المحاضرة الرابعة

التمثيل في فضاء الحالة

د. نسمت أبو طبق

الفقرات الرئيسية

مقدمة

تمثيل الأنظمة في فضاء الحالة في الزمن المستمر والمتقطع

ايجاد تمثيل فضاء الحالة من المخطط الصندوقي

العلاقة بين تمثيل فضاء الحالة وتوابع النقل

حل معادلة الحالة وتقطيع معادلة الحالة

عدم وحدانية تمثيل فضاء الحالة

الصيغ المميزة لمعادلة الحالة

التمثيل في فضاء الحالة

مقدمة

سنقوم في هذا الفصل بدراسة تمثيل الأنظمة المتقطعة في فضاء الحالة حيث سنعرض أولاً الشكل العام للتمثيل في فضاء الحالة ثم كيفية الوصول لهذا التمثيل. سنقوم أيضاً بعرض كيفية حل معادلة الحالة المتقطعة ومن ثم تقطيع معادلة الحالة المستمرة زمنياً.

تمثيل الأنظمة المتقطعة في فضاء الحالة

Discrete Time Systems State-Space Representation

إن التمثيل في فضاء الحالة مناسب للأنظمة متعددة الدخل متعددة الخرج (MIMO) أو (Multi-Input Multi-Output). و يصلح هذا التمثيل للأنظمة الخطية الثابتة زمنياً و المتغيرة زمنياً.

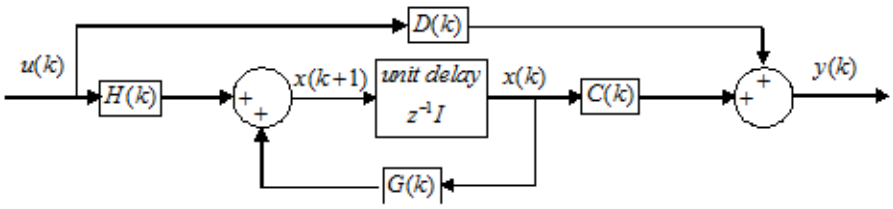
إن الشكل العام لتمثيل الأنظمة الخطية المتقطعة المتغيرة زمنياً في فضاء الحالة هو:

$$x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k)$$
$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k)$$

حيث: $x(k) = x(kT_s)$ شعاع متغيرات الحالة (State Vector) أو اختصاراً شعاع الحالة، $y(k)$ شعاع الخرج (Output Vector)، $u(k)$ شعاع الدخل (Input Vector). أما $G(k) = G(kT_s)$ فتسمى مصفوفة الحالة (State Matrix)، $H(k)$ مصفوفة التحكم (Control Matrix)، $C(k)$ مصفوفة الخرج، $D(k)$ مصفوفة الانتقال بين الدخل و الخرج. نلاحظ أن المصفوفات السابقة تتغير مع الزمن لذلك سميت الأنظمة المتغيرة زمنياً. لن ندرس هنا هذه الأنظمة بل تقتصر دراستنا على الأنظمة الثابتة (Invariant) زمنياً. يعطى الشكل العام لتمثيل فضاء الحالة للأنظمة الرقمية الثابتة زمنياً بالعلاقة (1) التالية:

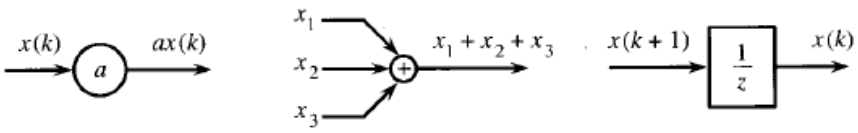
$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad (1)$$

يمثل الشكل (1) المخطط الصندوقي لتمثيل فضاء الحالة في الزمن المتقطع.



الشكل (1) المخطط الصندوقي لتمثيل فضاء الحالة في الزمن المتقطع

يعتمد التمثيل بمخطط صندوقي على العناصر الثلاثة التالية: ربح (جداء) بمقدار a أكبر أو أصغر من الواحد، الجمع أو الطرح، التأخير الزمني نحصل من خلاله على القيمة السابقة للمتحول من القيمة الحالية.



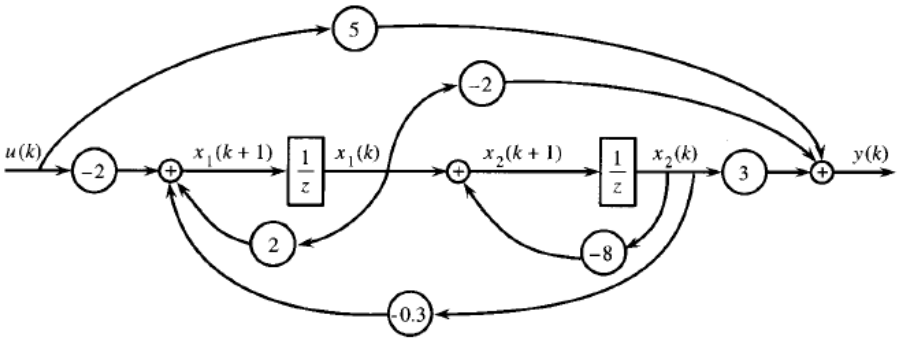
الشكل (2) العناصر الأساسية في المخطط الصندوقي

مثال 1:

يوضح الشكل (3) التالي المخطط الصندوقي الموافق لمعادلة فضاء الحالة التالية

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -0.3 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + 5u(k)$$



الشكل (3)المخطط الصندوقي الموافق لمعادلة فضاء الحالة

تمثيل فضاء الحالة في الزمن المستمر:

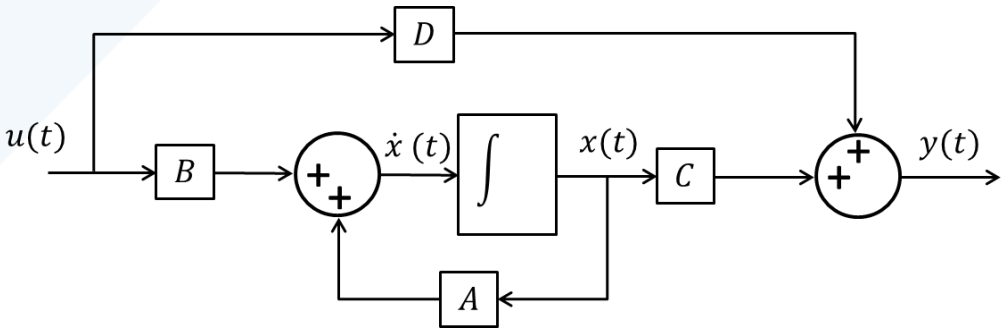
إن الشكل العام لتمثيل الأنظمة الخطية المستمرة المتغيرة زمنياً في فضاء الحالة هو:

$$\dot{x}(t) = A(t).x(t) + B(t).u(t)$$
$$y(t) = C(t).x(t) + D(t).u(t)$$

أما في الأنظمة الثابتة زمنياً فتكون المصفوفات غير تابعة للزمن:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B.u(t)$$
$$y(t) = C.x(t) + D.u(t)$$

أما المخطط الصندوقي الموافق للتمثيل في الزمن المستمر:



الشكل (4) المخطط الصندوقي لتمثيل فضاء الحالة المستمر

الحصول على تمثيل فضاء الحالة

عندما يكون النظام ممثلاً بمعادلة الفرق يمكن الانتقال إلى تمثيل فضاء الحالة و ذلك تحليلياً بإتباع مجموعة من الخطوات. يمكن هنا أن نميز حالتين لهما علاقة بشكل معادلة الفرق.

أولاً- تابع الدخل القسري بحد واحد

في هذه الحالة يكون لمعادلة الفرق الشكل التالي:

$y(k+n)+a_1y(k+n-1)+a_2y(k+n-2)+\cdots+a_{n-1}y(k+1)+a_ny(k)=bu(k)$ لإيجاد تمثيل فضاء الحالة نتبع الخطوات التالية:

نفرض $x_1(k)=y(k)$

$$x_1(k+1)=x_2(k)=y(k+1)$$
$$x_2(k+1)=x_3(k)=y(k+2)$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1}(k+1)=x_n(k)=y(k+n-1)$$
$$x_n(k+1)=-a_1x_n(k)-a_2x_{n-1}(k)-\cdots-a_nx_1(k)+bu(k)=y(k+n)$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلات السابقة بالشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}[u(k)]$$

$$[y(k)]=[1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

أو بالشكل المختصر:

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$$
$$y(k)=Cx(k)$$

ثانياً- تابع الدخل القسري بعدة حدود

في هذه الحالة يكون لمعادلة الفرق الشكل التالي:

$$y(k+n)+a_1y(k+n-1)+a_2y(k+n-2)+\cdots+a_{n-1}y(k+1)+a_ny(k)=$$
$$b_0u(k+n)+b_1u(k+n-1)+b_2u(k+n-2)+\cdots+b_{m-1}u(k+1)+b_mu(k)$$

لإيجاد تمثيل فضاء الحالة نتبع الخطوات التالية:

نفرض $x_1(k)=y(k)-h_0u(k)$

$$x_1(k+1)=x_2(k)+h_1u(k)$$
$$x_2(k+1)=x_3(k)+h_2u(k)$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1}(k+1)=x_n(k)+h_{n-1}u(k)$$
$$x_n(k+1)=-a_1x_n(k)-a_2x_{n-1}(k)-\cdots-a_nx_1(k)+h_nu(k)$$

حيث:

$$h_0=b_0$$
$$h_1=b_1-a_1h_0$$
$$h_2=b_2-a_1h_1-a_2h_0$$
$$\vdots$$
$$h_n=b_n-a_1h_{n-1}-\cdots-a_{n-1}h_1-a_nh_0$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلات السابقة بالشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\\vdots\\x_{n-1}(k+1)\\x_n(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&0\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\-a_n&-a_{n-1}&\cdots&-a_2&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\\vdots\\x_{n-1}(k)\\x_n(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_{n-1}\\h_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(k)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\\vdots\\x_{n-1}(k)\\x_n(k)\end{bmatrix}+h_0u(k)$$

أو بالشكل المختصر:

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$$
$$y(k)=Cx(k)+Du(k)$$

تتحدد الشروط الابتدائية من العلاقات التالية:

$$x_1(0)=y(0)-h_0u(0)$$
$$x_2(0)=y(1)-h_0u(1)-h_1u(0)$$

$$x_3(0) = y(2) - h_0u(2) - h_1u(1) - h_2u(0)$$

$$\vdots$$

$$x_n(0) = y(n) - h_0u(n-1) - h_1u(n-2) - \cdots - h_{n-2}u(1) - h_{n-2}u(0)$$

مثال 2:

أوجد تمثيل فضاء الحالة للنظام التالي:

$$y(k+2) + y(k+1) + 0.16y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

الحل:

$$h_0 = b_0 = 0$$

$$h_1 = b_1 - a_1h_0 = 1 - 1\times 0 = 1$$

$$h_2 = b_2 - a_1h_1 - a_2h_0 = 2 - 1\times 1 - 0.16\times 0 = 1$$

نفرض $x_1(k) = y(k) - h_0u(k)$

$$x_1(k+1) = x_2(k) + h_1u(k)$$

$$x_n(k+1) = -x_2(k) - 0.16x_1(k) + u(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

حيث الشروط الابتدائية:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) - u(0) \end{bmatrix}$$

مثال 3 :

أوجد تمثيل فراغ الحالة للمعادلة التفاضلية التالية:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

الحل:

نفرض:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{x_1} = \dot{y}$$

$$\dot{x_2} = \ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}u$$

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u$$
$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u$$
$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + [0]u$$

مثال 4:

أوجد تمثيل فراغ الحالة لمعادلة الفرق التالية:

$$y(k+2) + y(k+1) + 0.16y(k) = 2u(k)$$

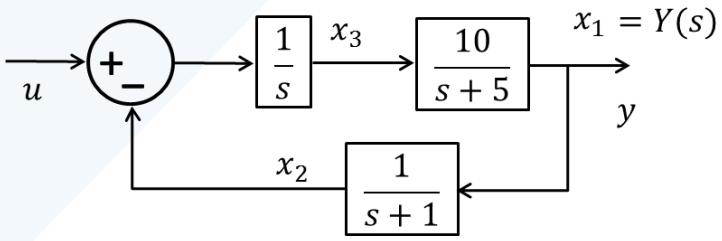
الحل:

نفرض:

$$x_1(k) = y(k)$$
$$x_2(k) = x_1(k+1) = y(k+1)$$
$$x_2(k+1) = y(k+2) = -y(k+1) - 0.16y(k) + 2u(k)$$
$$x_1(k+1) = x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = -x_2(k) - 0.16x_1(k) + 2u(k)$$
$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u$$
$$y(k) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix} + [0]u$$

مثال 5:

أوجد تمثيل فضاء الحالة للنظام في الشكل التالي:



الشكل (5) النظام المدروس

الحل:

نرمز خلف كل تكامل او تابع نقل درجة أولى متحول حالة كما في الشكل السابق.

نكتب العلاقة بين الدخل والخرج لكل نظام جزئي على حدى:

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \frac{1}{s+1}x_1$$

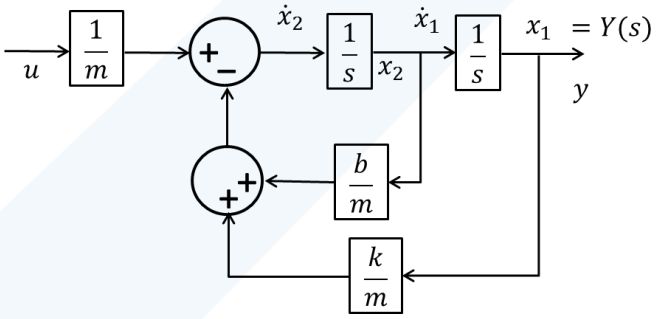
$$sx_2 = x_1 - x_2$$
$$x_3 = \frac{1}{s}(-x_2 + u)$$
$$sx_3 = -x_2 + u$$
$$x_1 = \frac{10}{s+5}x_3$$
$$sx_1 = 10x_3 - 5x_1$$

باستبدال كل (s) بـ $(\dot{\ })$ نحصل على معادلة الحالة التالية في الزمن المستمر.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & 0 & 10\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + [0]u$$

مثال 6:

أوجد تمثيل فضاء الحالة للنظام التالي:



الشكل (6) النظام المدروس

الحل:

نفرض بعد كل تكامل متحول حالة كما هو موضح في الشكل (6).

$$x_1 = y$$
$$x_1 = \frac{1}{s}x_2$$
$$sx_1 = x_2$$
$$x_2 = \frac{1}{s}\dot{x}_2$$
$$sx_2 = \dot{x}_2 = \frac{1}{m}u - \frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2$$

باستبدال كل (s) بـ $(\dot{\ })$ نحصل على معادلة الحالة التالية في الزمن المستمر.

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$

العلاقة بين تمثيل فضاء الحالة وتوابع النقل:

أن تمثيل فضاء الحالة يربط المداخل مع المخارج في المستوي الزمني المستمر او المتقطع أما توابع النقل فتربط بين المداخل والمخارج في المستوي اللابلاسي أو المستوي Z

إذا كان تمثيل فضاء الحالة للنظام في الزمن المستمر:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B.u(t)$$
$$y(t) = C.x(t) + D.u(t)$$

نأخذ تحويل لابلاس للنظام السابق باعتبار الشروط الأولية معدومة:

$$s.X(s) = A.X(s) + B.U(s)$$
$$Y(s) = C.X(s) + D.U(s)$$
$$(sI - A)X(s) = B.U(s)$$
$$X(s) = \frac{B}{(sI - A)}.U(s)$$
$$Y(s) = C.\frac{B}{(sI - A)}.U(s) + D.U(s)$$
$$Y(s) = (C.(sI - A)^{-1}.B + D)U(s)$$
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = (C.(sI - A)^{-1}.B + D)$$

العلاقة الأخيرة تمثل تابع النقل لنظام أحادي الدخل أحادي الخرج أو مصفوفة توابع النقل لنظام متعدد الدخل متعدد الخرج. يمكن التعبير عن تابع النقل السابق بالعلاقات التالية:

$$F(s) = C.\frac{B}{(sI - A)} + D$$
$$F(s) = \frac{C.B + (sI - A)D}{(sI - A)}$$
$$F(s) = \frac{1}{(sI - A)}(C.B + (sI - A)D)$$
$$F(s) = \frac{1}{(sI - A)}F_1(s)$$
$$F(s) = \frac{1}{|sI - A|}Q(s)$$

أي أن المقام لتابع النقل هو محدد المصفوفة $(sI - A)$ والذي يمثل كثير حدود في s وحل المعادلة $|sI - A| = 0$ يعطي أقطاب النظام أو ما يسمى بالقيم المميزة.

مثال 7:

أوجد أقطاب النظام في فضاء الحالة التالي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|sI - A| = 0$$
$$\left| s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right| = 0$$
$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right| = 0$$
$$\left| \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-4 \end{bmatrix} \right| = 0$$
$$(s-1)(s-4) - 0 = 0$$

بحل المعادلة الأخيرة نحصل على أقطاب النظام.

$$s_1 = 1, s_2 = 4$$

الأقطاب موجبة أي أن النظام غير مستقر.

إذا كان تمثيل فضاء الحالة للنظام في الزمن المتقطع:

$$x(k+1) = Gx(k) + H.u(k)$$
$$y(k) = C.x(k) + D.u(k)$$

نأخذ تحويلZ للنظام السابق باعتبار الشروط الأولية معدومة:

$$zX(z) = GX(z) + H.U(z)$$
$$Y(z) = C.X(z) + D.U(z)$$
$$(zI - G)X(z) = H.U(z)$$
$$X(z) = \frac{H}{(zI - G)}.U(z)$$
$$Y(z) = C.\frac{H}{(zI - G)}.U(z) + D.U(z)$$
$$Y(z) = (C.(zI - G)^{-1}.H + D)U(z)$$
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = (C.(zI - G)^{-1}.H + D)$$

العلاقة الأخيرة تمثل تابع النقل لنظام أحادي الدخل أحادي الخرج أو مصفوفة توابع النقل لنظام متعدد الدخل متعدد الخرج. وفيما يلي تبسيط لتابع النقل حسب العلاقات التالية:

$$F(z) = C.\frac{H}{(zI - G)} + D$$

$$F(z) = \frac{C.H + (zI - G)D}{(zI - G)}$$

$$F(z) = \frac{1}{(zI - G)}(C.H + (zI - G)D)$$

$$F(z) = \frac{1}{(zI - G)}F_1(z)$$

$$F(z) = \frac{1}{|zI - G|}Q(z)$$

أي أن المقام لتابع النقل هو محدد المصفوفة $(zI - G)$ والذي يمثل كثير حدود في z وحل المعادلة $|zI - G| = 0$ يعطي أقطاب النظام أو ما يسمى بالقيم المميزة.

مثال 8:

أوجد أقطاب النظام في فضاء الحالة التالي:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|zI - G| = 0$$

$$\left| z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & z-4 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(z-1)(z-4) - 0 = 0$$

بحل المعادلة الأخيرة نحصل على أقطاب النظام.

$$z_1 = 1, z_2 = 4$$

الأقطاب خارج الدائرة الواحدية أي أن النظام غير مستقر.

يلاحظ مما سبق ضرورة إيجاد مقلوب مصفوفة لإيجاد تابع النقل ولكن كيف نوجد مقلوب مصفوفة؟

إيجاد مقلوب مصفوفة:

ما ينطبق على النظم المتقطعة ينطبق على النظم المستمرة عند التعامل مع مصفوفات باستبدال الرموز S و Z.

The inverse of a 2×2 matrix.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

The product of 2 inverse matrices is an identity matrix.

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Or

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (cofactor\ of\ matrix\ A(A))^T$$

$$adj\begin{pmatrix} 0 & 11 & 15 \\ 7 & 0 & 1 \\ 4 & 19 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 19 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 11 & 15 \\ 19 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 11 & 15 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 15 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 15 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 19 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 11 \\ 4 & 19 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 11 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -19 & 285 & 11 \\ 4 & -60 & 105 \\ 133 & 44 & -77 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 25 & 11 \\ 4 & 18 & 1 \\ 3 & 18 & 1 \end{pmatrix} mod\ 26$$

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \textcircled{c} \\ d & e & \cancel{f} \\ g & h & \cancel{i} \end{bmatrix} = a\cdot\det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b\cdot\det\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c\cdot\det\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

طريقة إيجاد $(zI-G)^{-1}$

تعتمد هذه الطريقة على حساب المصفوفة المساعدة (Adjoint Matrix) و محدد المصفوفة كما يلي:

$$(zI-G)^{-1}=\frac{adj(zI-G)}{|zI-G|}$$

محدد المصفوفة $|zI-G|=z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n$.

أما المصفوفة المساعدة فتحسب بالعلاقة التالية:

$$adj(zI-G)=\mathrm{I}z^{n-1}+\mathrm{H}_1z^{n-2}+\mathrm{H}_2z^{n-3}+\cdots+\mathrm{H}_{n-1}$$

حيث:

$$a_1=-trG \qquad \mathrm{H}_1=G+a_1\mathrm{I}$$

$$a_2=-\frac{1}{2}tr G\mathrm{H}_1 \qquad \mathrm{H}_2=G\mathrm{H}_1+a_2\mathrm{I}$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1}=-\frac{1}{n-1}tr(G\mathrm{H}_{n-2}) \qquad \mathrm{H}_{n-1}=G\mathrm{H}_{n-2}+a_{n-1}\mathrm{I}$$

$$a_n=-\frac{1}{n}tr(G\mathrm{H}_{n-1}) \qquad \mathrm{H}_n=G\mathrm{H}_{n-1}+a_n\mathrm{I}=0$$

أما tr (Trace) فيرمز لـ مجموع عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة.

مثال 9:

أوجد المصفوفة $(zI-G)^{-1}$ حيث:

$$G=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1 & 0\\ 0.3 & -0.1 & -0.2\\ 0 & 0 & -0.3\end{bmatrix}$$

الحل: يعطى مقلوب مصفوفة بالعلاقة التالية:

$$(zI-G)^{-1}=\frac{adj(zI-G)}{|zI-G|}$$

تحسب العوامل من $a_1\to a_n, H_1\to H_n$.

$$a_1=-trG=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1 & 0\\ 0.3 & -0.1 & -0.2\\ 0 & 0 & -0.3\end{bmatrix}=0.3$$

$$\mathrm{H}_1=G+a_1\mathrm{I}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1 & 0\\ 0.3 & -0.1 & -0.2\\ 0 & 0 & -0.3\end{bmatrix}+0.3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.1 & 0\\ 0.3 & 0.2 & -0.2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$a_2=-\frac{1}{2}trG\mathrm{H}_1=-\frac{1}{2}tr\left[\begin{bmatrix}0.1 & 0.1 & 0\\ 0.3 & -0.1 & -0.2\\ 0 & 0 & -0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.4 & 0.1 & 0\\ 0.3 & 0.2 & -0.2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} tr \begin{bmatrix} 0.07 & 0.03 & -0.02 \\ 0.09 & 0.01 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -0.04$$

$$\mathrm{H}_2 = G\mathrm{H}_1 + a_2\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.03 & -0.02 \\ 0.09 & -0.03 & 0.03 \\ 0 & 0 & -0.04 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} trG\mathrm{H}_2 = -\frac{1}{3} tr \begin{bmatrix} 0.012 & 0 & 0 \\ 0 & 0.012 & 0 \\ 0 & 0 & 0.012 \end{bmatrix} = -0.012$$

$$\mathrm{H}_3 = G\mathrm{H}_2 + a_3\mathrm{I} = G\mathrm{H}_2 - 0.012\mathrm{I} = 0$$

بالتالي نحصل على المصفوفة المساعدة كما يلي:

$$adj(zI - G) = \mathrm{I}z^2 + \mathrm{H}_1 z + \mathrm{H}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0.03 & 0.03 & -0.02 \\ 0.09 & -0.03 & 0.02 \\ 0 & 0 & -0.04 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z^2 + 0.4z + 0.03 & 0.1z + 0.03 & -0.02 \\ 0.3z + 0.09 & z^2 + 0.2z - 0.03 & -0.2z + 0.02 \\ 0 & 0 & z^2 - 0.04 \end{bmatrix}$$

أيضاً محدد المصفوفة:

$$|zI - G| = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = z^3 + 0.3z^2 - 0.04z - 0.012$$

$$= (z + 0.2)(z - 0.2)(z + 0.3)$$

بالتالي مقلوب مصفوفة:

$$(zI - G)^{-1} = \frac{adj(zI - G)}{|zI - G|}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{z + 0.1}{(z + 0.2)(z - 0.2)} & \frac{0.1}{(z + 0.2)(z - 0.2)} & \frac{-0.02}{(z + 0.2)(z - 0.2)(z + 0.3)} \\ \frac{0.3}{(z + 0.2)(z - 0.2)} & \frac{z - 0.1}{(z + 0.2)(z - 0.2)} & \frac{-0.2(z - 0.1)}{(z + 0.2)(z - 0.2)(z + 0.3)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(z + 0.3)} \end{bmatrix}$$

بعد إيجاد مقلوب المصفوفة يمكن إيجاد مصفوفة توابع النقل من العلاقة:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = (C.(zI - G)^{-1}.H + D)$$

ويمكن أيضاً إيجاد مصفوفة انتقال الحالة كما يلي:

مصفوفة انتقال الحالة:

$$G^k = Z^{-1}[(zI - G)^{-1}z] =$$

$$Z^{-1}\begin{bmatrix} \frac{0.25z}{(z+0.2)} + \frac{0.75z}{(z-0.2)} & -\frac{0.25z}{(z+0.2)} + \frac{0.25z}{(z-0.2)} & \frac{0.5z}{(z+0.2)} - \frac{0.1z}{(z-0.2)} - \frac{0.4z}{(z+0.3)} \\ -\frac{0.75z}{(z+0.2)} + \frac{0.75z}{(z-0.2)} & \frac{0.75z}{(z+0.2)} + \frac{0.25z}{(z-0.2)} & -\frac{1.5z}{(z+0.2)} - \frac{0.1z}{(z-0.2)} + \frac{1.6z}{(z+0.3)} \\ 0 & 0 & \frac{z}{(z+0.3)} \end{bmatrix}$$

$$G^k = \begin{bmatrix} 0.25(-0.2)^k + 0.75(0.2)^k & -0.25(-0.2)^k + 0.25(0.2)^k & 0.5(-0.2)^k - 0.1(0.2)^k - 0.4(-0.3)^k \\ -0.75(-0.2)^k + 0.75(0.2)^k & 0.75(-0.2)^k + 0.25(0.2)^k & -1.5(-0.2)^k - 0.1(0.2)^k + 1.6(-0.3)^k \\ 0 & 0 & (-0.3)^k \end{bmatrix}$$

حل معادلة الحالة المتقطعة

سنقوم في هذه الفقرة بحل معادلة الحالة المتقطعة أي إيجاد $x(k), y(k)$ من الشكل:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

بطريقتين الأولى هي طريقة التعويض و الثانية هي طريقة تحويلات Z.

أولاً- طريقة التعويض

تعتمد هذه الطريقة في الحل على التعويض المتتالي كما يلي:

$$x(1) = Gx(0) + Hu(0)$$
$$x(2) = Gx(1) + Hu(1) = G^2x(0) + GHu(0) + Hu(1)$$
$$x(3) = Gx(2) + Hu(2) = G^3x(0) + G^2Hu(0) + GHu(1) + Hu(2)$$

أما في الحالة العامة فيمكن كتابة:

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1}Hu(j) \quad k = 1,2,3,\cdots \qquad (2)$$

نلاحظ أن الحل $x(k)$ يجمع بين الحالة الابتدائية $x(0)$ و الدخل $u(j)$.

معادلة الخرج $y(k) = Cx(k) + Du(k)$.

$$y(k) = CG^k x(0) + C\sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1}Hu(j) + Du(k) \quad k = 1,2,3,\cdots$$

ثانياً- التحويل للمستوي Z

يبدأ الحل بتحويل Z للمعادلة $x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$

أي:

$$zX(z)-zx(0)=GX(z)+HU(z)$$
$$(zI-G)X(z)=zx(0)+HU(z)$$
$$X(z)=(zI-G)^{-1}[zx(0)+HU(z)]$$
$$X(z)=(zI-G)^{-1}zx(0)+(zI-G)^{-1}HU(z)$$

بأخذ تحويل Z العكسي:

$$x(k)=Z^{-1}[(zI-G)^{-1}z]x(0)+Z^{-1}[(zI-G)^{-1}HU(z)]$$

بالمقارنة مع العلاقة (2) تعطى مصفوفة انتقال الحالة (State Transition Matrix) بالعلاقة:

$$G^k=Z^{-1}[(zI-G)^{-1}z]$$
$$\sum_{j=0}^{k-1}G^{k-j-1}Hu(j)=Z^{-1}[(zI-G)^{-1}HU(z)] \quad k=1,2,3\cdots$$

تختلف مصفوفة انتقال الحالة عن مصفوفة توابع النقل (مصفوفة تابع النقل النبضي) (Pulse Transfer Function Matrix)

مثال 10:

أوجد مصفوفة انتقال الحالة للنظام المتقطع في فضاء الحالة التالي:

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$$

حيث $G=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}$, $H=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

أوجد $x(k)$ عندما $u(k)=1$ بفرض الشروط الابتدائية كما يلي $x(0)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$.

الحل:

حسب ما ورد سابقاً تعطى مصفوفة انتقال الحالة بالعلاقة التالية: $G^k=Z^{-1}[(zI-G)^{-1}z]$.

نحسب مقلوب المصفوفة أولاً كما يلي:

$$(zI-G)^{-1}=\left[z\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\right]^{-1}=\left[\begin{bmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\right]^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}z & -1\\ 0.16 & z+1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{z+1}{(z+0.2)(z+0.8)} & \dfrac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \\ \dfrac{-0.16}{(z+0.2)(z+0.8)} & \dfrac{z}{(z+0.2)(z+0.8)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\frac{4}{3}}{(z+0.2)} + \dfrac{-\frac{1}{3}}{(z+0.8)} & \dfrac{\frac{5}{3}}{(z+0.2)} + \dfrac{-\frac{5}{3}}{(z+0.8)} \\ \dfrac{-\frac{0.8}{3}}{(z+0.2)} + \dfrac{\frac{0.8}{3}}{(z+0.8)} & \dfrac{-\frac{1}{3}}{(z+0.2)} + \dfrac{\frac{4}{3}}{(z+0.8)} \end{bmatrix}$$

نأخذ المعادلة $X(z) = (zI - G)^{-1}[zx(0) + HU(z)]$

تحويل Z للدخل $U(z) = Z[u(k)] = Z[1(k)] = \dfrac{z}{z-1}$ تابع الخطوة الواحدية.

$$[zx(0) + HU(z)] = [z\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{z}{z-1}] = [\begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{z}{z-1} \\ \dfrac{z}{z-1} \end{bmatrix}] = \begin{bmatrix} \dfrac{z^2}{z-1} \\ \dfrac{-z^2+2z}{z-1} \end{bmatrix}$$

بتطبيق العلاقة:

$$X(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{(z^2+2)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \\ \dfrac{(-z^2+1.84z)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \end{bmatrix}$$

$$X(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{-\frac{17}{6}z}{(z+0.2)} + \dfrac{\frac{22}{9}z}{(z+0.8)} + \dfrac{\frac{25}{18}z}{(z-1)} \\ \dfrac{\frac{3.4}{6}z}{(z+0.2)} + \dfrac{-\frac{17.6}{9}z}{(z+0.8)} + \dfrac{\frac{7}{18}z}{(z-1)} \end{bmatrix}$$

تحويل Z العكسي

$$x(k) = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

الخرج:

$$y(k) = Cx(k) = [1 \quad 0]x(k)$$

$$y(k) = -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18}$$

حل معادلة الحالة في الزمن المستمر:

إذا كان تمثيل فضاء الحالة للنظام في الزمن المستمر:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B.u(t)$$

نأخذ تحويل لابلاس للنظام السابق باعتبار الشروط الأولية معدومة:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + B.U(s)$$
$$(sI - A)X(s) = x(0) + B.U(s)$$
$$X(s) = \frac{1}{(sI - A)}.x(0)\frac{B}{(sI - A)}.U(s)$$
$$X(s) = (sI - A)^{-1}.x(0) + (sI - A)^{-1}.B.U(s)$$
$$X(s) = \mathcal{L}(e^{At}).x(0) + \mathcal{L}(e^{At}).B.U(s)$$

نوجد تحويل لابلاس العكسي:

$$x(t) = e^{At}.x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau).d\tau$$

حيث e^{At} مصفوفة انتقال الحالة وهي تحويل لابلاس العكسي لـ $(sI - A)^{-1}$ وبالتالي من الشروط الابتدائية والدخل يمكن إيجاد الخرج من معادلة الخرج:

$$y(t) = C.x(t) + D.u(t)$$

تقطيع معادلة الحالة المستمرة (Discretization)

معادلة الحالة في الزمن المستمر:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

تصبح في الزمن المتقطع:

$$x((k+1)T_s) = G(T_s)x(kT_s) + H(T_s)u(kT_s) \quad (3)$$

أي أن مصفوفة الحالة والتحكم تتبعان مباشرة لخطوة التقطيع T_s. أما معادلة الخرج $y(kT_s) = Cx(kT_s) + Du(kT_s)$ فلا تتغير.

يمكن إيجاد المصفوفتين $G(T_s), H(T_s)$ من معرفة المصفوفتين A, B من خلال التحليل الرياضي التالي:

من علاقة الاستجابة الزمنية في فضاء الحالة في الزمن المستمر:

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

تكتب العلاقة السابقة في الزمن المتقطع كما يلي:

$$x(kT_s) = e^{A(kT_s)}x(0) + e^{A(kT_s)}\int_0^{kT_s} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (4)$$

$$x((k+1)T_s) = e^{A((k+1)T_s)}x(0) + e^{A((k+1)T_s)}\int_0^{(k+1)T_s} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (5)$$

بضرب العلاقة (4) بـ e^{AT_s} و التعويض في العلاقة (5) نحصل على العلاقة:

$$x((k+1)T_s) = e^{AT_s}x(kT_s) + e^{A((k+1)T_s)}\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$= e^{AT_s}x(kT_s) + e^{AT_s}\int_0^{T_s} e^{-At}Bu(kT_s)dt$$

$$= e^{AT_s}x(kT_s) + \int_0^{T_s} e^{A\lambda}Bu(kT_s)d\lambda$$

حيث: $\lambda = T_s - t$.

بالمقارنة مع العلاقة (3) نلاحظ أن:

$$G(T_s) = e^{AT_s} \quad (6)$$

و ذلك بالنسبة للمصفوفة A غير المفردة (محددها لا يساوي الصفر). و نلاحظ أيضاً أن:

$$H(T_s) = \left(\int_0^{T_s} e^{A\lambda}d\lambda\right)B = \left[e^{AT_s} - I\right]A^{-1}B$$
$$= T_s\left(I + \frac{T_s}{2!}A + \frac{T_s^2}{3!}A^2 + \frac{T_s^3}{4!}A^3 + \cdots\right)B = A^{-1}\left[e^{AT_s} - I\right]B \quad (7)$$

حيث A^{-1} مقلوب المصفوفة A و I مصفوفة عناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد.

تم استنتاج العلاقات السابقة من التحليل الرياضي التالي:

$$e^{at} = 1 + ta + \frac{t^2}{2!}a^2 + \frac{t^3}{3!}a^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}a^n + \cdots$$

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}$$

$$n! = n\times(n-1)\cdots\times 2\times 1, A^2 = A\times A, A^3 = A\times A\times A\cdots$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = 0 + A + \frac{2t}{2!}A^2 + \frac{3t^2}{3!}A^3 + \cdots + \frac{nt^{n-1}}{n!}A^n + \cdots$$

$$= A(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{(n-1)t^n}{n!}A^n + \cdots)$$

$$= (I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{(n-1)t^n}{n!}A^n + \cdots)A$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A \Rightarrow \int_0^{T_s} e^{At}dt = \frac{1}{A}\left(e^{AT_s} - I\right)$$

$$= A^{-1}\left(e^{AT_s} - I\right) = \left(e^{AT_s} - I\right)A^{-1}$$

$$= T_s\left(I + \frac{T_s}{2!}A + \frac{T_s^2}{3!}A^2 + \frac{T_s^3}{4!}A^3 + \cdots \right)$$

مثال 11:

أوجد التمثيل المتقطع في فضاء الحالة للنظام في فضاء الحالة المستمر التالي:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

الحل:

نوجد أولاً $(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}$

من جداول تحويلات لابلاس:

$$e^{At} = \ell^{-1}(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

باستخدام العلاقتين (6) و (7) باستبدال كل t بـ T_s:

$$G(T_s) = e^{AT_s} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2T_s}) \\ 0 & e^{-2T_s} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} dt \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(T_s + \frac{e^{-2T_s} - 1}{2}) \\ \frac{1}{2}(1-e^{-2T_s}) \end{bmatrix} H(T_s) =$$

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T_s) \\ x_2((k+1)T_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2T_s}) \\ 0 & e^{-2T_s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(kT_s) \\ x_2(kT_s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(T_s + \frac{e^{-2T_s} - 1}{2}) \\ \frac{1}{2}(1-e^{-2T_s}) \end{bmatrix} u(kT_s)$$

تمثل المعادلة الأخيرة معادلة الحالة في الزمن المتقطع من أجل T_s. الآن بفرض أن خطوة التقطيع $T_s = 1[\text{sec}]$ تصبح معادلة فضاء الحالة:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4323 \\ 0 & 0.1353 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2838 \\ 0.4323 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

حساب تابع النقل بين الدخل و الخرج:

$$F(z)=C(zI-G)^{-1}H+D$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z-1 & -0.4323\\ 0 & z-0.1353\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.2838\\ 0.4323\end{bmatrix}+0$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{z-1} & \frac{0.4323}{(z-1)(z-0.1353)}\\ 0 & \frac{1}{z-0.1353}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2838\\ 0.4323\end{bmatrix}$$

$$=\frac{0.2838z+0.1485}{(z-1)(z-0.1353)}=\frac{0.2838z^{-1}+0.1485z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-0.1353z^{-1})}$$

مثال 12:

أوجد التمثيل المتقطع في فضاء الحالة للنظام في فضاء الحالة المستمر التالي:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

خطوة التقطيع $T_s=0.1[\sec]$

الحل:

$$\ell\left[e^{At}\right]=(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

تحويل لابلاس العكسي:

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{-t} & te^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$e^{AT_s}=\begin{bmatrix}e^{-T_s} & T_se^{-T_s}\\ 0 & e^{-T_s}\end{bmatrix}$$

$$\int_0^{T_s}e^{At}dt=\begin{bmatrix}1-e^{-T_s} & 1-(1+T_s)e^{-T_s}\\ 0 & 1-e^{-T_s}\end{bmatrix}$$

حيث:

$$\int te^{-t}dt = \int udv = uv - \int vdu; u = t, du = dt, dv = e^{-t}dt, v = -e^{-t}$$

$$= -te^{-t} + \int e^{-t}dt = -te^{-t} - e^{-t}$$

$$\Rightarrow \int_0^{T_s} te^{-t}dt = (-te^{-t} - e^{-t})\Big|_0^{T_s} = 1 - (1 + T_s)e^{-T_s}$$

خطوة التقطيع $T_s = 0.1[\sec]$:

$$G(T_s) = e^{A0.1} = \begin{bmatrix} 0.9048 & 0.0905 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix}$$

$$H(T_s) = \left(\int_0^{T_s} e^{At}dt \right) B = \begin{bmatrix} 0.0047 \\ 0.0952 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9048 & 0.0905 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0047 \\ 0.0952 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

يمكن حساب مصفوفة الحالة في الزمن المتقطع عند القيم الصغيرة لخطوة التقطيع $T_s = 0.1[\sec]$ من العلاقة التالية التي يمكن أن تتقارب بسرعة كما يلي:

$$e^{AT_s} = I + T_s A + \frac{1}{2}(T_s A)(T_s A) + \frac{1}{6}(T_s A)(T_s A)(T_s A) = \begin{bmatrix} 0.9048 & 0.0905 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix}$$

الحل باستخدام MATLAB

```
A=[-1 1;0 -1];B=[0;1];Ts=0.1;
s1=1;s=0
for i=1:10
  s1=s1*(i);
  s=s+Ts^(i)/s1*A^(i);
end
GTs=(eye(2,2)+s)
```

وهي مصفوفة الحالة في الزمن المتقطع.

```
s1=1;s=0;
for i=1:10
  s1=s1*(i+1);
  s=s+Ts^(i)/s1*A^(i);
```

end

HTs=Ts*(eye(2,2)+s)*B

وهي مصفوفة التحكم في الزمن المتقطع.

أو باستخدام الأمر:

[G,H]=c2d(A,B,Ts)

مباشرة كما في المثال التالي.

مثال 13:

أوجد التمثيل المتقطع في فضاء الحالة للنظام في فضاء الحالة المستمر التالي:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

```
A = [0   1;-25   -4];
B = [0;1];
[G,H] = c2d(A,B,0 2)

G =

    0.6401    0.1161
   -2.9017    0.1758

H =

    0.0144
    0.1161
```

```
A = [0   1;-25   -4];
B = [0;1];
[G,H] = c2d(A,B,1)

G =

   -0.0761   -0.0293
    0.7321    0.0410

H =

    0.0430
   -0 0293
```

يلاحظ أن قيم المصفوفات تتعلق بقيمة خطوة التقطيع $T_s = 0.2[\sec]$ و $T_s = 1[\sec]$.

عدم وحدانية تمثيل فضاء الحالة (Nonuniqueness)

ليس للنظام في فضاء الحالة تمثيلاً وحيداً و إنما عدداً لا متناهي من التمثيل و ذلك كما يلي:

لنأخذ النظام التالي:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \tag{8}$$

لنعرف شعاع حالة جديد $\hat{x}(k)$ حيث $x(k) = P\hat{x}(k)$ حيث P مصفوفة غير مفردة (Nonsingular) (محددها غير معدوم). بالتعويض بالمعادلة (8) ينتج:

$$P\hat{x}(k+1) = GP\hat{x}(k) + Hu(k)$$

بجداء الطرفين بـ P^{-1} تصبح معادلة الحالة:

$$\hat{x}(k+1) = P^{-1}GP\,\hat{x}(k) + P^{-1}Hu(k)$$

بالتالي مصفوفة الحالة و التحكم الجديدتين:

$$\hat{G} = P^{-1}GP, \hat{H} = P^{-1}H$$

و تصبح معادلة الخرج:

$$y(k) = CP\,\hat{x}(k) + Du(k)$$

$$\hat{C} = CP, \hat{D} = D$$

بما أن المصفوفة P يمكن أن تكون أي مصفوفة غير مفردة بأبعاد $n \times n$ بالتالي يوجد لانهائية (Infinitely) في تمثيل فضاء الحالة. بالتالي يمكن على سبيل المثال التحويل للشكل القطري (Diagonalization) لمصفوفة الحالة بإجراء التحويل الخطي (Linear Transformation) باختيار مناسب للمصفوفة P بحيث يكون $\hat{G} = P^{-1}GP$ مصفوفة قطرية (Diagonal Matrix).

الصيغ المميزة لمعادلة فضاء الحالة

بالنسبة لمعادلة الفرق التالية:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n)$$

أو للتمثيل بتابع نقل من الشكل:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

أو من الشكل:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

أو $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z-p_n}$ حيث p_i جذور تابع النقل.

يمكن أن نصادف عدة صيغ (Form) مميزة لتمثيل الحالة منها:

1. الصيغة القطرية القانونية (Diagonal Canonical Form):

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

2. الصيغة القانونية القابلة للتحكم (Controllable Canonical Form):

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 \vdots b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \vdots \cdots \vdots b_1 - a_1 b_0]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

3. الصيغة القانونية القابلة للمراقبة (Observable Canonical Form):

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

4. صيغة جوردان القانونية (Jordan Canonical Form):

$$\left[\begin{array}{c} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_m(k+1) \\ \hline x_{m+1}(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc:ccc} p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_1 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & p_n \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \\ \hline x_{m+1}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right] u(k)$$

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

مثال 14:

ليكن لدينا النظام التالي:

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z+1}{z^2+1.3z+0.4}$$

أوجد تمثيل فضاء الحالة بالصيغة القانونية القابلة للتحكم و القابلة للمراقبة و الصيغة القطرية.

الحل:

الصيغة القانونية القابلة للتحكم:

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-0.4 & -1.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$

الصيغة القانونية القابلة للمراقبة:

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -0.4\\1 & -1.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+[0]u$$

الصيغة القانونية القطرية:

يمكن كتابة تابع النقل بالشكل $\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{\frac{5}{3}}{z+0.5}+\frac{-\frac{2}{3}}{z+0.8}$ بالتالي تكون الصيغة القطرية القانونية كما يلي:

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0\\0 & -0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$