

الدارات الكهربائية 2

Electrical Circuits 2

الدكتور المهندس

علاء الدين أحمد حسام الدين

6

الطنين التسلسلي والتفرعي

Series and Parallel Resonances

مقدمة Introduction

تكون الدارة الكهربائية في حالة ظنين (رنين) إذا كان الجهد المطبق متوافق بالطور مع التيار المار في الدارة. في هذه الحالة تتكون الممانعة الكلية المكافئة للدارة من المقاومة R فقط. أي أن شرط الظنين هو مساواة القسم التخيلي لممانعة الدارة للصفر. وهناك نوعان من الظنين الكهربائي: ظنين التوترات الذي يحدث في الدارات التسلسلية، وظنين التيارات الذي يحدث في الدارات التفرعية.

يؤدي حدوث الظنين الكهربائي إلى زيادة الجهد المطبق على عناصر التجهيزات الكهربائية أو زيادة التيار المار فيها، ويمكن أن يسبب خطراً على عازلية عناصر الدارات الكهربائية وتلفها. لذلك يكون من الضروري التعرف إلى خواص دارات الظنين لتأمين العمل الطبيعي للتجهيزات الكهربائية.

شروط حدوث الطنين :

يمكن أن تكافئ الشبكة الكهربائية المغذاة من منبع واحد للقدرة بممانعة مكونة من مقاومة أومية R ومفاعلة X ، أي:

$$Z = R + jX \Rightarrow \begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R} \end{cases}$$

الشرط الأول لحدوث الطنين: القسم التخيلي للممانعة يساوي الصفر: $X = 0$

الشرط الثاني لحدوث الطنين: عامل الاستطاعة يساوي الواحد:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R} = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{Cos}\varphi = 1$$

الشرطان السابقان يوضّحان من الناحية الرياضية انعدام المفاعلة الردية التابعة لعناصر الدارة (R, L, C)

من جهة، وللسرعة الزاويّة للدارة ω من جهة ثانية، أي: $X = f(R, L, C, \omega) = 0$

وبالتالي يمكن حدوث الطنين عند تغير قيم عناصر الدارة (R, L, C) بثبات السرعة الزاويّة ω ، أو عند تغير السرعة الزاويّة ω بثبات قيم عناصر الدارة (R, L, C).

تسمّى السرعة الزاويّة عند حدوث الطنين بالسرعة النبضية للطنين، ويرمز لها بالرمز ω_0 ، حيث:

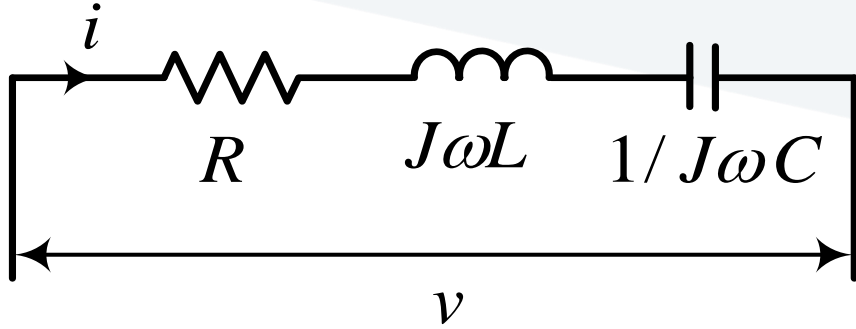
$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$$

ويسمى التردد f_0 بتردد الطنين وهو التردد الناتج عند إلغاء أثر المفاعلات في الدارة، حيث تصبح الممانعة مجرد مقاومة فقط.

الطنين الكهربائي في الدارة التسلسلية (طنين الجهد)

:Series (Voltage) Resonance

لتكن لدينا دارة كهربائية مؤلفة من مقاومة أومية R وملف تحريضه الذاتي L ومكثف سعته C بوصل تسلسلي، كما في الشكل.
دارة **RLC** تسلسلية.



$$\bar{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

الممانعة الكلية المكافئة للدارة:

$$\bar{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \angle \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

عندما تكون الدارة في حالة طنين فإن القسم التخيلي للممانعة يكون معدوماً:

$$X = 0 \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

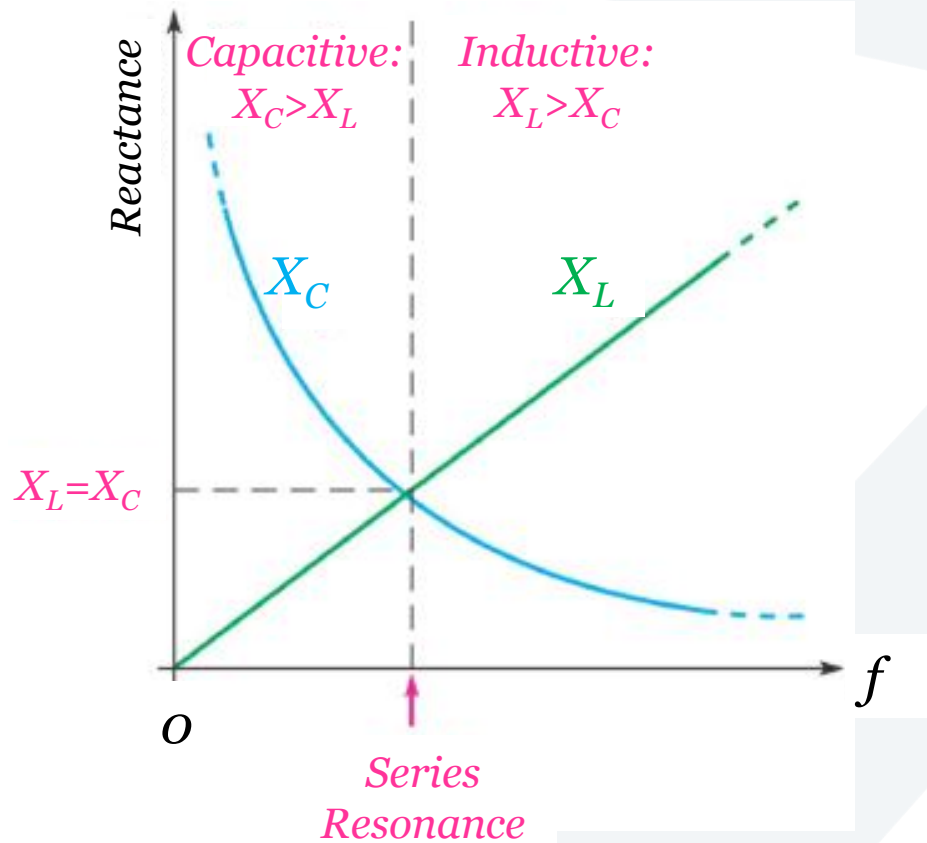
$$\Rightarrow \omega^2 \cdot L \cdot C = 1 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

وفقاً لذلك يمكن بمعرفة قيمتي كميتين من الكميات الثلاث الداخلة في العلاقة السابقة يمكن تحديد قيمة الكمية الثالثة، حيث نضيف إلى هذه الكميات الدليل (0) في حالة الطنين، أي:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}, L_0 = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C_0}, C_0 = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot L_0}$$

بما أن $\omega = 2\pi \cdot f$ فإن تردد الطنين يعطى بالعلاقة:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 2\pi \cdot f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \text{ [Hz]}$$

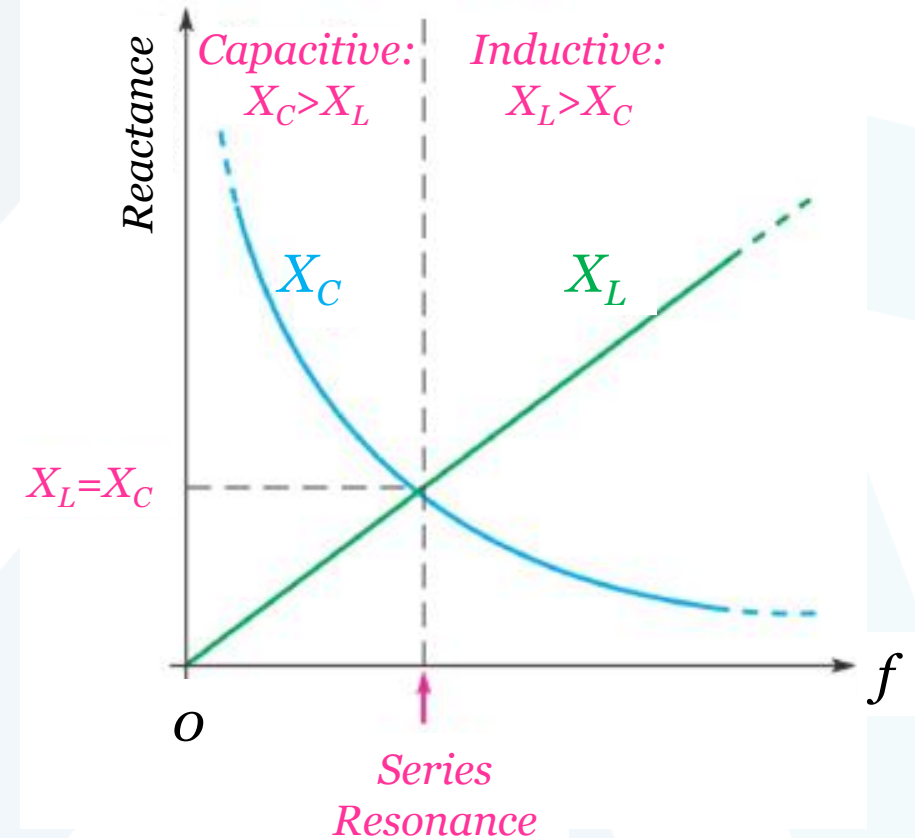


عند تردد الطنين تكون الممانعة $Z=R$ و $\phi=0$.
عند ترددات أقل من ω_0 يسود أثر المفاعلة السعوية،
وتزداد الممانعة بسرعة كلما قل التردد وتقترب الزاوية
من -90° .

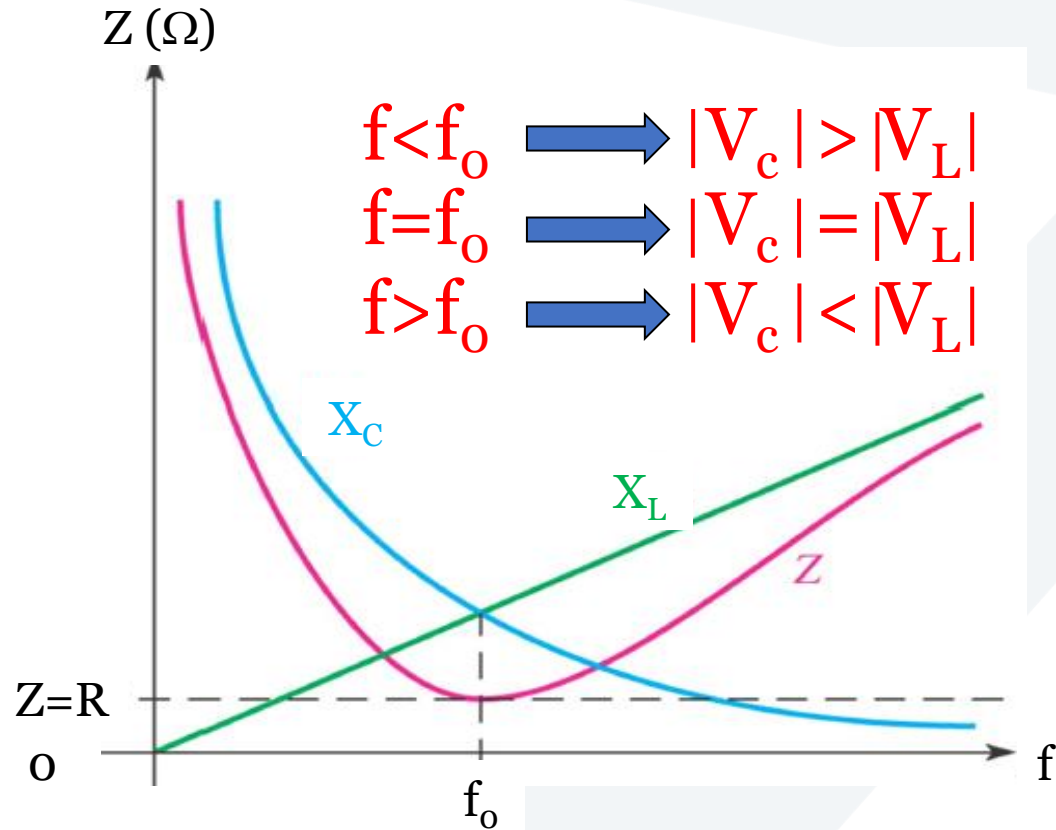
عند ترددات أكبر من ω_0 يسود أثر المفاعلة
التحريضية، وتزداد الممانعة بسرعة كلما زاد التردد
وتقترب الزاوية من $+90^\circ$.

Analysis of Series RLC Circuits

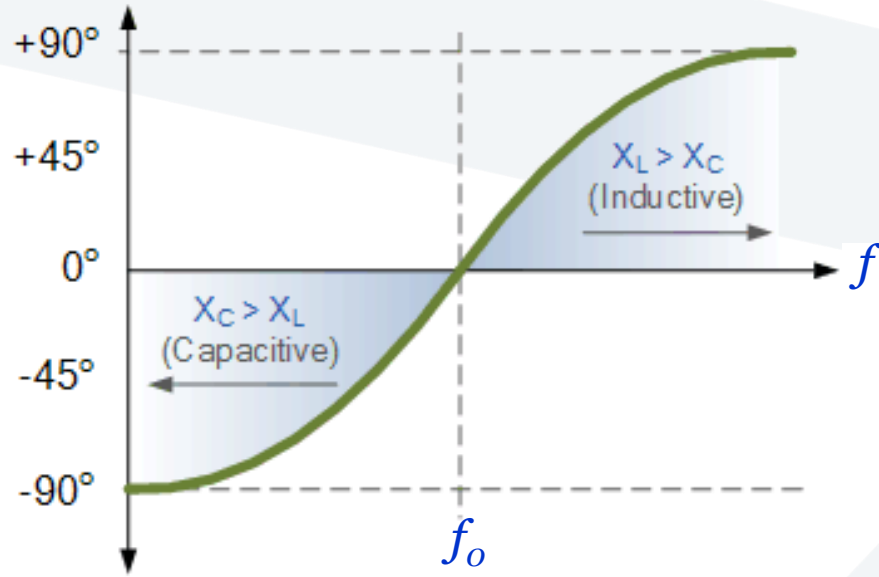
- A series RLC circuit is:
- Capacitive when $X_C > X_L$
- Inductive when $X_L > X_C$
- Resonant when $X_C = X_L$
- At resonance $Z_{\text{tot}} = R$
- X_L is a straight line
 $y = mx + b$
- X_C is a hyperbola
 $xy = k$



Series RLC impedance as a function of frequency.

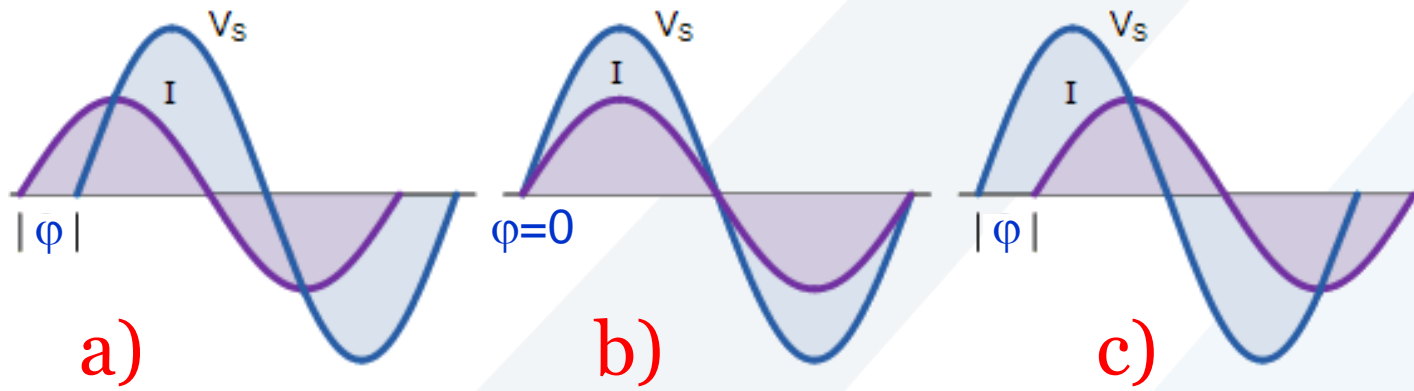


يظهر من الشكل أن ممانعة الدارة تكون
 أصغرية عند تردد الطنين، وبالتالي $Z=R$ وسيكون التيار في هذه الحالة أعظميةً. ونلاحظ
 أن مطال Z يتغير بسرعة أكثر مع الترددات
 المنخفضة بالنسبة للترددات العالية. ونكتب
 بالنسبة للجهود بدلالة التردد:



يبين الشكل تغير زاوية الطور لدارة **RLC** تسلسلية بالنسبة لتردد الطنين f_0 حيث تظهر لدينا الحالات التالية:

- (a) يتقدم التيار على الجهد المطبق عند الترددات الأقل من f_0 .
- (b) يتفق التيار بالطور مع الجهد المطبق عند تردد الطنين f_0 .
- (c) يتأخر التيار على الجهد المطبق عند الترددات الأكبر من f_0 .



تحسب القيمة الفعالة للتيار المار في الدارة عند حدوث الطنين كما يأتي:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})^2}}$$

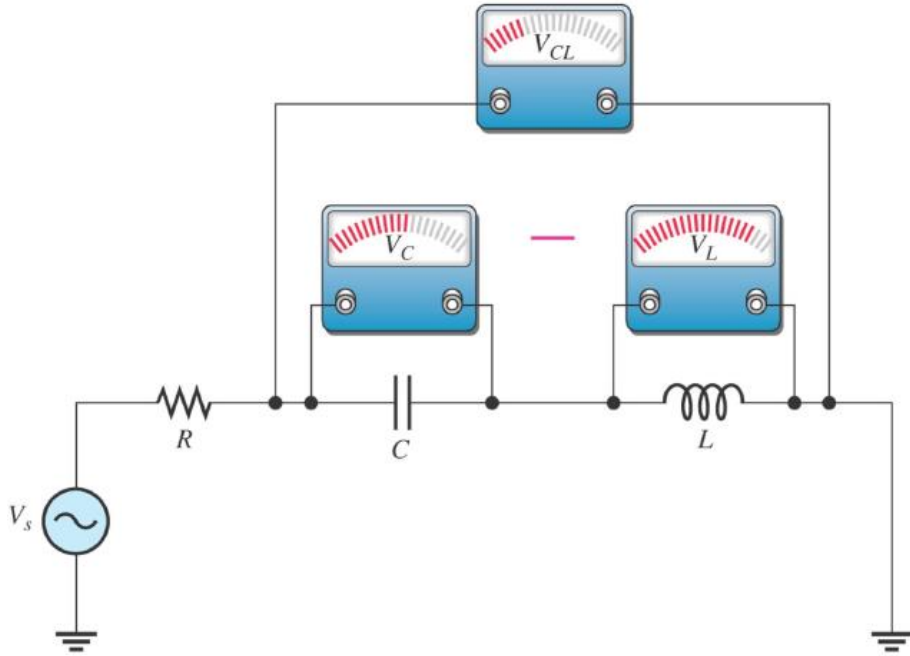
وكما وجدنا سابقاً، يتحقق في حالة الطنين الشرط الآتي: $\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C} \Rightarrow I = \frac{V}{\sqrt{R^2}} = \frac{V}{R}$

أي أن الممانعة تكون أصغر، وبالتالي التيار أعظم، أي: $I_{\max} = \frac{V}{R_{\max}}$

وفقاً لما سبق، فإن قيمة التيار في حالة الطنين لا تعتمد على قيم المفاعلات الردية ($1/\omega \cdot C$) أو التحريضية ($\omega \cdot L$).

عامل الجودة Quality Factor:

The voltage across the series combination of C , L and R is always less than the larger individual voltage across either C or L



كيف يمكن لجهد عنصر تسلسلي أن يكون أكبر من الجهد المطبق على العناصر الثلاثة معاً؟
يكنم الجواب في أن **C** و **L** هما عنصران لتخزين الطاقة، والجهدين **V_L** و **V_C** مزاحان عن بعضهما بزاوية **180°**، حيث جهد **V_L** يعاكس جهد **V_C**.

عند حدوث الطنين، وبأخذ قيمة السرعة النبضية من العلاقة يكون:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$V_L = \omega_0 \cdot L \cdot I = \omega_0 \cdot L \cdot \frac{V}{R} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot L \cdot \frac{V}{R} = \frac{V}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$V_C = \frac{I}{\omega_0 \cdot C} = \frac{V}{\omega_0 \cdot C \cdot R} = \frac{V \cdot \sqrt{L \cdot C}}{C \cdot R} = \frac{V}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\Rightarrow V_L = V_C = \frac{V}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

تسمى الكمية $\sqrt{L/C}$ بالممانعة المميزة للدائرة، ويُرمز لها بالرمز Z_0 :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

وفقاً لذلك تصبح العلاقة $V_L = V_C = \frac{V}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ بالشكل: $V_L = V_C = \frac{V}{R} \cdot Z_0$

نعرف عامل الجودة للدارة التسلسلية Q_s بالعلاقة:

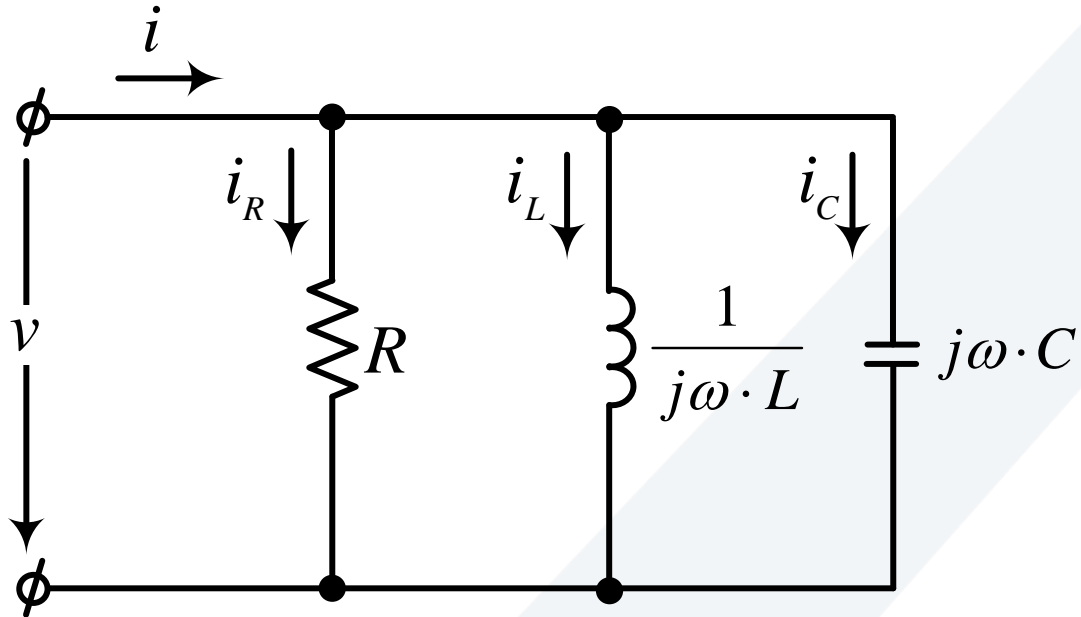
$$Q_s = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} = \frac{1}{\omega_0 \cdot C \cdot R}$$

وفقاً لذلك نعرف تردد الطنين بأنه التردد الذي يسمح للوشية بتفريغ ما اختزنته بالسرعة التي يحتاجها المكثف لاختزان القدرة المفرغة، وبالعكس. فتكون القدرة التي يقدمها المنبع مساوية تماماً للقدرة التي تستهلكها المقاومة المكافئة للضيق على المقاومة، أي أن كامل الجهد المطبق على الدارة يساوي فرق الجهد على المقاومة، وهذا لا يعني انعدام جهد كل من العنصرين الآخرين في الدارة (L, C)، حيث يمكن كتابة هذين الجهدين بالصيغة العقدية بدلالة عامل الجودة:

$$\begin{aligned}\vec{V}_L &= jQ_s \vec{V} \\ \vec{V}_C &= -jQ_s \vec{V}\end{aligned}$$

الطنين التفرعي (طنين التيار) :

Parallel (Current) Resonance



لتكن لدينا دائرة كهربائية مؤلفة من
مقاومة أومية R وملف تحريضه الذاتي
 L ومكثف سعته C بوصل تفرعي، كما
في الشكل.

$$\vec{Y} = \frac{1}{R} + jX$$

السماحية (المسايرة) الكلية المكافئة للدارة:

$$\vec{Y} = G + j\left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right) = G + jB = G + j(B_C - B_L)$$

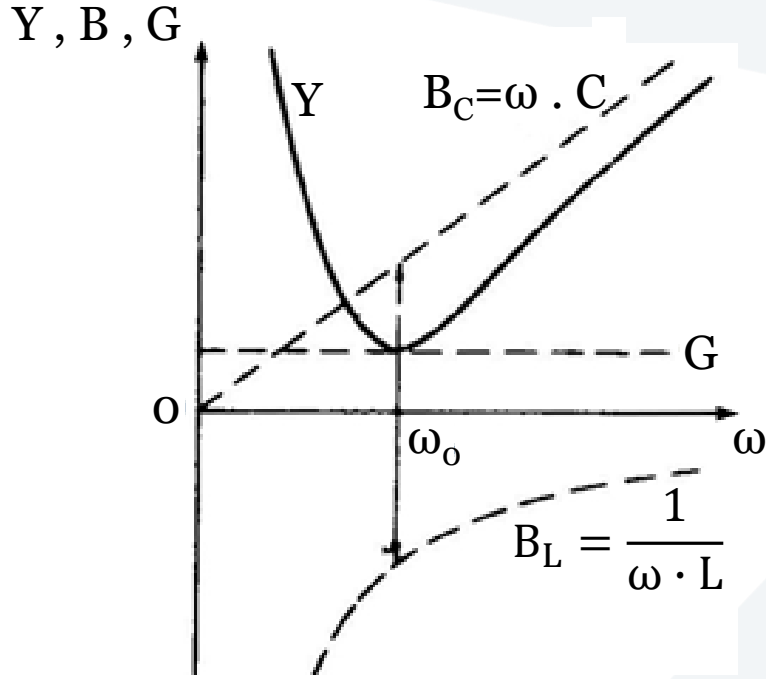
عندما تكون الدارة في حالة طنين فإن القسم التخيلي للممانعة أو للسماحية يكون معدوماً:

$$X = 0: B = 0 \Rightarrow \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0 \Rightarrow \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 \cdot L \cdot C = 1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{بما أن}$$

فإن تردد الطنين يعطى بالعلاقة:

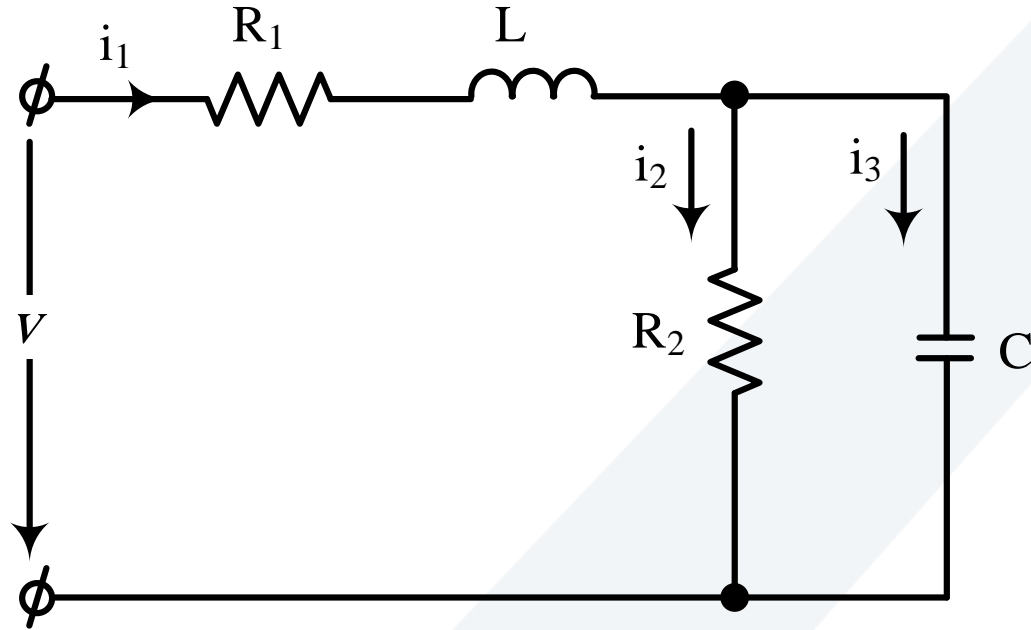
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 2\pi \cdot f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \text{ [Hz]}$$



تابعية السماحية الكلية Y
وعناصرها للسرعة الزاوية

عند سرعة زاوية أصغر من ω_0 تكون القبولية التحريضية أكبر من القبولية السعوية، وعند سرعة زاوية أكبر من ω_0 تصبح القبولية التحريضية أصغر من القبولية السعوية.

لتكن لدينا الدارة الكهربائية المبينة بالشكل، والمؤلفة من ملف بارامتراتة $R_1=4[\Omega]$, $L=796[\mu H]$ ، ومكثف سعته $C=39.8 [\mu F]$ مربوط تفرعياً مع المقاومة R_2 . فإذا علمت أن القيمة الفعالة لمنبع التغذية $V=36 [V]$ ، المطلوب:



1. تحديد قيمة المقاومة R_2 التي توصل على التفرع مع المكثف C والتي تُدخل الدارة في حالة الطنين، وذلك من أجل تردد مقداره $f_0=800 [Hz]$.
2. حساب قيمة الممانعة الكلية للدارة في حالة الطنين.
3. إيجاد قيم جميع التيارات المارة في أفرع الدارة.
4. رسم المخطط الشعاعي للتيارات.

