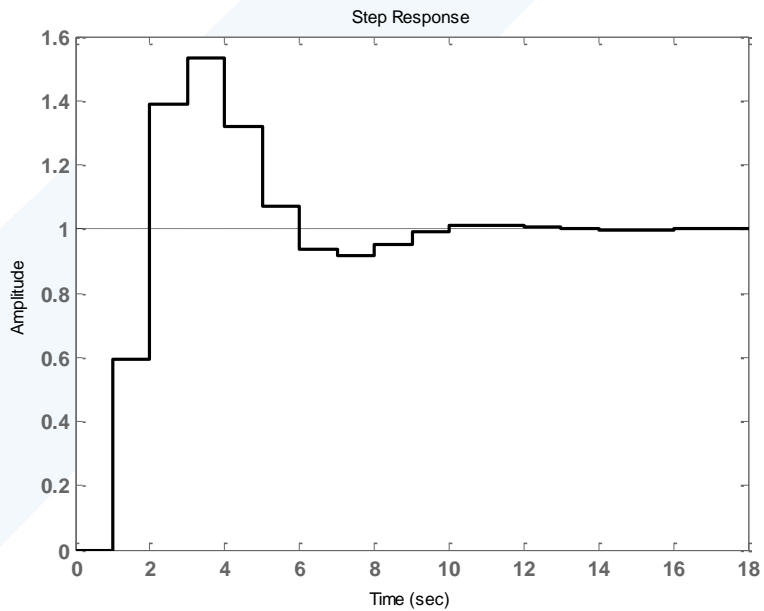
$$DHG(z) = 0.5933 \frac{z-0.6}{z+0.34} \frac{(z+0.9672)}{(z-1)(z-0.9048)}$$

نرسم مسار الجذور للنظام مع المعوض كما في الشكل (25-3) التالي نلاحظ أن مسار الجذور الجديد يمر من أقطاب الحلقة المغلقة المرغوبة.



الشكل (25-3) مسار الجذور للنظام مع المعوض

الاستجابة الزمنية لدخل خطوة واحدة للنظام مع المعوض بحلقة مغلقة موضحة بالشكل (26-3) التالي. حيث يلاحظ أن التجاوز الأعظم أقل من 17% و زمن الاستقرار أقل من 10 ثوان.



الشكل (26-3) استجابة النظام بحلقة مغلقة في الزمن المستمر