رياضيات الأعمال- المحاضرة الثانية

Mathematics For Business

Dr. Fadi KHALIL

Doctor lecturer in statistics and programing department

في هذه المحاضرة سيتم التطرق للمواضيع الآتية:

1-3- المعادلات الخطية والمتراجحات Linear equation and Inequalities:

1-3-1- حل المعادلات الخطية Linear equations solution:

1-3-2- المتراجحات الخطية Linear inequalities:

1-3-3- حالات تطبيقية:

3-1- المعادلات الخطية والمتراجحات Linear equation and Inequalities:

كم سيكون رقم المبيعات في عشر السنوات القادمة؟ ما هو معدل هطول الأمطار في السنوات القادمة؟ للإجابة على مثل هذه الأسئلة ولإجراء التنبؤ بحركة الظواهر بشكل عام لا بدّ من استخدام النمذجة الرياضية *mathematical modelling*.

لذلك سيتم التعرف على أبسط النماذج الرياضية وهي المعادلة الخطية والتي تعتمد في بنائها على مفهوم كثير الحدود الذي تمَ التعرف عليه في المبحث الثاني. كذلك سيتم الانتقال من المعادلات الخطية إلى مفهوم تطبيقي تقني وهو الانحدار *regression* الذي يساعد في بناء نموذج رياضي انطلاقاً من بيانات رقمية *numerical data*.

لتكن المعادلة الآتية:

$$3-2(x+2)=\frac{x}{3}-5$$

والمتراجحة الآتية:

$$\frac{x}{2}+2(3x-1)\geq 5$$

بشكل عام المعادلة الخطية من الدرجة الأولى *equation of first degree* (كثير الحدود من الدرجة الأولى) لمتغير واحد هي أي معادلة يمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$ax+b=0 \qquad\qquad a\neq 0$$

إذا تمّ استبدال إشارة المساواة $=$ بأحد الإشارات الآتية $\geq$ أو $\leq, >, <$، فإنّه يطلق على التعبير بالمتراجحة من الدرجة الأولى *inequality of first degree*.

تساعد المعادلات والمتراجحات على التعبير عن مشكلة ما بشكل رياضي بهدف إيجاد الحل لها. وفي أغلب الأحيان يتوافق حل المشكلة مع حل المعادلة أو المتراجحة الممثلة لها. وحل المعادلة أو المتراجحة يتمثل في إيجاد قيمة المجهول الذي يحقق هذه المعادلة أو المتراجحة.

يتم حل المعادلة أو المتراجحة بشكل عام عن طريق تبسيطها بشكل تدريجي إلى أن يتم الوصل لحل واضح.

1-3-1- حل المعادلات الخطية Linear equations solution:

يعتمد حل المعادلات عموماً على الخواص الآتية:

- في حال جمع أو طرح نفس المقدار من طرفي المعادلة فإنّ المساواة تبقى محققة.
- في حال ضرب أو قسمة طرفي المعادلة بمقدار ما فإنّ المساواة تبقى محققة.

مثال 1: لحل المعادلة :

$$8x - 3(x - 4) = 3(x - 4) + 6$$

يتم اتباع الخطوات الآتية:

$$8x - 3(x - 4) = 3(x - 4) + 6$$

$$8x - 3x + 12 = 3x - 12 + 6$$

$$5x + 12 = 3x - 6$$

يتم نقل $3x$ للطرف الأيسر مع تغيير الإشارة

$$5x - 3x + 12 = -6$$

$$2x + 12 = -6$$

$$2x = -18$$

بقسمة طرف المعادلة على 2 :

$$x = -9$$

ملاحظة: يمكن التحقق من صحة الحل بالتعويض في المعادلة.

مثال 2: لتكن المعادلة الآتية:

$$\frac{x+2}{2} - \frac{x}{3} = 5$$

لإيجاد الحل لهذه المعادلة يجب التبسيط بداية عن طريق التخلص من الكسر بضرب طرفي المعادلة بـ 6 كونه يشكل أصغر مقام مشترك (*least common denominator, LCD*) بالتالي تصبح المعادلة:

$$6\left(\frac{x+2}{2} - \frac{x}{3}\right) = 6 * 5$$

$$6 * \frac{x+2}{2} - 6 * \frac{x}{3} = 6 * 5$$

يتم اختزال الكسر في الطرف الأيسر

$$\cancel{6} * \frac{x+2}{\cancel{2}} - \cancel{6} * \frac{x}{\cancel{3}} = 6 * 5$$

$$3(x+2)-2x=30$$

$$3x+6-2x=30$$

$$x+6=30$$

$$x=24$$

ملاحظة: يمكن التأكد من الحل بالتعويض في المعادلة.

مثال تطبيقي 1:

إذا تم إيداع مبلغ P في أحد المصارف بحيث يكون معدل الفائدة السنوية البسيطة r، المطلوب:

1- صياغة كثير حدود الذي يعبر عن إجمالي المبلغ A بعد t سنة.
2- كتابة معادلة لـ r بدلالة P، A و t.
3- كتابة معادلة لـ P بدلالة r A و t.

الحل:

1- المبلغ الحالي P، بالتالي الفائدة السنوية البسيطة تساوي قيمة المبلغ * معدل الفائدة أي $(r*P)$،

وفقاً لمبدأ الفائدة البسيطة فإنّ إجمالي الفائدة بعد t سنة يساوي $r*P*t$.

بالتالي إجمالي المبلغ A بعد t سنة يساوي:

$$A=P+r*P*t$$

2- نلاحظ أن كثير الحدود هو معادلة من الدرجة الأولى لذلك لكتابة r بدلالة P، A و t سيتم عزل r بالطرف الأيسر كما يأتي:

$$P+r*P*t=A$$

بالاستفادة من خواص المعادلات نطرح من الطرفين P (أو ننقل P للطرف الأيمن من المعادلة)

$$r*P*t=A-P$$

بقسمة طرفي المعادلة على $P*t$ يصبح:

$$r=\frac{A-P}{P*t}$$

3- يتم إعادة نفس الخطوات السابقة ولكن هذه المرة بعزل P في الطرف الأيسر

$$P+r*P*t=A$$

يتم استخدام خاصية التوزيع التي عرضت في المحث السابق لإخراج P عامل مشترك

$$P(1+r*t)=A$$

بقسمة طرفي المعادلة على $(1 + r * t)$ يصبح :

$$P = \frac{A}{(1 + r * t)}$$

1-3-2- المتراجحات الخطية Linear inequalities:

المتراجحة الخطية هي عبارة عن متراجحة من الدرجة الأولى وهي تشبه المعادلات الخطية ولكن مع استبدال إشارة المساواة مع إحدى الإشارات الآتية $<$ (أصغر)، $>$ (أكبر)، أصغر أو يساوي ($\leq$)، أو $\geq$ أكبر أو يساوي، كما في المعادلات أيضاً حل المتراجحات يعتمد على الخواص الآتية:

- لا تتغير جهة المتراجحة عند إضافة أو طرح عدد حقيقي لطرفي المتراجحة.
- لا تتغير جهة المتراجحة عند قسمة او ضرب طرفي المتراجحة بعدد حقيقي **موجب**
- تنعكس جهة المتراجحة عند قسمة أو ضرب طرفي المتراجحة بعدد حقيقي **سالب**.

مثلاً:

$$-5 < -3$$

عند ضرب طرفي المتراجحة بعدد حقيقي موجب +2 تصبح:

$$-10 < -6$$

أمّا عند ضرب المتراجحة السابقة بعدد حقيقي سالب -2 تعكس الإشارة لتصبح:

$$10 > 6$$

مما سبق يتضح أنّه لحل المتراجحات يمكن اتباع نفس العمليات التي يتم تنفيذها عند حل المعادلات باستثناء عكس جهة المتراجحة إذا تمّ ضرب أو قسمة طرفيها بعدد سالب.

مثال 3: لحل المتراجحة الخطية:

$$2(2x + 3) < 6(x - 2) + 10$$

تبدأ الخطوات بتبسيط المتراجحة وعزل x

يتم حذف الأقواس: $4x + 6 < 6x - 12 + 10$

بدمج الحدود المتشابهة: $4x + 6 < 6x - 2$

بطرح $6x$ من طرفي المتراجحة $-2x + 6 < -2$

بطرح 6 من طرفي المتراجحة $-2x < -8$

بقسمة طرفي المتراجحة على 2- $x > 4$

أي أنّ x تقع في المجال $]4, +\infty[$

مثال 4: لتكن المتراجحة المزدوجة الآتية:

$$-3 < 2x + 3 \leq 9$$

لحل هذه المتراجحة سيتم التبسيط وعزل x وذلك بطرح -3 من أطراف المتراجحة:

$$-6 < 2x \leq 6$$

بقسمة اطراف المتراجحة على 2 : $-3 < x \leq 3$

أي أنّ x تقع في المجال $]-3, 3]$

1-3-3- حالات تطبيقية:

حالة تطبيقية 1:

قام شخص ما بشراء شاشة تلفاز كبيرة، وقام بدفع ضريبة قيمة مضافة بمعدل 7%، إضافة لدفع 65 دولار لقاء خدمة توصيل، فإذا كان مجموع ما دفعه هذا الشخص هو 1668.93 دولار فما هو سعر شراء هذه الشاشة؟

الحل: بفرض أنّ سعر الشراء هو x فإنّه تبعاً لمعطيات المسألة:

ثمن الشراء + ضريبة القيمة المضافة + سعر خدمة التوصيل =1668.93 أي:

$$x + 0.07 * x + 65 = 1668.93$$

وهي معادلة خطية بمجهول واحد، ولإيجاد قيمة x يتم كما هو معتاد تبسيط المعادلة وعزل x:

$$x + 0.07 * x + 65 = 1668.93$$

يتم إصلاح الحدود المتشابهة: $1.07x + 65 = 1668.93$

وبطرح 65 من طرفي المعادلة : $1.07x = 1603.93$

بقسمة طرفي المعادلة على 1.07 : $x = 1499$

أي أنّ سعر شاشة التلفاز 1499 دولار.

حالة تطبيقية 2: نقطة التعادل (Break even):

تقوم شركة متخصصة بتصنيع نوع من الحواسيب الخاصة بالدراجات بتكلفة ثابتة تقدر بـ 48000 دولار، وتكلفة متغيرة تقدر بـ 12.40 دولار للحاسوب الواحد. وكان سعر البيع هو 17.40 دولار للحاسوب الواحد. إذا أراد مدير الإنتاج في هذه الشركة معرفة عدد الحواسيب الواجب تصنيعها والتي يتساوى عندها تكلفة إنتاج الحواسيب مع إيراد بيعها؟

الحل:

من الواضح من نص المسألة أنّ مدير الإنتاج يرغب بمعرفة ما يسمّى نقطة التعادل (break even) وهي كمية الإنتاج التي تتساوي عندها التكاليف الكلية مع الإيرادات الكلية أي هي كمية الإنتاج التي يكون عندها الربح مساوياً للصفر. بعبارة أخرى:

التكاليف الكلية = الإيراد الكلي (أو قيمة المبيعات)

توضيح: إنّ التكاليف الكلية تقسم إلى قسمين تكاليف ثابتة (fixed costs) وتكاليف متغيرة (variable costs). إذ أنّ التكاليف الثابتة لا تتعلق بحجم الإنتاج مثل مصاريف تصميم منتج، الدعاية والإعلان، أو أجر العامل الثابت شهرياً. بينما التكاليف المتغيرة فهي من اسمها تتغير مع حجم الإنتاج مثل تكلفة المواد الخام، ومصاريف خدمة الآلة من قوى محركة وزيوت وتعبئة.

بالعودة إلى المسألة وبفرض أنّ كمية الإنتاج (عدد الحواسيب) التي تحقق نقطة التعادل هي x فإنّ التكاليف المتغيرة تقدر بـ $12.40 * x$، وأنّ إجمالي قيمة المبيعات (الإيراد الكلي) يساوي $17.40 * x$ بالتالي:

إنّ التكاليف الكلية C تساوي التكلفة المتغيرة + التكلفة الثابتة أي :

$$12.40 * x + 48000$$

مما سبق:

$$17.40 * x = 12.40 * x + 48000$$

وهي معادلة بمجهول واحد، ولإيجاد الحل سيتم اتباع خطوات التبسيط والعزل:

بإصلاح الحدود المتشابهة $$17.40 * x - 12.40 * x = 48000$$

$$5x = 4800$$

بقسمة طرفي المعادلة على 5 $$x = 9600$$

أي عند بيع إنتاج وبيع 9600 حاسوب يكون مقدار الربح الإجمالي مساوياً للصفر.

حالة تطبيقية 3: الرقم القياسي لأسعار المستهلك (Cosumer price index CPI):

يعتبر الرقم القياسي لأسعار المستهلك (CPI) مقياساً متوسط تغير الأسعار (أسعار السلع والخدمات) في سوق أو بلد ما في سنة ما مقارنة بسنة أخرى تسمى سنة الأساس. كما يعتبر هذا المؤشر مقياس للقوة الشرائية Purchasing power للدخل الفردي (أي مقدار السلع والخدمات التي يمكن شراؤها بهذا الدخل). بالتالي فإنّ مؤشر الرقم القياسي للأسعارCPI يعتبر من المؤشرات الهامّة التي تساعد في معرفة مقدار تغير القوة الشرائية للفرد من سنة لأخرى. ويعتبر مقياس هامّا لحساب معدل التضخم inflation rate في الاقتصاد.

مثلاً إذا كان الرقم القياسي للأسعار في عام 2014 هو 150% مقارنة بسنة الأساس 2000 فهذا يعني أنّ أسعار السلع والخدمات ارتفعت في عام 2014 بمقدار 50% عمّا كانت عليه في عام 2000. وكذلك إذا كان الرقم القياسي للأسعار في عام 2005 هو 75% مقارنة بسنة الأساس 2000، فهذا يعني أنّ أسعار السلع والخدمات انخفضت بمقدار 25% عمّا كانت عليه في عام 2000.

وكمثال لهذه الحالة التطبيقية يمكن طرح السؤال الآتي، كم يجب أن يكون الدخل السنوي للفرد في عام 2022 لكي يستطيع شراء نفس مقدار السلع والخدمات التي كان يشتريها في عام 2000 ؟ بفرض أنّ الدخل السنوي للفرد في عام 2000 كان 13000 دولار، وأنّ الرقم القياسي للأسعار في عام 2000 كان 29.6% وأنّ الرقم القياسي للأسعار في عام 2022 هو 241.7%.

الحل:

بفرض أنّ الدخل في عام 2022 هو x،

إذا كان $\frac{CPI_{2022}}{CPI_{2000}}$ تعبر عن مقدار تغير الأسعار بين سنة 2022 وسنة 2000، فإنّ لمعرفة مقدار الدخل السنوي للفرد والذي يمكنه من شراء نفس مقدار السلع والخدمات التي كان يشتريها في عام 2000، يجب ان تتحقق النسبة الآتية:

$$\frac{x}{13000} = \frac{241.7}{29.6}$$

بضرب طرفي هذه النسبة بـ 13000 :

$$x = 13000 * \frac{241.7}{29.6}$$

$$x = \frac{3142100}{29.6}$$

$$x = 106152$$

أي أنّه لكي يتمكن الفرد في عام 2022 من شراء نفس مقدار السلع والخدمات التي كان يستطيع شراؤها في عام 2000 يجب ان يكون دخله السنوي مساوياً لـ 106152 دولار.