رياضيات الأعمال- المحاضرة الأولى

Mathematics For Business

Dr. Fadi KHALIL

Doctor lecturer in statistics and programing department

في هذه المحاضرة سيتم التطرق للمواضيع الآتية:

مقدمة: 3

1- أساسيات في الرياضيات Basics on mathematics: 4

1-1- مجموعات الأعداد Number sets: 4

1-1-1- مجموعة الأعداد الطبيعية Natural numbers: 4

1-1-2- مجموعة الأعداد الصحيحة Integers: 4

1-1-3- مجموعة الأعداد الكسرية (الفاصلة المنتهية) Rational number: 4

1-1-4- مجموعة الأعداد غير الكسرية (الفاصلة غير المنتهية) Irrational number: 4

1-1-5- مجموعة الأعداد الحقيقية Real numbers: 5

1-1-5-1- مستقيم الأعداد الحقيقي Real number line: 5

1-1-5-2- الخواص الرئيسة لمجموعة الأعداد الحقيقية: 6

1-1-5-3- أسئلة غير محلولة: 7

1-2- كثير الحدود Polynomial: 7

1-2-1- الأس المرفوع لعدد طبيعي natural number exponenets: 7

1-2-2- مفهوم كثير الحدود Polynomial: 8

1-2-3- العمليات على كثير الحدود Operations on polynomial: 8

1-2-4- حالات تطبيقية: 11

مقدمة:

تتضمن الحياة والمجتمعات الإنسانية الكثير من الظواهر والمستجدات المتسارعة التي تضفي نوع من التعقيد المتزايد عليها. مما يجعل من الصعوبة في الوقت الراهن تحقيق المصالح وضمان الحصول على مستوى جيّد أو مقبول من الرخاء. هذا الأمر يظهر ضرورة قياس حركة هذه الظواهر تمهيداً لتحليها أولاً وللتنبؤ بها في المستقبل ثانياً. ولا شك أنّ القياس والتحليل الجيّد والموضوعي للظواهر يتطلب تكامل وتضافر عدة علوم مثل الرياضيات والإحصاء، بالإضافة إلى العلوم الاجتماعية التخصصية مثل الاقتصاد، وعلم الاجتماع، والعلوم الطبية والهندسية.

ضمن هذا السياق يأتي مقرر رياضيات الأعمال الذي يهدف إلى تزويد الطالب بالمعارف الرياضية الأساسية، ومن ثمّ تطعيمها بمهارات إحصائية. هذا يشكل قاعدة أساسية لتعريف الطالب بكيفية استخدام المفاهيم الرياضية والإحصائية لقياس وحل المشاكل المالية والاقتصادية.

بالتالي يمكن تقسيم هذا المقرر إلى قسمين:

- قسم أساسيات الرياضيات (Bascis of mathematics)، حيث سيتم عرض المفاهيم الجبرية الأساسية مثل خواص مجموعات الأعداد (Number sets properties)، العمليات على كثير الحدود (Operations on polynomials)، والتوابع (Functions) المعادلات (equations) والمتراجحات (inequalities)، الرسوم والخطوط البيانية (Graphics and lines)، مقدمة عن مفهوم الانحدار (introduction for regression)، بالإضافة للتعريف بالمتواليات العددية ومنها الحسابية والهندسية (arithmetic and geometric sequences).
- قسم الرياضيات المالية (Mathematics of finance)، يستفيد من القسم السابق ليتم التطرق إلى الأرقام القياسية (Index numbers)، وحساب معدل التضخم (Inflation rate)، كيفية حساب الفوائد بأنواعها البسيطة والمركبة (simple and compound interest rates)، معدلات الخصم (discount rates) والقيم المستقبلية والحالية (Future and present values)، والدفعات الدورية (Annuities) إضافة لاستهلاك القروض (Loans amortisation). علاوةً على ذلك سيتم عرض كيفية حل جملة معادلات خطية (System of linear equations) باستخدام المصفوفات (Matrix) لما له من أهمية في حل الكثير من المشاكل الاقتصادية التي تصادف أصحاب المشاريع.

ما يميّز هذا المقرر هو مرافقة المفاهيم النظرية مع حالات تطبيقية واقعية لها صلة بعالم الأعمال. وهذا يفيد في ترجمة مشاكل العالم الحقيقي إلى صياغة رياضية، مما يسهل على الطالب الفهم أولاً ويمكنه من استخدام هذه المفاهيم في سوق العمل ثانياً.

1- أساسيات في الرياضيات Basics on mathematics:

يقوم هذا القسم بالتذكير ببعض المفاهيم الجبرية الأساسية والتي تعتبر الأساس الذي تبنى عليه الرياضيات المالية والاقتصادية. ومن هذه المفاهيم:

1-1- مجموعات الأعداد Number sets:

يتضمن نظام الأعداد في الجبر عدة مجموعات تختلف عن بعضها البعض بخواص رئيسية، وأشملها هي مجموعة الأعداد الحقيقية (real numbers set). ومن هذه المجموعات نذكر من الأصغر إلى الأشمل:

1-1-1- مجموعة الأعداد الطبيعية Natural numbers:

وهي المجموعة التي تحتوي على أعداد موجبة فقط وغير كسرية، ويرمز لها بالرمز N،

$$1, 2, 3, 4, \ldots.$$

مثال: مثال عدد الطلاب في كلية إدارة الأعمال، مثال آخر؟؟؟

1-1-2- مجموعة الأعداد الصحيحة Integers:

وهي مجموعة الأعداد الطبيعية، بالإضافة إلى أرقامها السالبة والصفر، ويرمز لها بالرمز Z:

$$\ldots., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

مثال: الفرق بين عدد الأهداف التي أحرزها اللاعب بين مباراة وأخرى، أو الفرق في عدد الأولاد بين أسرة وأخرى.

1-1-3- مجموعة الأعداد الكسرية (الفاصلة المنتهية) Rational number:

وهي المجموعة التي تتضمن مجموعة الأعداد الصحيحة بالإضافة إلى الأعداد المكونة من نسبة رقمين صحيحين، مثلاً إذا كان a و b عددين صحيحين فإنّ النسبة $\frac{a}{b}$ يعتبر عدد كسري منتهي بشرط أن يكون $b \neq 0$ (لا يساوي الصفر)، وبشرط ان تكون عدد الأرقام بعد الفاصلة العشرية منتهية (مثل 3.67) أو متكررة (0.3333).

يرمز لهذه المجموعة بالرمز Q:

$$\ldots., -4, \frac{-9}{2}, -3, -2, -1, 0, 0.333, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

مثال: معدل النمو الاقتصادي أو معدل درجات الطلاب بشرط أن يكون الأعداد بعد الفاصلة العشرية منتهية أو متكررة.

1-1-4- مجموعة الأعداد غير الكسرية (الفاصلة غير المنتهية) Irrational number:

وهي مجموعة الأعداد الي يعبر عنها بشكل غير كسري أي مع أعداد بعد الفاصلة قد تكون غير متكررة وغير منتهية. وهي لا يعبر عنها بنسبة عددين صحيحين، ويرمز لها بالرمز I:

$$\ldots., -1.25415, 0.21478, \sqrt{3}, 2.7812281, \ldots.$$

مثال: معدل درجات الطالب عندما يتم كتابته على شكل عدد كسري بأرقام بعد الفاصلة غير منتهية وغير متكررة.

1-1-5- مجموعة الأعداد الحقيقية Real numbers:

وهي مجموعة الأعداد التي تتضمن كل من مجموعة الأعداد الكسرية المنتهية وغير المنتهية. يرمز لها بالرمز R:

$$\ldots., -4, \frac{-9}{2}, -3, -2, -1.25415, -1, 0, 0.333, \frac{1}{2}, 1, , \sqrt{3}, 2$$

مثال: معدل اطوال الطالب، الوزن، نسبة السكر في الدم، سعر السهم في البورصة.

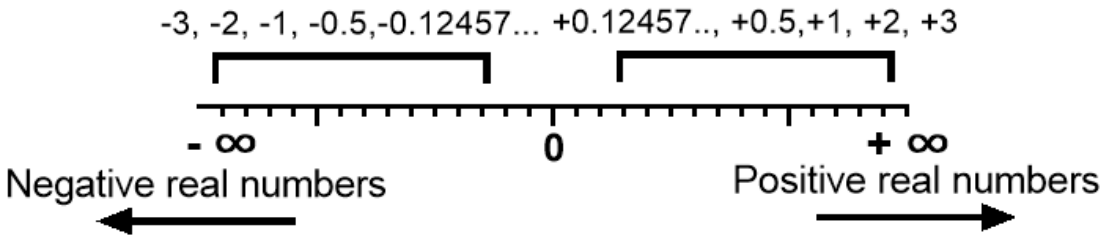
فيما يأتي شكل توضيحي للمجموعات السابقة:

الشكل (1) مخطط توضيحي لمجموعات الأعداد

يلاحظ من الشكل (1) أنّ مجموعة الأعداد الصحيحة Z تتضمن مجموعة الاعداد الطبيعية N بالإضافة لسالب الأعداد الطبيعية والصفر. كذلك إن مجموعة الأعداد الكسرية المنتهية Q المنتهية تتضمن مجموعة الأعداد الصحيحة Z بالإضافة إلى الشكل الكسري لعددين صحيحين. وفي النهاية مجموعة الأعداد الحقيقية R فإنّها تتضمن مجموعة الاعداد السكرية المنتهية Q ومجموعة الأعداد الكسرية غير المنتهية I.

1-1-5-1- مستقيم الأعداد الحقيقي Real number line:

ترتبط مجموعة الأعداد الحقيقية R بمستقيم الأعداد حيث يتوافق كل عدد حقيقي مع نقطة على هذا المستقيم، كذلك يمثل العدد صفر نقطة المنتصف في المستقيم بحيث تعبر النقاط الموجودة على اليمين عن الأعداد الحقيقية الموجبة بينما تعبر النقاط الموجودة على اليسار عن الأعداد الحقيقية السالبة كما يوضح الشكل الآتي:



الشكل (2) مستقيم الأعداد الحقيقية

1-1-5-2- الخواص الرئيسة لمجموعة الأعداد الحقيقية:

فيما يأتي عرض لبعض الخواص الرئيسة التي تتمتع بها مجموعة الأعداد الحقيقية:

بفرض a, b, c أعداد تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية R فإنّ هذه الأعداد تحقق:

- **خواص الجمع addition properties:**

التوزيع Associative: $(a + b) + c = a + (b + c)$

$$(8 + 2) + 4 = 8 + (2 + 4)$$

التبادلية Commutative: $a + b = b + a$

$$5 + 4 = 4 + 5$$

المعكوس Inverse: من أجل كل عدد a في R يوجد عدد سالب وحيد $-a$ بحيث يكون

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$
$$5 + (-5) = (-5) + 5 = 0$$

- **خواص الضرب Multiplication properties:**
- التوزيع Associative: $(a * b) * c = a * (b * c)$

$$(8 * 2) * 4 = 8 * (2 * 4)$$

- التبادلية Commutative: $a * b = b * a$

$$5 * 4 = 4 * 5$$

- المعكوس Inverse: من أجل كل عدد a في R يوجد $1/a$ بشرط $a \neq 0$ بحيث يكون

$$a * \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) * a = 1$$

$$5 * \left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right) * 5 = 1$$

1-1-5-3- أسئلة غير محلولة:

أي من العبارات الآتية هي صحيحة T أو خاطئة F:

1- $a(b-c)=ab-c$ (*True, Fasle*).

2- $(a-b)-c=a-(b-c)$ (*True, Fasle*).

3- $a(bc)=(ab)c$ (*True, Fasle*).

4- جميع الأعداد الصحيحة *integers* هي أعداد طبيعية *natural* (*True, Fasle*).

5- جميع الاعداد الكسرية المنتهية *rational* هي أعداد حقيقية *real* (*True, Fasle*).

6- جميع الأعداد الطبيعية *natural* هي أعداد كسرية منتهية *rational* (*True, Fasle*).

7- الأعداد الطبيعية *natural* هي أعداد صحيحة *integers* (*True, Fasle*).

8- جميع الأعداد الحقيقية هي أعداد غير كسرية (غير منتهية) *irrational* (*True, Fasle*).

9- جميع الأعداد الكسرية المنتهية *rational* هي أعداد حقيقية *real* (*True, Fasle*).

1-2- كثير الحدود Polynomial:

يمتلك المفهوم الجبري كثير الحدود (*polynomial*) أهمية كبيرة في علوم الرياضيات والقياس وبشكل أكثر تحديداً يعتبر كثير الحدود الأساس الذي ترتكز عليه الصيغ والتوابع الرياضية المستخدمة في الحسابات المالية والاقتصادية مثل حسابات الفوائد، معدل الربح الإجمالي، والتكاليف الإجمالية، ....

قبل التعريف بمفهوم كثير الحدود لا بدّ من المرور بمفهوم جبري مرتبط به وهو رفع الأس لعدد طبيعي (*natural number exponent*).

1-2-1- الأس المرفوع لعدد طبيعي natural number exponents:

من أجل أي عدد طبيعي n و أي عدد حقيقي b :

$$b^n = b * b * \dots . b$$

$$3^5 = 3 * 3 * 3 * 3 * 3 = 243$$

من خواص الأسس أنّه من أجل عددين طبيعين m و n، وعدد حقيقي b :

$$b^m * b^n = b^{n+m}$$

$$2^3 * 2^4 = 2^{3+4} = 128$$

1-2-2- مفهوم كثير الحدود Polynomial:

عموماً يوجد نوعين من الحدود منها ما هو ثابت *constant*، a مثل مساحة أرض ما، ومنها ما هو متغير *variable* مثل محصول هذه الأرض عبر الزمن x_t. والتعابير الجبرية كذلك تتشكل من حدود ثابتة ومتغيرات وعمليات حسابية من جمع، طرح، قسمة، ضرب، رفع للأس، وجذور. ومفهوم كثير الحدود *polynomials* يشكل حالة خاصة من التعبير الجبري. من هنا فإنّ كثير الحدود لمتغير واحد يتكون عن طريق طرح أو جمع ثابت مع حد من الشكل ax^n، حيث a هو عدد حقيقي، و n هو عدد طبيعي. ولتحديد درجة كثير الحدود لمتغير واحد يتم النظر إلى درجة الأس الأعلى.

مثال 1:

كثير حدود لمتغير واحد وبدرجة واحدة:

$$2x + 1$$

كثير حدود لمتغير واحد وبدرجة تساوي 2:

$$6x^2 + 5x + 1$$

كذلك كثير الحدود لمتغيرين يتكون من ثابت مع حد من الشكل $ax^n y^m$، حيث a هو عدد حقيقي، و n، m هو عدد طبيعي. ويمكن تحديد درجة كثير الحدود لمتغيرين عن طريق جمع الأس الأعلى لكل متغير

مثال 2:

كثير الحدود لمتغيرين وبدرجة حرية تساوي 3.

$$6x^2 + 5yx + 4$$

كثير الحدود لمتغيرين وبدرجة حرية تساوي 5.

$$7x^3y^2 + 3y + 4$$

1-2-3- العمليات على كثير الحدود Operations on polynomial:

يسمى الثابت والذي يكون عبارة عن عدد حقيقي (*real number*) مع إشارة (- أو +) والمرافق لكل حد من كثير الحدود بالمعامل (*coefficient*). وفي حال وجود إشارة فقط (- أو +) يكون المعامل مساوياً للواحد. مثلا ليكن كثير الحدود الآتي:

$$5x^4 - x^3 - 3x^2 + x - 7$$

معامل الحد الأول هو 5، الحد الثاني -1، الحد الثالث هو -3، الحد الرابع +1، والحد الخامس هو -7.

خاصية التوزيع الآتية تعتبر مهمة لفهم العمليات على كثير الحدود:

- **خاصية التوزيع للأعداد الحقيقية:**

$$a(b+c) = (b+c)a = ab + ac$$

$$5(3+2) = (3+2)5 = 5*3 + 5*2 = 25$$

$$a(b-c) = (b-c)a = ab - ac$$

$$5(3-2) = (3-2)5 = 5*3 - 5*2 = 5$$

مثال 3: ليكن كثير الحدود الآتي:

$$3x^2y - 5xy^2 + x^2y - 2x^2y = 3x^2y + 1x^2y - 2x^2y - 5xy^2$$
$$= (3x^2y + 1x^2y - 2x^2y) - 5xy^2$$
$$= (3+1-2)x^2y - 5xy^2$$
$$= 2x^2y - 5xy^2$$

وكثير الحدود:

$$4(x-2y) - 3(2x-7y) = 4x - 8y - 6x + 21y$$
$$= -2x + 13y$$

- **التعامل مع الأقواس في كثير الحدود *Removing parentheses*:**

مثال: ليكن كثير الحدود الآتي:

$$2(3x^2 - 2x + 5) + (x^2 + 3x - 7) = 6x^2 - 4x + 10 + x^2 + 3x - 7$$
$$= 7x^2 - x + 3$$

وكثير الحدود:

$$(x^3 - 2x - 6) - (2x^3 - x^2 + 2x - 3) = x^3 - 2x - 6 - 2x^3 + x^2 - 2x + 3$$
$$= -x^3 + x^2 - 4x - 3$$

فيما يأتي يتم عرض عدة عمليات هامّة يتم إجراؤها على كثير الحدود:

- **جمع وطرح كثير الحدود *Addition and subtraction*:**

في الجمع أو الطرح في كثير الحدود يتم مطابقة أس كل حد من الحدود وإجراء عملية الطرح أو الجمع بينها، كما يوضح المثال الآتي:

مثال 4: لجمع كثيري الحدود الآتية:

$$x^4 - 3x^3 + x^2, \qquad -x^3 - 2x^2 + 3x, \qquad and\ 3x^2 - 4x - 5$$

يتم الجمع أفقياً كما يأتي:

$$= (x^4 - 3x^3 + x^2) + (-x^3 - 2x^2 + 3x) + (3x^2 - 4x - 5)$$
$$= x^4 - 3x^3 + x^2 - x^3 - 2x^2 + 3x + 3x^2 - 4x - 5$$
$$= x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 5$$

وللطرح يتم اتباع نفس الأسلوب:

مثال 5: لطرح كثيري الحدود $4x^2 - 3x + 5$ من كثير الحدود $x^2 - 8$ يتم:

$$(x^2 - 8) - (4x^2 - 3x + 5) = x^2 - 8 - 4x^2 + 3x - 5$$
$$= x^2 + 3x - 13$$

- ضرب **كثير الحدود** *Multiplying polynomials*:

هنا يتم استخدام خاصية التوزيع للأعداد الحقيقية وخاصية ضرب الأسس التي تم عرضها في بداية هذا المبحث، كما يوضح المثال الآتي:

مثال 6: لإجراء عملية الضرب لـ $(3x^2 - 2x + 3)$ مع $(2x - 3)$

$$(2x - 3)\ (3x^2 - 2x + 3) = 2x(3x^2 - 2x + 3) - 3(3x^2 - 2x + 3)$$
$$= 6x^3 - 4x^2 + 6x - 9x^2 + 6x - 9$$
$$= 6x^3 - 13x^2 + 12x - 9$$

- **حالات خاصة *Special products*:**

في العمليات على كثير الحدود يوجد عدة حالات خاصة:

- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

أمثلة على حالات خاصة:

- $(3a - 2b)(3a + 2b) = (3a)^2 - (2b)^2$
  $= 9a^2 - 4b^2$
- $(5x - 3)^2 = (5x)^2 - 2(5x)(3) + 3^2$
  $= 25x^2 - 30x + 9$

لتركيز مهارة تنفيذ العمليات على كثير الحدود سيتم عرض المثال الآتي:

$$3x - \{5 - 3[x - x(3 - x)]\} = 3x - \{5 - 3[x - 3x + x^2]\}$$
$$= 3x - \{5 - 3x + 9x - 3x^2]\}$$
$$= 3x - 5 + 3x - 9x + 3x^2$$
$$= 3x^2 - 3x - 5$$

تمرين غير محلول:

قم بتنفيذ العمليات الآتية على كثير الحدود:

$$(x - 2y)(2x + 3y) - (2x + y)^2$$

1-2-4- حالات تطبيقية:

1- بفرض أنّ لديك مبلغ للاستثمار بقيمة 10000 دولار، وتمّ تقسيمه إلى قسمين، الأول يبلغ معدل العائد له 9% بينما معدل العائد للقسم الثاني 12%. المطلوب كتابة كثير حدود يعبر عن مقدار العائد الإجمالي المتحقق من استثمار هذا المبلغ.

الحل: نفرض أنّ القسم الذي يتم استثماره بمعدل عائد 9% هو x بالتالي يكون القسم الثاني $(10000 - x)$ وبالتالي إجمالي العائد المتوقع يعبر عنه بكثير الحدود الآتي :

$$0.09x + 0.12(10000 - x) = 0.09x + 1.2 - 0.12x$$
$$= 1200 - 0.03x$$

2- 4000 بطاقة معدة للبيع لحضور عرض موسيقي، وهي مقسمة إلى ثلاث فئات حسب مكان الحضور، الفئة الأولى x تباع البطاقة بسعر 20 دولار، يبلغ عدد بطاقات الفئة الثانية ثلاث أضعاف عدد بطاقات الفئة الأولى ويباع بـ 30 دولار، أمّا الفئة الثالثة تباع بطاقاتها بسعر 50 دولار. المطلوب صياغة كثير الحدود الذي يعبر عن إجمالي العائد المتوقع من بيع البطاقات.

الحل: عدد بطاقات الفئة الأولى x ويباع بسعر 20 $، عدد بطاقات الفئة الثانية $3x$ ويباع بسعر 30 $، بالتالي عدد بطاقات الفئة الثالثة $4000 - 3x - x$ وسيباع بسعر 50 $.

من المعلومات السابقة يمكن كتابة كثير الحدود الذي يعبر عن إجمالي العائد المتوقع كما يأتي:

$$20x + 30(3x) + 50(4000 - 3x - x) = 20x + 90x + 50(4000 - 4x)$$
$$= 20x + 90x + 200000 - 200x$$

$$= 20000 - 90x$$

3- **حالة تطبيقية غير محلولة:** يملك شخص مبلغ 100000، إذ قرر هذا الشخص استثمار هذا المبلغ على أجزاء، الجزء الأول x يستثمر بمعدل عائد 7%، الجزء الثاني يساوي مثلي الجزء الأول ويستثمر بمعدل عائد 9%، أمّا الجزء المتبقي فيتم استثماره بمعدل عائد 11%، والمطلوب صياغة كثير حدود للتعبير عن إجمالي العائد المتوقع من استثمار هذا المبلغ.