استقرار الأنظمة الخطية

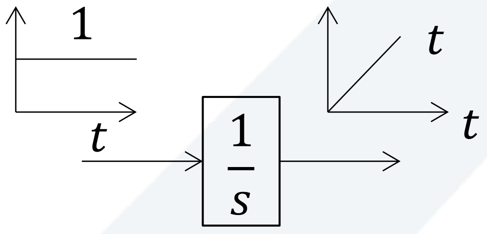
مدرس المقرر
الدكتور نسمت أبو طبق
جامعة المنارة

مقدمة

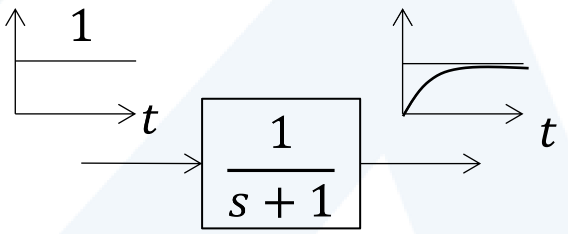
- مفهوم الاستقرار
- النظم المستقرة وغير المستقرة
- تحليل الاستقرار حسب مواقع الأقطاب
- تحليل الاستقرار حسب روث
- أمثلة

مفهوم الاستقرار المطلق

- يكون النظام مستقراً إذا كان خرج النظام محدود ذو قيمة ليست لانهائية عندما يكون دخله محدوداً. وعليه فإن النظام الذي يحوي مكامل أو أكثر يكون غير مستقر أما النظام التناسبي فيكون مستقراً.

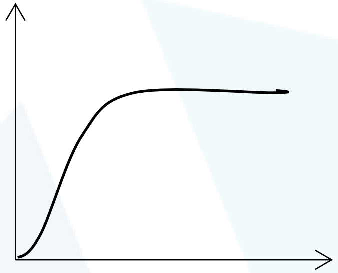


غير مستقر

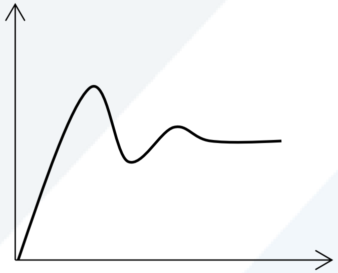


مستقر

أنواع الأنظمة حسب الاستجابة الزمنية

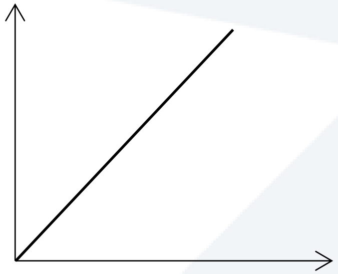


استجابة مع تعويض
غير مهتزة

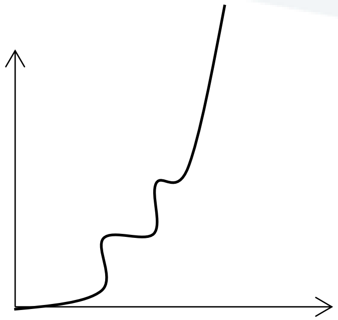


استجابة مع تعويض
مهتزة

أنظمة مستقرة



استجابة دون تعويض
غير مهتزة



استجابة دون تعويض
مهتزة

أنظمة غير مستقرة

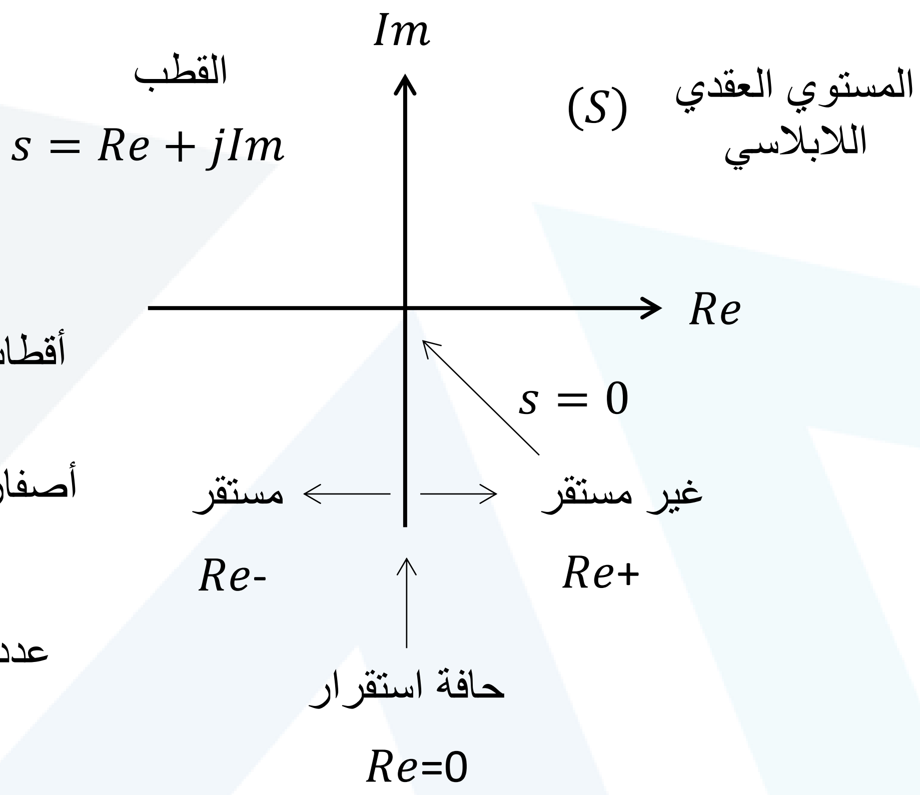
شكل الاستجابة الزمنية للأنظمة حسب توضع الأقطاب

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

أقطاب النظام هي قيم s التي تعدم المقام $A(s)=0$

أصفار النظام هي قيم s التي تعدم البسط $B(s)=0$

عدد الأقطاب يساوي عدد الأصفار الفعلية وفي اللانهاية



يتحدد استقرار النظام المطلق من توضع أقطابه فقط أما توضع الأصفار فيؤثر على شكل الاستجابة للخرج

مثال

بالنسبة للنظام التالي $G(s) = \frac{K(s+10)}{s(s+5)(s+2)}$

أوجد الأصفار والأقطاب وهل النظام مستقر

الأقطاب

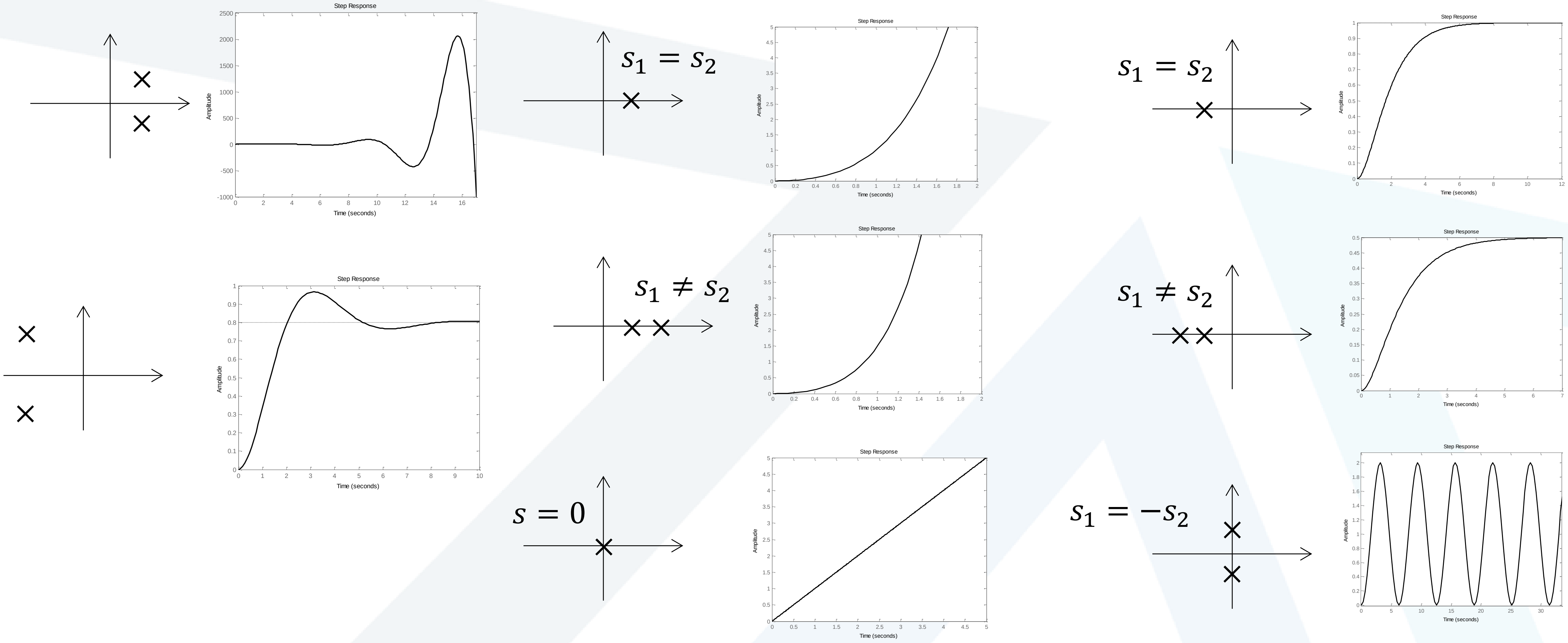
$s = 0 (s = -5)(s = -2)$

الأصفار

$s = -10, \infty, \infty$

النظام غير مستقر بسبب القطب $s = 0$

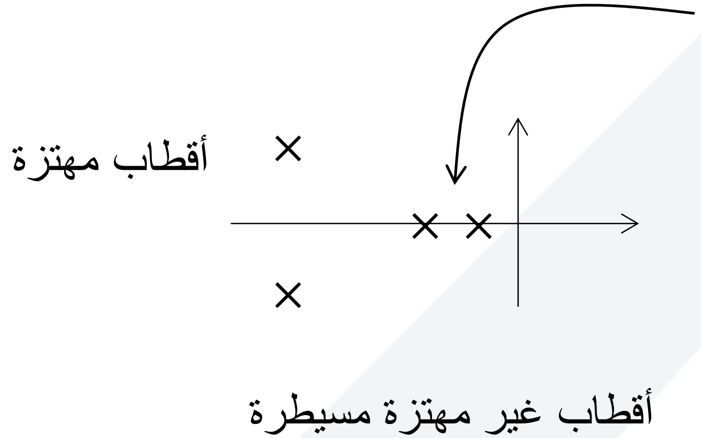
شكل الاستجابة الزمنية حسب توضع الأقطاب

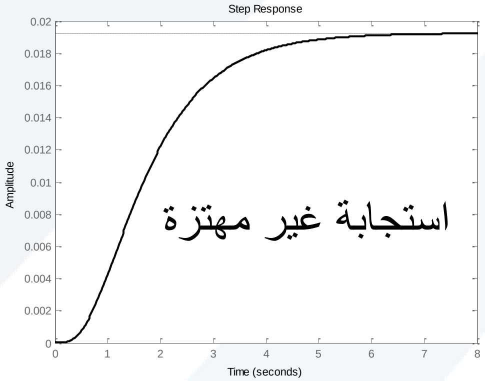


شكل الاستجابة الزمنية حسب توضع الأقطاب

في الأنظمة أعلى من الدرجة الثانية يتحدد سلوك النظام من موقع الأقطاب المسيطرة لأنها الأبطأ

الأقطاب المسيطرة هي الأقرب للمحور الوهمي





تحليل الاستقرار حسب قاعدة روث

- تفيد قاعدة روث في الاستقرار بتحديد الاستقرار المطلق للنظام دون حساب أقطابه. وتحديد عدد الأقطاب المسببة لعدم استقرار النظام.
- الأقطاب المسببة لعدم الاستقرار هي الصفر والأقطاب ذات القسم الحقيقي الموجب.
- وهي طريقة حسابية تعتمد على المعادلة المميزة للنظام (المقام يساوي الصفر) في تشكيل جدول ثم اختبار إشارة العمود الأول من الجدول وعدد التغيرات في الإشارة.
- إذا تغيرت إشارة العمود الأول يكون النظام غير مستقر وعدد الأقطاب المسببة لعدم الاستقرار يساوي عدد تغيرات الإشارة.
- يكون النظام مستقراً عندما لا تتغير إشارة العمود الأول.

خطوات تحليل الاستقرار حسب روث

النظام $n \geq m$ $$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

المعادلة المميزة $$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

إذا كان $a_n = 0$ فالحد الأخير من المعادلة المميزة معدوم وبالتالي النظام يحوي مكامل على الأقل أي أنه غير مستقر بسبب قطب صفري

إذا كان أحد عوامل المعادلة المميزة معدوماً أو مختلفاً بالإشارة سالب و موجب يكون النظام غير مستقر

إذا كان جميع عوامل المعادلة المميزة موجودة ولها نفس الإشارة فإن ذلك لا يعني أن النظام مستقر بل ينبغي تحليل ذلك باستخدام قاعدة روث

تشكيل جدول روث

المعادلة المميزة $A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$

من المعادلة المميزة

$$\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^2 & e_1 & e_1 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}$$

تحسب حساب

$$g_1 = a_n$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$\vdots$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$\vdots$$

ننظر لإشارة العمود الأول:

كل العوامل من إشارة واحدة (+ أو -) النظام مستقر

تناوب في الإشارة (+ أو -) النظام غير مستقر

عدد الجذور الموجبة القسم الحقيقي يساوي عدد مرات التناوب في الإشارة في العمود الأول

مثال

- ادرس استقرار النظام ذو المعادلة المميزة التالية: $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$

تشكيل جدول روث

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	$\frac{2\times 3 - 1\times 4}{2} = 1$	$\frac{2\times 5 - 1\times 0}{2} = 5$	
s	$\frac{1\times 4 - 2\times 5}{1} = -6$		
s^0	5		

عدد مرات التغير في الإشارة للعمود الأول

$+$

1 $-$

2 $+$

تغيريان في إشارة العمود الأول النظام غير مستقر وله قطبان موجبان

مثال

- ادرس استقرار النظام ذو المعادلة المميزة التالية:

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

تشكيل جدول روث

حالة خاصة عند ظهور صفر بالعمود الأول

نستبدل الصفر بعدد صغير موجب ونكمل الجدول ونختبر تغير الإشارة للعمود الأول

s^3	1	1
s^2	2	2
s	$\dfrac{2\times 1 - 1\times 2}{2} = 0 \cong \varepsilon > 0$	
s^0	2	

$+$
ε
$+$

حافة الاستقرار
جذران بقسم وهمي فقط
وبقية الجذور مستقرة

عند تغير إشارة العمود الأول يكون النظام غير مستقر

عدد مرات التغير في الإشارة للعمود الأول يساوي عدد الأقطاب الموجبة ويكون النظام غير مستقر

تحسب الأقطاب الوهمية من السطر
الذي يسبق السطر الذي حدث فيه الصفر

$$2s^2 + 2 = 0 \rightarrow s^2 = -1 \rightarrow s = \pm j1$$

مثال

- ادرس استقرار النظام ذو المعادلة المميزة التالية:

$$s^3 - 3s + 2 = 0$$

تشكيل جدول روث

حالة خاصة عند ظهور صفر بالعمود الأول

نستبدل الصفر بعدد صغير موجب ونكمل الجدول ونختبر تغير الإشارة للعمود الأول

s^3	1	-3
s^2	$0 \cong \varepsilon$	2
s	$\frac{\varepsilon \times -3 - 1 \times 2}{\varepsilon} = -3 - \frac{2}{\varepsilon}$	
s^0	2	

$+$
ε
$-$
$+$

تغيران بالإشارة
غير مستقر
قطبان موجبان

مثال

- ادرس استقرار النظام ذو المعادلة المميزة التالية:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

تشكيل جدول روث

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	$\frac{2\times 24 - 1\times 48}{2} = 0$	$\frac{2\times -25 - 1\times -50}{2} = 0$	
	8	96	
s^2	$\frac{8\times 48 - 2\times 96}{8} = 24$	$\frac{8\times -50 - 2\times 0}{8} = -50$	
s	$\frac{24\times 96 - 8\times -50}{24} = 112.7$		
s^0	-50		

حالة سطر مشتق يساوي الصفر

نشكل معادلة من السطر السابق للسطر الصفري

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

درجة زوجية حلها يعطي أزواج أقطاب متماثلة ومتعاكسة

تغير واحد في إشارة العمود الأول النظام غير مستقر وله قطب موجب

مثال

- ادرس استقرار النظام ذو المعادلة المميزة التالية:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

تشكيل جدول روث

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50

حالة سطر مشتق يساوي الصفر نشكل معادلة من السطر السابق للسطر الصفري

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

$$s^4 + 24s^2 - 25 = 0$$

درجة زوجية حلها يعطي أزواج أقطاب متماثلة ومتعاكسة

$$s^2 = -25 \rightarrow s_{1,2} = \pm j5 \quad s^2 = 1 \rightarrow s_{3,4} = \pm 1$$

الأقطاب المتبقية

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)(s - s_5)$$

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = (s - j5)(s + j5)(s + 1)(s - 1)(s - s_5)$$

$$-50 = 25s_5$$

$$s_5 = -2$$

مثال

- أوجد بالاعتماد على قاعدة روث بالاستقرار مجال تغير الربح حتى يكون النظام بحلقة مغلقة مستقراً. ما هي قيمة الربح عند حافة الاستقرار والقطبين المهتزين عندها.

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)}$$

$$\frac{G}{1+G} = \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)+K} = \frac{K}{s^4+3s^3+3s^2+2s+K}$$

$$s^4+3s^3+3s^2+2s+K=0$$

$$s^4+3s^3+3s^2+2s+K=0$$

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	$\frac{7}{3}$	K	
s	$2-\frac{9}{7}K$		
s^0	K		

$$\frac{14}{9} > K > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 2-\frac{9}{7}K > 0 \rightarrow \frac{14}{9} > K \\ K > 0 \end{array} \right.$$

$\frac{14}{9} = K$ حافة الاستقرار

مثال

- أوجد بالاعتماد على قاعدة روث بالاستقرار مجال تغير الربح حتى يكون النظام بحلقة مغلقة مستقراً. ما هي قيمة الربح عند حافة الاستقرار والقطبين المهتزين عندها.

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	$\frac{7}{3}$	K	
s	$2-\frac{9}{7}K$		
s^0	K		

حافة الاستقرار $\frac{14}{9} = K$

$$\frac{7}{3}s^2 + \frac{14}{9} = 0 \rightarrow s^2 = -\frac{14}{9}\frac{3}{7} = -\frac{14}{21} \quad s_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{14}{21}}$$

مدرس المقرر الدكتور نسمت أبو طبق