رياضيات الأعمال- المحاضرة الثالثة

Mathematics For Business- Lecture 3

Dr. Fadi KHALIL

Doctor lecturer in statistics and programing department

في هذه المحاضرة سيتم التطرق على:

1-4- الرسوم والخطوط البيانية Graphics and lines:

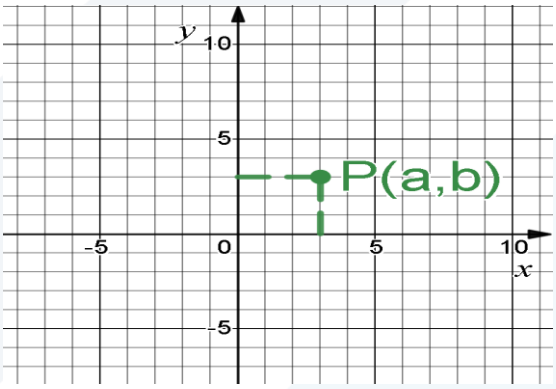
1-4-1- رسم معادلة خط المستقيم Graph of linear equation:

1-4-2- ميل خط المستقيم Slope of line:

1-4-3- حالات تطبيقية:

1-4- الرسوم والخطوط البيانية Graphics and lines:

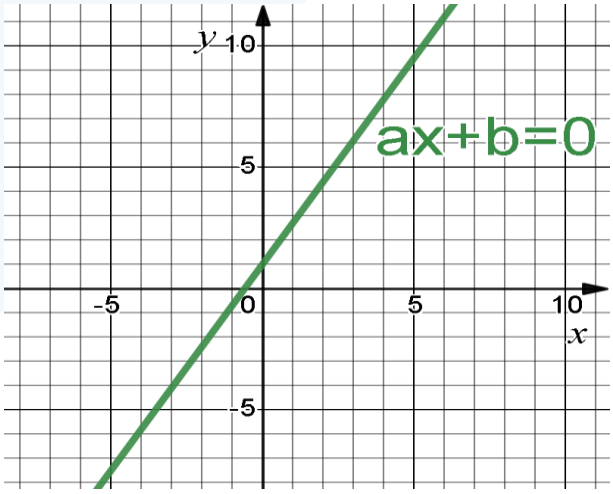
في هذا المبحث سيتم التركيز على الرسوم البيانية التي تقوم على محورين متعامدين (orthogonal axes)، أحدهما أفقي يرمز له عادة (x)، والآخر عمودي يرمز له عادة (y). وكما هو معلوم أنّه لتحديد أي نقطة في رسم بياني مكوّن من محورين يجب أن يكون لهذه النقطة إحداثيات على هذين المحورين، مثلاً النقطة P يجب أن يكون لها إحداثية a (coordinate) على محور x، وإحداثية b على محور y، وتكتب $P(x = a, y = b)$ أو (a, b)، كما يظهر الشكل الآتي:



بالتالي إنّ تحديد مجموعة من النقاط على المحورين (x, y) يظهر شكل بياني ما، وقد يكون هذا الشكل معبراً عنه بمعادلة ما بين متغيرين. مثلاً معادلة الدرجة الأولى لمتغير واحد في المبحث السابق:

$$ax + b = 0 \qquad a \neq 0$$

أطلق عليها بمعادلة **خط مستقيم** وذلك لأنّ الشكل البياني المرتبط بهذه المعادلة هو خط مستقيم:



1-4-1- رسم معادلة خط المستقيم Graph of linear equation:

في المعادلة السابقة يوجد متغير واحد في المعادلة، وبفرض وجود متغيرين فإنّ معادلة الخط المستقيم تكتب كما يأتي:

$$ax + by = c$$

حيث، a، b، و c تمثل ثوابت (constants)، و x و y تعبر عن متغيرات (variables).

يلاحظ أنّه يوجد معادلة واحدة بمتغيرين (أو مجهولين) بالتالي من المعلوم أنّ في هذه الحالات لا يوجد حل وحيد بل عدد لا نهائي من الحلول، أي هو عبارة عن أي نقطة تحقق المعادلة. مثلاً، النقطة (4,3) تمثل أحد الحلول للمعادلة الآتية:

$$3x - 2y = 6$$

مثال 5:

لتكن المعادلة الآتية:

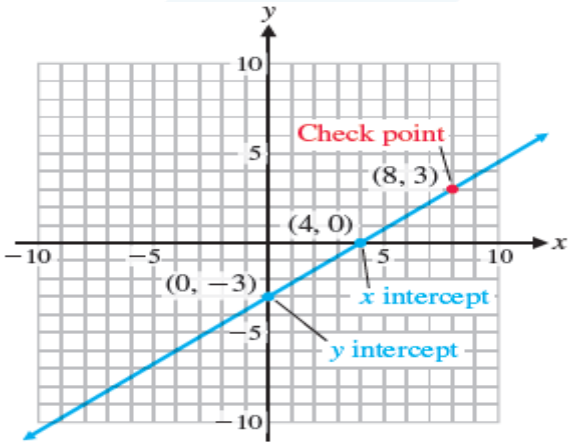
$$3x - 4y = 12$$

من الواضح أنّ هذه المعادلة تمثل معادلة خط مستقيم line equation، وبالتالي لرسم هذا المستقيم يكفي إيجاد نقطتين لكي يمر بهما هذا المستقيم:

مثلاً، عندما تكون $x = 0$ فإنّ $y = -3$ أي أنّ النقطة الأولى $(0, -3)$.

وعندما تكون $y = 0$ فإنّ $x = 4$ أي أنّ النقطة الثانية $(4,0)$.

ويمكن تجريب نقطة أخرى مثلاً عندما تكون $x = 8$ فإنّ $y = 3$ أي أنّ المستقيم يمر بالنقطة $(8,\ 3)$ أيضاً.

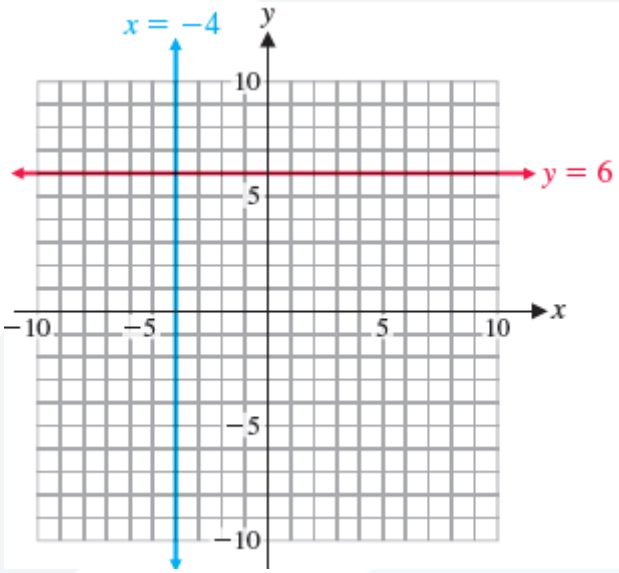


- رسم خط مستقيم أفقي أو عمودي **Horizontal or Vertical line :**

من المعادلة $x = -4$ يمكن القول أنّها تمثل معادلة خط مستقيم بمتغيرين ولكن مع افتراض أن المتغير المعامل b في المعادلة $ax + by = c$ يساوي الصفر، وبالتالي مهما كانت قيم المتغير y فإنّ المستقيم سوف يأخذ إحداثيات (coordinate) على المحور x تساوي c أو -4. من أجل ذلك تمثل المعادلة $x = -4$ خط عمودياً موازياً للمحور y.

نفس الأمر في المعادلة $y = 6$ يمكن القول أنّها تمثل معادلة خط مستقيم بمتغيرين ولكن مع افتراض أن المتغير المعامل a في المعادلة $ax + by = c$ يساوي الصفر، وبالتالي مهما كانت قيم المتغير x فإنّ المستقيم سوف يأخذ

إحداثيات (coordinate) على المحور x تساوي c أو 6. من أجل ذلك تمثل المعادلة $y = 6$ خط أفقياً موازياً للمحور x.



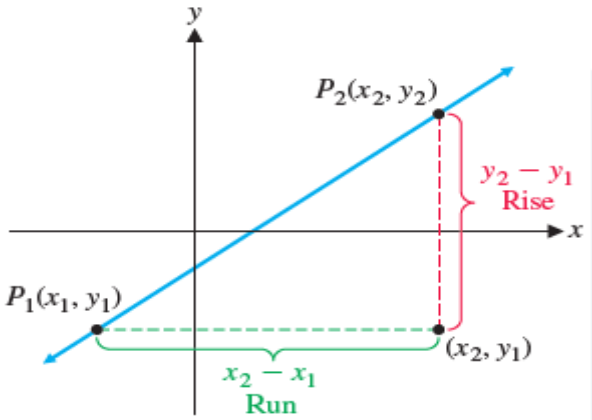
2-4-1- ميل خط المستقيم Slope of line:

عند تمثيل معادلة ما تحتوي على متغيرين، فإنّ مقدار الزاوية التي يرسمها المنحنى مع المحور الأفقي x تسمّى الميل (*Slope*). بمعنى آخر يعبر عن مقدار التغير في y نتيجة التغير في x.

فمثلاً لتكن نقطتين (x_1, y_1)، و (x_2, y_2)، على خط مستقيم فإنّ ميل هذا الخط (*the slope*) يقاس بنسبة التغير في y على التغير في x:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{\text{التغير على المحور العمودي}}{\text{التغير على المحور الأفقي}}$$



مثال 5: ليكن النقاط الآتية:

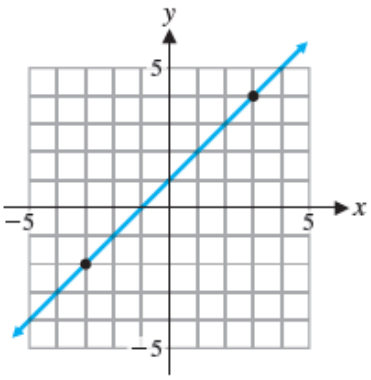
A- (-3, -2), (3, 4) *B- (-1, 3) , (2,-3)*

C- (-2, -3), (3, -3) *D- (-2,4), (-2, -2)*

ارسم خط مستقيم يمر من كل نقطتين من هذه النقاط، ثمّ أوجد ميل (*slope*) هذا المستقيم:

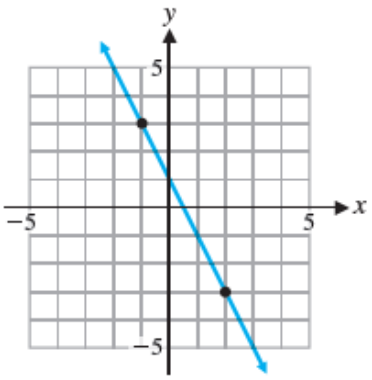
الحل:

(A)



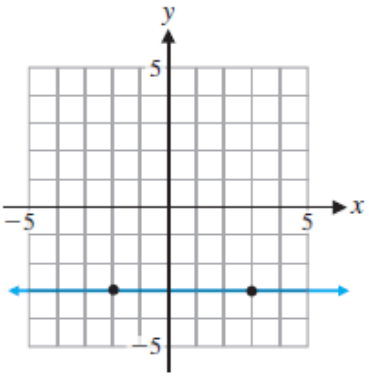
$$m = \frac{4-(-2)}{3-(-3)} = \frac{6}{6} = 1$$

(B)



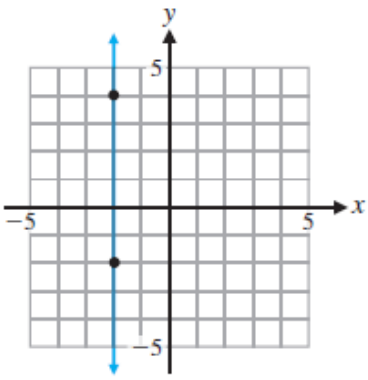
$$m = \frac{-3-3}{2-(-1)} = \frac{-6}{3} = -2$$

(C)



$$m = \frac{-3-(-3)}{3-(-2)} = \frac{0}{5} = 0$$

(D)



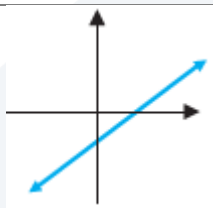
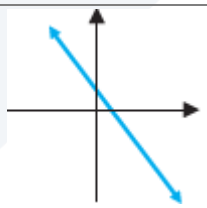
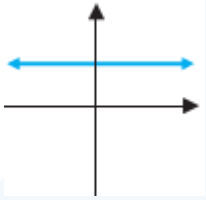
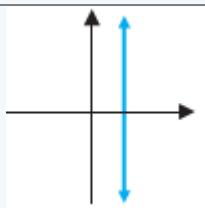
$$m = \frac{-2-4}{2-(-2)} = \frac{-6}{0}$$

الميل غير معرف (*not defined*)

ملاحظة: إذا تمّ أخذ أي نقطتين على المستقيم وتمّ حساب النسبة $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ فإنّ هذه النسبة تبقى ثابتة ولا تتغير.

- **التفسير الهندسي للميل Geometric interpretation of slope:**

بملاحظة المثال 5 يمكن استنتاج ما يأتي:

المستقيم Line	المستقيم يتحرك من يمين المحور x إلى اليسار	المستقيم يتحرك من يسار المحور x إلى اليمين	المستقيم أفقي Horizontal	المستقيم عمودي Vertical
الميل Slope	موجب Positive	سالب negative	الميل صفر	الميل غير معرف
مثال				

- **المعنى الهندسي لكل من القاطع والميل *Geometric meaning of intercept and slope*:**

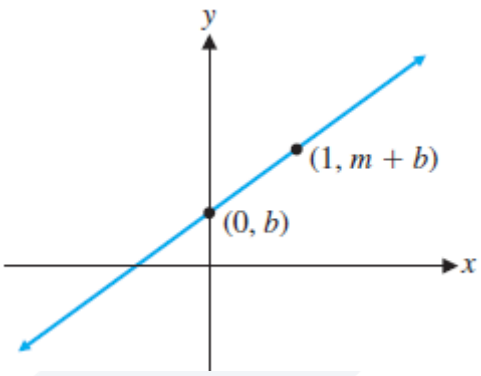
لتكن المعادلة $y = mx + b$، من الملاحظ أنّه عندما تكون $x = 0$ فإنّ $y = b$ إذاً تكون النقطة $(0, b)$ ممثلة على المستقيم الممثل لهذه المعادلة، وهي تشكل النقطة التي يقطع (*intercept*) بها المستقيم المحور العمودي y. ولهذا يطلق على الثابت b اسم القاطع (*intercept*). مثلاً القاطع (*intercept*) للمستقيم الممثل بالمعادلة $y = -4x - 1$ هو -1.

كذلك إذا افترضنا أنّ $x = 1$، فإنّ $y = m + b$، بالتالي يتكون نقطة أخرى هي $(1, m + b)$. وإذا تمّ حساب الميل (*slope*) بين النقطتين $(0, b)$، و $(1, m + b)$

$$slope = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$slope = \frac{m + b - b}{1 - 0} = \frac{m}{1} = m$$

إذاً فإنّ الميل slope في المعادلة $y = mx + b$ يكون دائماً ممثلاً بـ m.



- **صيغة النقطة –الميل Point-slope form:**

معادلة خط مستقيم مع ميل m والذي يمر بالنقطة (x_1, y_1)، يمكن كتابتها كما يأتي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

وتدعى هذه الصيغة بصيغة النقطة ميل point-slope form.

مثال 6: لإيجاد معادلة خط مستقيم بميل يساوي 0.5 ويمر بالنقطة $(-4,3)$ يتم تطبيق صيغة النقطة- ميل كما يأتي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = 0.5(x - (-4))$$
$$y - 3 = 0.5(x + 4)$$
$$y - 3 = 0.5x + 2$$
$$y = 0.5x + 5$$

مثال 7: لإيجاد معادلة خط مستقيم يمر من نقطتين الأولى $(x_1,\ y_1)$ هي $(-3,2)$، والثانية $(x_2,\ y_2)$ هي $(-4,5)$.

معادلة خط المستقيم تأخذ الشكل:

$$y = mx + b$$

كما تم عرضه سابقاً:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{5 - 2}{-4 - (-3)} = \frac{3}{-1} = -3$$

وباستخدام صيغة معادلة النقطة- ميل مع اعتماد النقطة $(-3,2)$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = -3(x - (-3))$$
$$y - 2 = -3(x + 3)$$
$$y - 2 = -3x - 9$$
$$y = -3x - 7$$

ملاحظة: يمكن الحصول على نفس المعادلة إذا تمّ استخدام النقطة $(-4,5)$.

1-4-3- حالات تطبيقية:

- حالة تطبيقية 1: العلاقة بين التكلفة والإنتاج Costs and outputs:

ترغب إدارة شركة مختصة في تصنيع لوحات التزلج في معرفة معدل تغير التكلفة الكلية (total costs) وفقاً لحجم الإنتاج (outputs)، ووفقاً للمعطيات التي لديها فإنّ التكلفة الكلية من دون إنتاج (أي تكلفة ثابتة fixed costs فقط) تبلغ 300 دولار في اليوم الواحد، بينما تقدر التكلفة الكلية اليومية بـ 4300 دولار لكل 100 قطعة إنتاج. وعلى افتراض أنّ التكلفة مرتبطة خطياً (linearly related) مع الإنتاج (outputs).

المطلوب:

1- إيجاد ميل المستقيم (*slope line*) الذي يربط بين التكلفة الكلية (*costs*) والإنتاج (*outputs*).
2- إيجاد معادلة المستقيم (*linear equation*) الممثلة للعلاقة بين التكلفة الكلية (*costs*) والإنتاج (*outputs*).
3- رسم المستقيم الممثل لمعادلة التكلفة والإنتاج من أجل كمية إنتاج تتراوح بين الصفر و 200.

الحل:

1- لنفرض أنّ كمية الإنتاج x وأنّ التكلفة الكلية هي y، ومن معطيات المسألة يتضح أنّه عندما يكون الإنتاج 0 (لا يوجد إنتاج) فإنّ التكلفة الكلية هي 300 أي النقطة الأولى (x_1, y_1) هي ***(0,300)***. كذلك عندما تكون كمية الإنتاج 100 فإنّ ذلك يتطلب تكلفة مقدارها 4300، أي أنّ النقطة الثانية (x_2, y_2) هي ***(100, 4300)***. ولحساب الميل (*the slope*):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{4300 - 300}{100 - 0} = \frac{4000}{100} = 40$$

بما إنّ الميل يساوي 40 فإنّ كل زيادة بمقدار وحدة واحدة من الإنتاج (one unit increasing in ouptuts) تؤدي إلى زيادة التكلفة الكلية بمقدار 40 دولار.

2- بما إنّ المعادلة هي معادلة خط مستقيم، بالتالي يمكن كتابتها على الشكل الآتي:

$$y = mx + b$$

من الطلب السابق الميل يساوي $m = 40$. ولكن يمكن الإستفادة من النقطة ***(0,300)*** أي عندما يكون الإنتاج x مساوياً للصفر فإنّ التكلفة y أو C تساوي 300. بالتعويض في المعادلة:

$$300 = 40 * 0 + b \Rightarrow b = 300$$

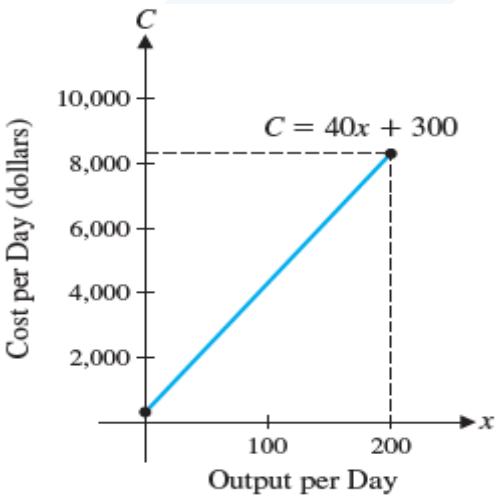
بالتالي فإنّ المعادلة تكتب:

$$c = 40x + 300$$

3- لرسم معادلة لأي مستقيم يكفي تحديد نقطتين، وبما إنّ المطلوب رسم المستقيم من اجل كمية إنتاج x تتراوح بين الصفر و 200، فإنّ النقطة الأولى هي ***(0,300)*** ولإيجاد النقطة الثانية نعوض 200 في المعادلة، $c = 40x + 300$ أي :

$$c = 40 * 200 + 300 = 8300$$

وبالتالي النقطة (200, 8300). ولرسم المستقيم إذاً يتم رسم خط بين النقطتين (0, 300) و (200, 8300) كما يأتي:



2- حالة تطبيقية 2: العلاقة بين العرض والطلب:

في سوق المنافسة الكاملة (free competitive market) يتحدد سعر منتج ما وفقاً للعلاقة بين العرض (supply) والطلب (demand). فإذا كان هناك زيادة في العرض على الطلب فإنّ السعر سينخفض. أمّا إذا كان الطلب يزيد على العرض فإنّ السعر يميل إلى الارتفاع. من ناحية أخرى فإنّ السعر يستقر إلى التوازن عندما يتساوى العرض مع الطلب.

وكمثال عن دور العلاقة بين الطلب والعرض في تحديد السعر، بفرض أنّه عند سعر 9 دولار لصندوق البرتقال الواحد فإنّ العرض هو 320 ألف صندوق، والطلب هو 200 ألف صندوق. أمّا عند سعر 8.5 دولار للصندوق الواحد فإنّ العرض هو 270 ألف صندوق، والطلب هو 300 ألف صندوق.

المطلوب:

1- إيجاد معادلة السعر العرض (Price –supply equation) $p = mx + b$ بفرض أنّ x يمثل العرض، و p يمثل السعر.
2- إيجاد معادلة السعر الطلب (Price –demand equation) $p = mx + b$ بفرض أنّ x يمثل الطلب، و p يمثل السعر.
3- رسم المستقيم الممثل لمعادلة السعر-العرض والمستقيم الممثل لمعادلة السعر-الطلب في نفس الشكل وتحديد نقطة تقاطعهما (interaction point) والتي تمثل السعر التوازني عندما يتساوى العرض مع الطلب (equilibrium point).

الحل :

1- لإيجاد معادلة السعر والعرض $p = mx + b$ ، يتم أولاً إيجاد الميل (slope) عن طريق تحديد نقطتين من الشكل (x, p)، حسب المعطيات أعلاه النقطة الأولى $(320, 9)$، والنقطة الثانية $(270, 8.5)$.

$$m = \frac{8.5 - 9}{270 - 320} = \frac{-0.5}{-50} = +0.01$$

الميل الموجب يدل على رغبة المنتجين في عرض المزيد من السلع في أسواق ذات أسعار مرتفعة.

باستخدام صيغة معادلة النقطة- ميل *point-slope form* :

$$p - p_1 = m(x - x_1)$$

وباعتماد النقطة $(320, 9)$ والميل $m = 0.01$

$$p - 9 = 0.01(x - 320)$$

$$p - 9 = 0.01x - 3.2$$

$$p = 0.01x + 5.8$$

وهي معادلة السعر والعرض *Price-supply equation*.

ملاحظة يمكن التوصل لنفس المعادلة باعتماد النقطة الأخرى $(270, 8.5)$.

2- لإيجاد معادلة السعر والطلب $p = mx + b$ ، بافتراض p تمثل السعر (price)، و x تمثل الطلب (demand)، يتم اتباع نفس الأسلوب السابق، إذا يتم أولاً إيجاد الميل (slope) عن طريق تحديد نقطتين من الشكل (x, p)، حسب المعطيات أعلاه النقطة الأولى $(200, 9)$، والنقطة الثانية $(300, 8.5)$.

$$m = \frac{8.5 - 9}{300 - 200} = \frac{-0.5}{+100} = -0.005$$

الميل السالب يعكس ميل المستهلكين على شراء المزيد من السلع مع انخفاض السعر.

باستخدام صيغة معادلة النقطة- ميل *point-slope form* :

$$p - p_1 = m(x - x_1)$$

وباعتماد النقطة $(200, 9)$ والميل $m = -0.005$

$$p - 9 = -0.005(x - 200)$$

$$p - 9 = -0.005x + 1$$

$$p = -0.005x + 10$$

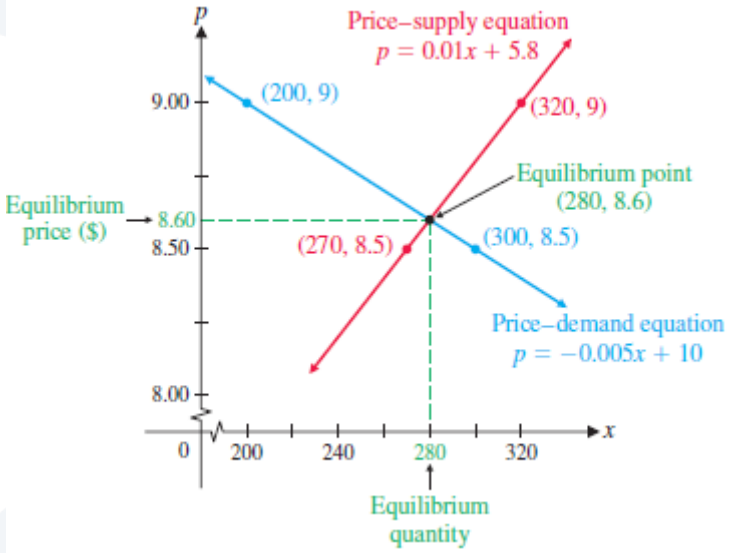
وهي معادلة السعر والطلب *Price- demand equation*.

ملاحظة يمكن التوصل لنفس المعادلة باعتماد النقطة الأخرى $(300, 8.5)$.

3- بداية يتم رسم معادلة مستقيم السعر-عرض $p = 0.01x + 5.8$ ، عن طريق تحديد النقطتين $(320, 9)$، $(270, 8.5)$. على المحورين الأفقي x والعمودي p. ومن ثم وصل مستقيم يمر بهما.

). $300, 8.5$)، ($200, 9$ يتم تحديد النقطتين $p = -0.005x + 10$ نفس الأمر لرسم معادلة السعر-طلب . ومن ثم وصل مستقيم يمر بهما. p والعمودي xعلى المحورين الأفقي

كما هو مبين في الشكل الآتي:



ويمكن إيجاد تساوي كمية العرض مع كمية الطلب (*equilibrium quantity*) عن طريق مساواة معادلة السعر-العرض مع معادلة السعر-الطلب:

price- supply equation=price-demand equation

$$0.01x + 5.8 = -0.005x + 10$$

$$0.01x + 0.005 = -5.8 + 10$$

$$0.015x = 4.2$$

$$x = 280$$

أي أنّ الكمية 280 هي الكمية التوازنية (*equilibrium quantity*) والتي يتساوى عندها العرض مع الطلب. ولإيجاد السعر التوازني عند هذه الكمية يتم التعويض في إحدى المعادلتين

إمّا:

$$p = 0.01x + 0.005$$

$$p = 0.01 * 280 + 0.005$$

$$p = 8.6$$

أو

$$p = -0.005x + 10$$

$$p = -0.005 * 280 + 10$$

$$p = 8.6$$

وهو السعر التوازني (*equilibrium price*).

بالتالي إنّ النقطة (280, 8.6) هي نقطة تقاطع مستقيمي المعادلتين والتي يطلق عليها نقطة التوازن (*equilibrium point*) كما هو موضّح في الشكل السابق. ويلاحظ أنّ قبل هذه النقطة أي عندما يكون العرض أكبر من الطلب فإنّ السعر ينخفض لكي يصل للسعر التوازني 8.6 دولار، كذلك عنجا يكون الطلب أكبر من العرض فإنّ السعر يرتفع حتى يصل للسعر التوازني 8.6 دولار.

أي أنّه في سوق المنافسة الكاملة (free competitive market) يتولد اتفاق عفوي وفقاً لقوى العرض والطلب أي بين المنتجين والمستهلكين على هذا السعر التوازني.