# مبادئ الاحتمالات

# Probability Principles

## تمهيد :

يوجد عدة تعاريف للاحتمال هي:

### التعريف التقليدي (الكلاسيكي) للاحتمال Classical definition of Probability

التعريف التجريبي للاحتمال (الإحصائي) Experimental Definition of Probability

التعريف الرياضي

التعريف المساحي

وإننا سنقتصر هنا على استعراض التعريف التقليدي.

**التعريف التقليدي للاحتمال:** هو عدد حقيقي يعبّر عن إمكانية تحقيق حادث ما.

ويحسب من العلاقة:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| احتمال تحقق حادث A= | عدد الحالات الملائمة |  |
| عدد الحالات الممكنة |

وإذا رمزنا لعدد الحالات الممكنة لـA بالرمز n ولعدد الحالات الملائمة منها بـ m،

ورمزنا لاحتمال تحقق الحادث A *بالرمز* P(A) ، فإن الاحتمال السابق يحسب من العلاقة:

(1) حيث أن

ومن خواص الاحتمال أنه غير سالب ولا يتجاوز الواحد أي أن:

***أنواع الحوادث:*** *يمكن تصنيف الحوادث إلى عدة أنواع كما يلي:*

*- الحوادث المتنافية: وهي الحوادث التي إذا تحقق أحدها نفى تحقق الأخرى . مثل نتيجة حجر النرد خلال تجربة واحدة . ويكون التنافي بين الحوادث الممكنة ضمن التجربة الواحدة .*

*- الحوادث المتقاطعة: وهي الحوادث التي يمكن أن تتحقق معاً خلال التجربة الواحدة . مثل ظهور شخص يحقق صفتين : طالب وأنثى .*

*- الحوادث المستقلة: وهي الحوادث التي إذا تحقق أحدها لا يؤثر على احتمال تحقق الأخرى .*

*مثل ولادة ذكر عند امرأتين ، أو ظهور العدد 2 عند رمي حجر النرد مرتين . ويكون الاستقلال بين التجارب المستقلة.*

*- الحوادث المتكاملة: وهي الحوادث المتنافية التي تشكل مجموعة الحوادث الممكنة للتجربة .*

*- الحادث المتمم لحادث ما: وهو الحادث الذي يشكل حادثاً مكملاً لذلك الحادث .*

*احتمالات الحوادث المركبة : وتحسب هذه الاحتمالات حسب أنواع الحوادث وعلاقتها مع بعضها البعض كما يلي :*

***قاعدة جمع الاحتمالات:***

*إن احتمال تحقيق أحد حادثين متنافيين A أو B يساوي:*

(2)

*ويمكن تعميم ذلك على تحقق أي عدد من الحوادث المتنافية : A1 ,* ***A2 , A3 , A4 ,…*** *فنجد أن :*

*والشكل العام لهذه الحوادث يكون كما يلي :*

*وإذا كان الحادثان غير متنافيين (متقاطعين أحياناً ) فإن احتمال تحقق أحدهما A أو B يساوي:*

(3)

والشكل البياني يوضح ذلك :

وإن احتمال تحقق الحادث A أو متممه يساوي:

( 4 )

ومنها نجد أن :

والشكل التالي يوضح ذلك :

***قاعدة ضرب الاحتمال:***

*وإذا كان الحادثان A و B مستقلين فإن احتمال تحققهما معاً يساوي:*

(5)

*أما إذا كان الحادثان غير مستقلين (مرتبطين) فإن احتمال تحققهما معاً يحسب بدلالة الاحتمال الشرطي ويساوي جداء احتمال أحدهما في الاحتمال الشرطي للآخر ويحسب من العلاقة:*

حيث أن P (A/B) هو الاحتمال الشرطي لتحقق A بعد وقوع B . ولكن P (B/A) هو الاحتمال الشرطي لتحقيق B بعد وقوع A ، واعتماداً على العلاقة (5-6) يمكننا حساب هذين الاحتمالين فنجد أن :

(7)

(8)

وهكذا نجد أن يختلف بالقيمة والمعنى عن الاحتمال المعاكس *.*

**قاعدة بايز :**

يمكننا استخلاص قاعدة ( بايز Bayes ) التي تعطينا الاحتمالات الشرطية و من هاتين العلاقتينن ( 7 ) و( 8 )، و ضمن تحقق الشروط التالية :

عندما نعلم أن الحادث B قد تحقق، فإننا نجد أنه يمكن أن يكون قد تحقق مع الحادث A أو قد تحقق مع الحادث المتمم له . وعندها فإنه يمكننا أن نعبر عن حالات تحقق الحادث B كما يلي :

وبذلك نجد أن احتمال تحقق B يساوي :

أي أن :

وعندها تأخذ العلاقة (7) الشكل التالي:

(9)

ويسمى هذا الاحتمال بالاحتمال الشرطي اللاحق لـ A. ويكون عادة أكبر من الاحتمال .

وبطريقة مشابهة يمكننا أن نجد أن الاحتمال الشرطي اللاحق P(B/A) كما يلي :

(10)

**مثال1 :**

صندوق فيه 10 كرات, منها 7 كرات بيضاء (صالحة) و3 كرات سوداء (فاسدة) . سحبنا منه كرة واحدة بدون إعادة . فما هو احتمال ظهور كرة بيضاء، ثم ما هو احتمال كرة سوداء ؟.

**الحل :**

|  |  |
| --- | --- |
| إن احتمال ظهور كرة بيضاء W = | عدد الحالات الملائمة |
| عدد الحالات الممكنة |

أي أن :



وإن احتمال ظهور كرة سوداء B، يساوي:

|  |  |
| --- | --- |
| احتمال ظهور كرة سوداء= | عدد الحالات الملائمة |
| عدد الحالات الممكنة |

أي أن:



أما إذا أردنا سحب كرتين (مع الإعادة) فإن نتيجة السحب الأول مستقلة عن نتيجة السحب الثاني ويكون لدينا إحدى الحالات التالية :

وهكذا نجد أن احتمال ظهور الكرة الأولى بيضاء والثانية سوداء يساوي :



وإن احتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء، والثانية بيضاء يساوي:



وإن احتمال أن تكون الأولى بيضاء، والثانية بيضاء يساوي:

وإن احتمال ان تكون الأولى سوداء والثانية سوداء يساوي :

وإن احتمال أن تكون أحدهما بيضاء والأخرى سوداء يساوي :

**مثال 2:**

لنأخذ الصندوق السابق الذي يحوي 10 كرات منها 7 كرات بيضاء، و3 كرات سوداء. ونريد أن نسحب عشوائياً كرتين (بدون إعادة) من هذا الصندوق. فما هو احتمال ظهور كرتين من الكرات السوداء، واحتمال ظهور كرتين من الكرات البيضاء. واحتمال أن تكون إحدى الكرتين بيضاء والثانية سوداء؟

نلاحظ أن عدد الحالات الممكنة لحادث سحب كرتين هو عبارة عن عدد الأزواج التي يمكن تشكيلها بدون إعادة من الكرات العشرة الموجودة في الصندوق، وهو يساوي عدد المتوافقات المؤلفة من عنصرين من أصل عشرة عناصر أي:

أي أن عدد الحالات الممكنة =

( حالة ممكنة ) 

أما عدد الحالات الملائمة لظهور كرتين من الكرات السوداء يساوي=



وبذلك نجد أن احتمال ظهور كرتين من الكرات السوداء يساوي=



أما عدد الحالات الملائمة لظهور كرتين من الكرات البيضاء فيساوي:

وبذلك نجد أن احتمال ظهور كرتين من الكرات البيضاء يساوي:



وكذلك نجد أن احتمال ظهور كرة سوداء وأخرى بيضاء يساوي=



وإن احتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية سوداء يساوي :

وإن احتمال أن تكون الأولى سوداء والثانية بيضاء يساوي :



ومن جهة أخرى نجد أن احتمال أن تكون إحدى الكرتين بيضاء والثانية سوداء يساوي :

(وهو نفس الجواب السابق)

ولنفترض الآن إنه بعد أن سحبنا الكرتين علمنا أن الكرة الثانية كانت سوداء .

فما هو احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء ؟ وبالعكس إذا علمنا أن الكرة الثانية بيضاء فما هو احتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء ؟

لحساب هذين الاحتمالين يمكننا الاستفادة من علاقتي ( بايز ) في حساب الاحتمالات الشرطية اللاحقة كما يلي :

**مثال 3:** خضع مريض لاختبار تشخيص مرض قصور الغدة الدرقية. يحدد الاختبار التشخيصي بشكل صحيح المرضى الذين في الواقع لديهم المرض بنسبة 93% من الحالات, ويحدد بشكل صحيح المرضى الأصحاء (غير المصابين بهذا المرض) بنسبة 81% من الحالات. إذا كان 4 من كل 100 شخص مصابين بهذا المرض.

1- ما احتمال أن يكون الاختبار سلبي.

2- ما احتمال أن يكون هذا المريض سليماً مع العلم أن النتيجة كانت سلبية.

الحل: A - نتيجة الاختبار سلبية، B1 – مصاب بالمرض، B2 – غير مصاب بالمرض عندئذ:



1- 

2- .

**تمارين**

-1يظهر اختبار فيروس (H1N1) نتيجة إيجابية بنسبة 75% من جميع الحالات عندما يكون الفيروس موجوداً بالفعل وفي 3% من جميع الحالات عندما يكون الفيروس غير موجود. إذا تم إجراء مثل هذا الاختبار لشخص تم اختياره عشوائياً، مع الفرض أن معدل انتشار الفيروس بين السكان هو 18%.

أ – ما احتمال أن تكون النتيجة إيجابية؟

ب – ما احتمال أن يكون الشخص مصاباً مع العلم أن النتيجة كانت إيجابية؟.

2- يضم معمل لتصنيع عبوات دوائية ثلاث آلات M1,M2,M3. الإنتاج في هذا المعمل موزع بين هذه الآلات حسب النسب الآتية : 50%,30%,20% على الترتيب. نسبة العبوات الدوائية العاطلة التي تنتجها هذه الآلات هي على الترتيب: 3%,4%,5%. اخترنا عبوة من إنتاج هذا المعمل والمطلوب:

أ- ما احتمال أن تكون هذه العبوة عاطلة؟

ب- إذا كانت العبوة عاطلة فما احتمال أن تكون العبوة من إنتاج الآلة M1.