رياضيات الأعمال- المحاضرة السابعة

Mathematics For Business

Dr. Fadi KHALIL

Doctor lecturer in statistics and programing department

في هذه المحاضرة سيتم التطرق للمواضيع الآتية:

- مفهوم الفائدة المركبة compound interest rate.
  - القيمة المستقبلية future value
  - القيمة الحالية present value
  - إيجاد معدل الفائدة Finding interest rate
  - إيجاد الفترة الزمنية Finding investing years

2-2- الفائدة المركبة والمركبة المستمرة Compound and continuous compound interest:

في الفائدة البسيطة *simple interest* ويلاحظ أنّ الفائدة تحسب فقط على المبلغ الأساسي (*principal*) الذي تمّ اقتراضه أو استثماره. وفي نهاية المدة يتم حساب المبلغ المستقبلي بإضافة المبلغ الأساسي إلى الفائدة. ولكن هناك نوع من الفوائد يتم حسابها بشكل تراكمي، أي أنّ الفائدة التي تحسب في الفترة الأولى يتم إعادة استثمارها أو إضافتها على المبلغ الأساسي لكي يتم حساب الفائدة عليها في الفترة التي تليها. ويطلق على الفائدة التي يعاد استثمارها بالفائدة المركبة *compound interest*.

مثال إذا تم إيداع مبلغ 1000 دولار في مصرف يعطي 8% كفائدة مركبة كل ثلاث أشهر، كم ستكون قيمة المبلغ في نهاية السنة؟

إنّ الفائدة هي من النوع المركب (*compounded interest*) وهذا يعني أنّ الفائدة المتحققة مثلاً بعد 3 أشهر سيتم إضافتها للمبلغ الأساسي ليتم حساب فائدة عليها في 3 أشهر التالية، وهكذا ....

باستخدام مبدأ الفائدة البسيطة والذي تمّ عرضه في المبحث السابق:

$$A = P(1 + rt)$$

$$A = 1000(1 + 0.08\frac{3}{12})$$

$$A = 1000(1.02) = 1020$$

أي بعد ثلاثة أشهر ستكون قيمة المبلغ 1020 دولار،

الآن ووفقاً لمبدأ الفائدة المركبة سيتم احتساب معدل الفائدة 0.08 من المبلغ 1020 وليس من المبلغ الأصلي 1000 كما كان يتم وفقاً لمبدأ الفائدة البسيطة، بالتالي في 3 الأشهر التالية سيتم حساب القيمة المستقبلية A كالآتي:

$$A = 1020(1 + 0.08\frac{3}{12})$$

$$A = 1020(1.02) = 1040.40$$

وفي الفترة الثالثة سيتم حساب المبلغ المستقبلي A:

$$A = 1040.40(1 + 0.08\frac{3}{12})$$

$$A = 1040.40(1.02) = 1061.21$$

وفي النهاية ستكون قيمة المبلغ المستقبلي A في نهاية السنة كالآتي:

$$= 1061.21(1 + 0.08\frac{3}{12})$$

$$A = 1061.21(1.02) = 1082.43$$

والسؤال المطروح هنا كم سيكون المبلغ المستحق في نهاية السنة لو تمّ استخدام الفائدة البسيطة من قبل المصرف؟

$$A = P(1 + rt)$$

$$A = 1000\big(1 + 0.08(1)\big) = 1080$$

وبالتالي يلاحظ أنّ استخدام الفائدة المركبة يترتب عليه زيادة في الفائدة المكتسبة في نهاية السنة بمقدار:

$$1082.43 - 1080 = 2.43$$

2-2-1- المبلغ المستقبلي وفقاً للفائدة المركبة Future value base on compound interest:

لإيجاد صيغة عامة لحساب الفائدة المركبة سيتم العودة للمثال السابق:

فالمبلغ المستقبلي A في نهاية الفترة الأولى (بعد 3 أشهر الأولى):

$$A = P(1 + rt)$$

$$A = 1000(1 + 0.08\frac{3}{12})$$

$$A = 1000(1.02)$$

حيث يمثل P المبلغ الأصلي والذي سيتم حساب الفائدة بناء عليه.

في الفترة الثانية (3 أشهر الثانية) سيتم احتساب الفائدة بناء على المبلغ الأصلي المتحقق في نهاية الفترة الأولى أي $1000(1.02)$ بالتالي تصبح $P = 1000(1.02)$ ويتم حساب المبلغ المستقبلي :

$$A = P(1 + rt)$$

$$A = 1000(1.02)(1.02) = 1000(1.02)^2$$

في نهاية الفترة الثالثة تصبح $P = 1000(1.02)^2$ بالتالي يحسب المبلغ المستقبلي:

$$A = 1000(1.02)^2(1.02) = 1000(1.02)^3$$

في نهاية الفترة الرابعة تصبح $P = 1000(1.02)^3$ بالتالي يحسب المبلغ المستقبلي:

$$A = 1000(1.02)^3(1.02) = 1000(1.02)^4$$

بالتالي يتضح أنّه في نهاية n فترة يصبح المبلغ المستقبلي

$$A = 1000(1.02)^n$$

أو

$$A = 1000\left(1 + 0.08\frac{3}{12}\right)^n$$

$$A = 1000\left(1 + 0.08\frac{1}{4}\right)^n$$

$$A = 1000\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^n$$

وهنا يلاحظ الرقم 4 والذي يعادل عدد الفترات في السنة نظراً لأنّ الحساب يتم كل ثلاثة أشهر أي يتم حساب الفائدة خلال 4 فترات.

ويطلق على المقدار $\frac{0.08}{4} = 0.02$ **بأنّه معدل الفائدة في الفترة الواحدة.**

وبتعميم الصيغة السابقة:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n$$

حيث، A المبلغ المستقبلي *future value*، P المبلغ الأصلي، r معدل الفائدة *interest rate* والذي يُعطى عادة بشكل سنوي، m عدد الفترات التي يتم بها احتساب الفائدة في السنة *number of periods per years*، n عدد الفترات الإجمالي. ويُطلق على المقدار $i = \frac{r}{m}$ بمعدل الفائدة في الفترة الواحدة.

مثال 7:

إذا تمّ استثمار مبلغ 1000 دولار بفائدة مركبة سنوية 8% ولمدة 5 سنوات، المطلوب مقارنة مبلغ الفائدة خلال أربعة أنواع من الفترات:

A) فترة سنوية B) الفترة نصف سنوية (6 أشهر)

C) فترة ربعية (ثلاث أشهر) D) الفترة شهرية

الحل:

A) فترة سنوية

المبلغ المستقبلي المستثمر وفقاً لفائدة مركبة يُعطى كما يأتي:

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^n$$

$$P = 1000,\ \ r = 0.08,\ \ \ m = 1,\ \ n = 5*1 = 5$$

هنا يلاحظ أنّ عدد الفترات في السنة هي $m = 1$، لأنّ فترة حساب الفائدة سنوية وعدد الفترات الإجمالية هي $n =$ 5 لأنّ كل سنة يتم حساب الفائدة لمرة واحدة، بالتعويض:

$$A = 1000\left(1+\frac{0.08}{1}\right)^5$$

$$A = 1000(1+0.08)^5 = 1000(1.08)^5 = 1469.33$$

B) الفترة نصف سنوية (6 أشهر)

$$P = 1000,\ \ r = 0.08,\ \ \ m = 2,\ \ n = 5*2 = 10$$

يلاحظ أنّ عدد الفترات في السنة هي $m = 2$ لأنّه يتم حساب الفائدة بشكل نصف سنوي وعدد الفترات الإجمالية هي $n = 10$ ، بالتعويض:

$$A = 1000\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{10}$$

$$A = 1000(1+0.04)^{10} = 1000(1.04)^{10} = 1480.24$$

C) فترة ربعية (ثلاث أشهر)

$$P = 1000,\ \ r = 0.08,\ \ \ m = 4,\ \ n = 5*4 = 20$$

يلاحظ أنّ عدد الفترات التي بها حساب الفائدة في السنة هي $m = 4$ لأنّ الفترة ربع سنوية وعدد الفترات الإجمالي هو $n = 20$ لأنّ كل سنة يوجد أربع فترات خلال 5 سنوات أي $n = 4*5 = 20$ ، بالتعويض:

$$= 1000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{20}$$

$$A = 1000(1+0.02)^{20} = 1000(1.02)^{20} = 1485.95$$

D) الفترة شهرية

$$P = 1000,\ \ r = 0.08,\ \ \ m = 4,\ \ n = 5*12 = 60$$

يلاحظ أنّ عدد الفترات في السنة هي $m = 12$ لأنّه يتم حساب الفائدة المركبة بشكل شهري وعدد الفترات الإجمالي هو $n = 60$ لأنّ كل سنة يوجد 12 فترة خلال 5 سنوات أي:

$n = 12 * 5 = 60$ ، بالتعويض:

$$= 1000\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{60}$$

$$A = 1000(1 + 0.0066667)^{20} = 1000(0.0066667)^{60} = 1489.85$$

مثال غير محلول:

المطلوب إعادة المثال السابق ولكن مع فائدة سنوية $r = 6\%$ ولمدة 8 سنوات.

2-2-2- الفائدة المركبة المستمرة Continuous compound interest:

في المثال 7 تم استثمار مبلغ 1000 دولار بمعدل فائدة سنوي 8%، لمدة 5 سنوات، وتمّ حساب قيمة المبلغ المستقبلي عند استخدام فائدة مركبة سنوية *annually*، نصف سنوية *semiannually*، ربعية *quartely*، وشهرية *monthly*. ولكن السؤال المطروح كم ستصبح قيمة المبلغ المستقبلي عند استخدام فائدة مركبة يومية *daily*، أو كل دقيقة *evey minute*؟

للجواب على السؤال السابق ليتم تذكر قيمة المبلغ المستقبلي عند قيم الفائدة المركبة المختلفة:

Compound interest	سنوية *annually*	نصف سنوية *semiannually*	ربعية *quartely*	شهرية *monthly*
عدد الفترات في السنة m	1	2	4	12
المبلغ المستقبلي A	*1469.33*	*1480.24*	*1485.95*	*1489.85*
الفرق في قيمة المبلغ المستقبلي	---	10.91	5.71	3.90
				-

يلاحظ من هذا الجدول أنّ الفرق في قيمة المبلغ المستقبلي يتناقص كلّما ازدادت قيمة m، إلى أن يصبح متناهي في الصغر عندما تزداد m باتجاه قيمة غير محددة $(m \to \infty)$ أي تحسب بشكل مستمر *continuous*.

وتُعطى قيمة المبلغ المستقبلي A عند احتساب فائدة مركبة مستمرة *continuous compound interest* بالصيغة الآتية:

$$A = Pe^{rt}$$

حيث P يمثل المبلغ الحالي أو الأصلي *principal or present value*، r معدل الفائدة السنوي *annual interest rate*، t عدد السنوات لاستثمار المبلغ. e هو العدد النيبري (غير الكسري *irrational*).

ملاحظة: يفضل للحصول على قيمة دقيقة عند احتساب القيمة المستقبلية أن يتم استخدام الآلة الحاسبة لاختيار زر e^x بدلاً من التعويض بقيمتها $e = 2.7183$ التقريبية.

مثال 8:

كم سيكون المبلغ المستقبلي بعد 2 سنة لمبلغ 5000 دولار تم استثماره بمعدل سنوي 8%؟ وذلك في حالتين:

A) الفائدة المركبة يومية   B) الفائدة المركبة مستمرة

الحل :

A) الفائدة المركبة يومية

المبلغ المستقبلي المستثمر وفقاً لفائدة مركبة يُعطى كما يأتي:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n$$

$$P = 5000, \quad r = 0.08, \quad m = 365, \quad n = 2 * 365 = 730$$

هنا يلاحظ أنّ عدد الفترات في السنة هي $m = 365$، لأنّه يتم حساب الفائدة المركبة بشكل يومي وعدد الفترات الإجمالي في سنتين هو $n = 2 * 365 = 730$ لأنّ كل سنة 365 فترة، بالتعويض:

$$A = 5000\left(1 + \frac{0.08}{365}\right)^{730}$$

$$A = 5867.45$$

B) الفائدة المركبة مستمرة:

عندما تكون الفائدة المركبة مستمرة فهذا يعني أنّ عدد فترات حساب الفائدة في السنة غير محدد، بالتالي يتم استخدام الصيغة الآتية:

$$A = Pe^{rt}$$

$$P = 5000, \quad r = 0.08, \quad t = 2\ years$$

بالتعويض:

$$A = 5000e^{0.08*2} = 5867.55$$

هنا يلاحظ تقارب قيمة المبلغ المستقبلي بين الحالتين الأولى (دفعات يومية) والثانية (مستمرة).

مثال 9:

كم سيكون المبلغ المستقبلي بعد 1.5 سنة لمبلغ 8000 دولار تم استثماره بمعدل سنوي 9%؟ وذلك في حالتين:

A) الفائدة المركبة أسبوعية B) الفائدة المركبة مستمرة

الحل :

A) الفائدة المركبة يومية أسبوعية

المبلغ المستقبلي المستثمر وفقاً لفائدة مركبة يُعطى كما يأتي:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n}$$

$$P = 8000, \quad r = 0.09, \quad m = 48, \quad n = 1.5 * 48 = 72$$

هنا يلاحظ أنّ عدد الفترات في السنة هو $m = 48$، لأنّ فترة حساب الفائدة أسبوعية وعدد الفترات الإجمالي في سنة ونصف هو $n = 1.5 * 48 = 72$ لأنّ في كل سنة 48 أسبوع، بالتعويض:

$$A = 8000\left(1 + \frac{0.09}{48}\right)^{72}$$

$$A = 9155.14$$

B) الفائدة المركبة مستمرة:

عندما تكون الفائدة المركبة مستمرة فهذا يعني أنّ فترات حساب الفائدة في السنة غير محدد، بالتالي يتم استخدام الصيغة الآتية:

$$A = Pe^{rt}$$

$$P = 8000, \quad r = 0.09, \quad t = 1.5\ years$$

بالتعويض:

$$A = 8000e^{0.09*1.5} = 9156.29$$

هنا يلاحظ تقارب قيمة المبلغ المستقبلي بين الحالتين الأولى (دفعات يومية) والثانية (مستمرة).

2-2-3- إيجاد المبلغ الحالي، ومعدل الفائدة، لاستثمار مبلغ ما وفقاً للفائدة المركبة Present value and interest rate based on compound interest:

ما هو مقدار المبلغ المتوجب استثماره للحصول على مبلغ مستقبلي معيّن؟ ما هو معدل الفائدة أو العائد للمبلغ المستثمر؟ ما هو الوقت الذي يأخذه المبلغ المستثمر لكي يتضاعف؟ للإجابة على هذه الأسئلة يمكن استخدام صيغة كل من المبلغ المستقبلي للفائدة المركبة او المركبة المستمرة التي تمّ عرضها سابقاً.

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}$$

$$A = Pe^{rt}$$

وكما تمّ عرضه في مبحث الفائدة البسيطة بأنّ إذا كانت جميع عناصر هاتين الصيغتين معروفة باستثناء عنصر واحد، فإنّه بالإمكان معرفة العنصر المتبقي.

مثال 10:

ما هو المبلغ الحالي الذي يجب استثماره الآن بمعدل سنوي 10% لكي يتحقق مبلغ مستقبلي 8000 دولار بعد 5 سنوات، وذلك في حال كان الاستثمار يتم وفقاً:

A) للفائدة المركبة ربعية (كل ثلاث أشهر)　　　B) للفائدة المركبة مستمرة

الحل:

A) الفائدة المركبة ربعية (كل ثلاث أشهر):

باستخدام الصيغة،

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}$$

وفقاً للمعطيات:

$$A = 8000, \quad r = 10\%, \quad m = 4, \quad n = 4 * 5 = 20$$

يمكن التعويض:

$$8000 = P\left(1+\frac{0.1}{4}\right)^{20}$$

$$8000 = P(1+0.025)^{20}$$

$$P = \frac{8000}{(1+0.025)^{20}} = \frac{8000}{1,6386} = 4882.17$$

أي إذا تمّ استثمار مبلغ 4882.17 بمعدل 10% وفقاً لفائدة مركبة ربعية ولمدة خمس سنوات سيتم الحصول على 8000 دولار.

B) للفائدة المركبة مستمرة:

باستخدام الصيغة :

$$A = Pe^{rt}$$

ووفقاً للمعطيات

$$A = 8000, \ \ r = 10\%, \quad t = 5$$

بالتعويض:

$$8000 = Pe^{0.10*5}$$

$$P = \frac{8000}{e^{0.10*5}} = \frac{8000}{164872} = 4852.25$$

مثال 11:

إذا تمّ استثمار مبلغ 10000 دولار في إحدى المشاريع وبعد 10 سنوات حقق المبلغ المستثمر نمو وزيادة إلى أن بلغ 126000 دولار، ما هو معدل العائد (أو الفائدة) المتحقق في هذا الاستثمار؟

وذلك في حالتين :

A) الفائدة المركبة سنوية B) الفائدة المركبة مستمرة

الحل:

A) الفائدة المركبة سنوي

باستخدام الصيغة

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}$$

وفقاً للمعطيات:

$$A = 126000, \ \ P = 10000, \quad m = 1, \ \ n = 10$$

بالتعويض:

$$126000 = 10000\left(1+\frac{r}{1}\right)^{10}$$

$$126000 = 10000(1+r)^{10}$$

$$\frac{126000}{10000} = (1+r)^{10}$$

$$12.6 = (1+r)^{10} \Rightarrow \sqrt[10]{12.6} = 1+r$$

$$r = \sqrt[10]{12.6} - 1 = 0.28836 \qquad or\ 28.836\%$$

B) الفائدة المركبة مستمرة

نستخدم الصيغة:

$$A = Pe^{rt}$$

$$A = 126000, \quad P = 10000, \quad t = 10$$

بالتعويض:

$$126000 = 10000e^{10\,r}$$

$$\frac{126000}{10000} = e^{10\,r}$$

$$12.6 = e^{10\,r} \Rightarrow 10\,r = \ln(12.6)$$

$$r = \frac{\ln(12.6)}{10} = \frac{2.53369}{10} = 0.25337 \qquad or \quad 25.337\%$$

إذا تم الاستثمار بمعدل عائد 25.337% لمبلغ 10000 ووفقاً لمبدأ الفائدة المركبة المستمرة يتحقق بعد 10 سنوات مبلغ مقداره 126000.

مثال 12:

كم سنة يجب أن يستغرق استثمار مبلغ 10000 دولار ليصبح 12000 دولار وذلك إذا تمّ استثماره بمعدل عائد (أو فائدة) سنوي 9% على طريقة الفائدة المركبة الشهرية؟

الحل:

دائما باستخدام الصيغة:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n$$

وفقاً للمعطيات:

$$A = 12000, \quad P = 10000, \quad r = 9\%, \quad m = 12$$

بالتعويض:

$$12000 = 10000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^n$$

$$12000 = 10000(1 + 0.0075)^n$$

$$12000 = 10000(1.0075)^n$$

$$\frac{12000}{10000} = (1.0075)^n$$

$$1.2 = (1.0075)^n$$

بالاستفادة من خاصية اللوغاريتم الجبرية:

$$\ln(x^a) = a * lnx$$

يتم أخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln(1.2) = \ln[(1.0075)^n]$$

$$\ln(1.2) = n\ln(1.0075) \Rightarrow n = \frac{\ln(1.2)}{\ln(1.0075)} = 24.40$$

وهو تقريباً 25 شهر أي 2 سنة وشهر واحد

2-2-4- حالات تطبيقية:

حالة تطبيقية 1:

إذا تم إيداع 1 دولار في حساب مصرفي في عام 1066 وتمّ نسيانه حتى الآن، كم سيكون المبلغ في الحساب في نهاية سنة 2026، وذلك في حالتين، في حال كانت الفائدة المركبة السنوية 2%؟ أو كانت الفائدة بسيطة 2%؟

في حال الفائدة مركبة يتم استخدام الصيغة:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n$$

$$P = 1, \quad r = 0.02, \quad m = 1, \quad n = 2026 - 1066 = 960$$

$$A = 1\left(1 + \frac{0.02}{1}\right)^{960} = 180370.2434$$

في حال الفائدة بسيطة يتم استخدام الصيغة:

$$A = P(1 + rt)$$

$$A = 1(1 + 0.02 * 960) = 20.2$$

يلاحظ من الفارق الكبير في حجم المبلغ المستقبلي بين الفائدة المركبة والبسيطة، وحجم المبلغ الكبير وفقاً لمبدأ الفائدة المركبة (180370.2434) يدل على سبب لجوء المصارف إلى إغلاق الحساب غير الفعّال بعد مرور فترة قصيرة من الزمن.

حالة تطبيقية 2:

شخص ما يمتلك 14000 دولار ولديه الخيار إمّا بشراء سيارة الآن، أو استثمار المبلغ بمعدل سنوي 6.5% وفقاً لفائدة مركبة نصف سنوية، وبعدها يقوم بشراء سيارة بسعر أكبر وبمواصفات أفضل، ما هو المبلغ الذي سيتوفر مع هذا الشخص بعد مرور 3 سنوات؟

الحل:

السؤال هنا هو عن المبلغ المستقبلي A

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n}$$

$$P = 14000, \quad m = 2, \quad r = 0.065, \quad n = 3 * 2 = 6$$

$$A = 14000\left(1 + \frac{0.065}{2}\right)^{6} = 14000\,(1 + 0.0235)^{6}$$

$$= 14000\,(1.0235)^{6} = 16961.66$$

حالة تطبيقية 3:

إذا كان ثمن منزل ما حالياً هو 210000 دولار، فكم سيكون سعر المنزل بعد 10 سنوات إذا كان معدل التضخم (inflation rate) هو 3% وفقاً لمبدأ الفائدة المركبة السنوية؟

الحل:

المبلغ المستقبلي A

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}$$

$$P = 210000, \qquad m = 1, \qquad r = 0.03, \qquad n = 10$$

$$A = 210000\left(1+\frac{0.03}{1}\right)^{10} = 210000\,(1.03)^{10} = 282222.4397$$