

الدارات الكهربائية 2

Electrical Circuits 2

الدكتور المهندس

علاء الدين أحمد حسام الدين

7

الطنين

التسلسلي والتفرعي

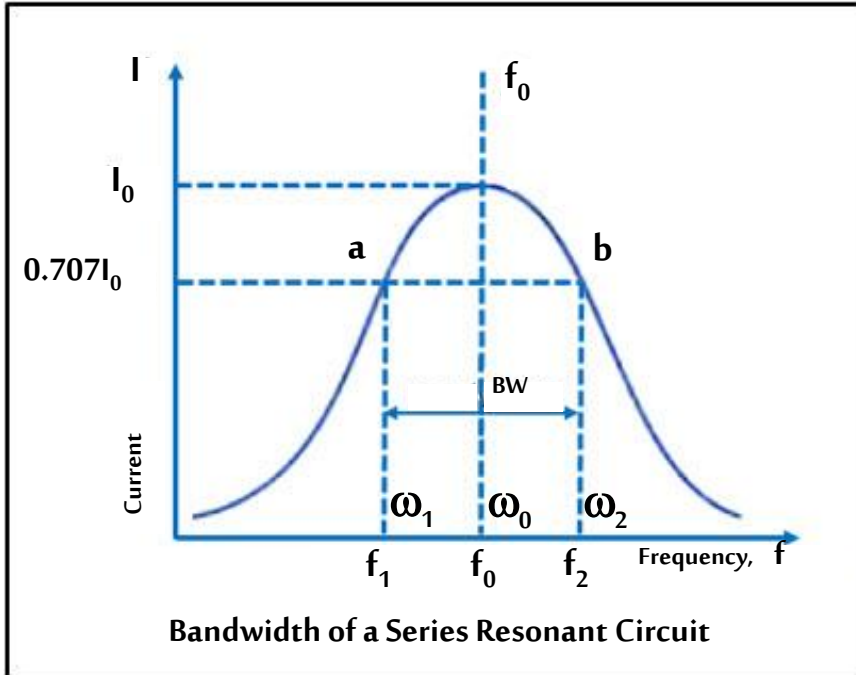
Series and Parallel

Resonances

نقطتا نصف الاستطاعة وعرض الحزمة (النطاق):

The half-power points and bandwidth

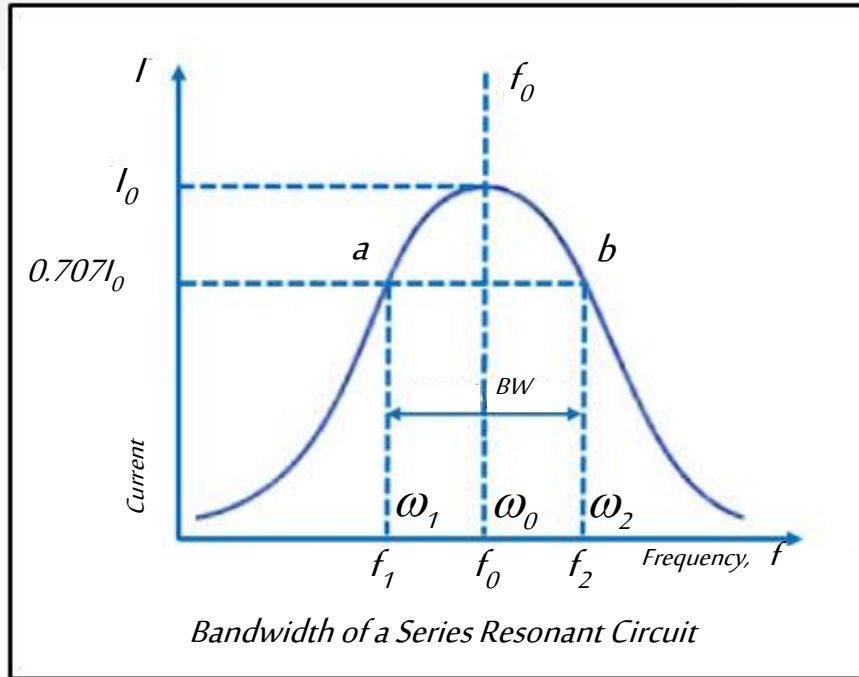
في دائرة RLC تسلسلية يمكن تمثيل التيار كتابع للتردد، حيث يأخذ قيمة عظمى I_0 عند تردد الطنين $f=f_0$ ، وتكون الاستطاعة المقدمة العظمى مساوية $I_0^2 \cdot R$.



نفتش عن قيمة التيار I_1 التي توافق نصف هذه الاستطاعة:

$$\frac{P}{2} = \frac{I_0^2 \cdot R}{2} = I_1^2 \cdot R \Rightarrow I_1 = 0.707 \cdot I_0$$

النقطتان **a** و **b** عند الترددات f_1 و f_2 يكون التيار عندهما هو I_1 . يعرف الترددان السابقان بترددى نصف الاستطاعة، ويعرف الفرق بينهما بعرض الحزمة **BW**.



$$BW = f_2 - f_1 [\text{Hz}]$$

$$BW = \omega_2 - \omega_1 [\text{rad/s}]$$

$$\bar{V} = \bar{I}_0 \cdot \bar{Z} = \bar{I}_0 \cdot R \quad \text{عند } \omega_0 \text{ يكون:}$$

عند $\omega = \omega_1$ يكون:

$$\bar{V} = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_1 = 0.707 \cdot \bar{I}_0 \cdot \bar{Z}_1$$

$$\Rightarrow \bar{Z}_1 = \frac{\bar{V}}{0.707 \cdot \bar{I}_0} = 1.414 \cdot R$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن زاوية الممانعة Z_1 هي (-45°) لأن التأثير السعوي أكبر من التأثير التحريضي.

$$\varphi = -45^\circ \Rightarrow X_C - X_L = R \Rightarrow \frac{1}{\omega_1 \cdot C} - \omega_1 \cdot L = R \quad (1)$$

بنفس الطريقة عند $\omega = \omega_2$ يكون:

$$\varphi = 45^\circ \Rightarrow X_L - X_C = R \Rightarrow \omega_2 \cdot L - \frac{1}{\omega_2 \cdot C} = R \quad (2)$$

مع ملاحظة أن التأثير التحريضي أكبر من التأثير السعوي.

$$\frac{1}{\omega_1 \cdot C} - \omega_1 \cdot L = \omega_2 \cdot L - \frac{1}{\omega_2 \cdot C}$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد:

$$\frac{1}{\omega_1} - \omega_1 \cdot L \cdot C = \omega_2 \cdot L \cdot C - \frac{1}{\omega_2}$$

نضرب الطرفين بقيمة السعة C :

نعوض في العلاقة الأخيرة $\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}$ فيكون:

$$\frac{1}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_0^2} = \frac{\omega_2}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_2} \Rightarrow \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} = \frac{\omega_1}{\omega_0^2} + \frac{\omega_2}{\omega_0^2}$$

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \cdot \omega_2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0^2 \cdot (\omega_1 + \omega_2)$$

$$= \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot (\omega_1 + \omega_2)$$

$$\omega_0^2 = \omega_1 \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} \Rightarrow f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2}$$

من المعادلة (1) نجد:

$$\frac{1}{\omega_1 \cdot C} - \omega_1 \cdot L = R \Rightarrow \frac{1 - \omega_1^2 \cdot L \cdot C}{\omega_1 \cdot C} = R$$

$$1 - \omega_1^2 \cdot L \cdot C = \omega_1 \cdot C \cdot R$$

$$\omega_1^2 \cdot L \cdot C + \omega_1 \cdot C \cdot R - 1 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (C \cdot R)^2 + 4 \cdot C \cdot L$$

$$\omega_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-C \cdot R + \sqrt{(C \cdot R)^2 + 4 \cdot C \cdot L}}{2 \cdot C \cdot L}$$

$$\omega_1 = \frac{-C \cdot R}{2 \cdot L \cdot C} + \frac{\sqrt{(C \cdot R)^2 + 4 \cdot L \cdot C}}{2 \cdot C \cdot L} = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{C^2 \cdot R^2 + 4 \cdot L \cdot C}{4 \cdot L^2 \cdot C^2}}$$

$$\omega_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}}$$

يتم اعتماد القيمة الموجبة فقط.

$$\omega_2 \cdot L - \frac{1}{\omega_2 \cdot C} = R \Rightarrow \frac{\omega_2^2 \cdot L \cdot C - 1}{\omega_2 \cdot C} = R$$

من المعادلة (2) نجد:

$$\omega_2^2 \cdot L \cdot C - 1 = \omega_2 \cdot C \cdot R$$

$$\omega_2^2 \cdot L \cdot C - \omega_2 \cdot C \cdot R - 1 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (C \cdot R)^2 + 4 \cdot L \cdot C$$

$$\omega_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{C \cdot R + \sqrt{(C \cdot R)^2 + 4 \cdot C \cdot L}}{2 \cdot C \cdot L}$$

$$\omega_2 = \frac{C \cdot R}{2 \cdot L \cdot C} + \frac{\sqrt{(C \cdot R)^2 + 4 \cdot L \cdot C}}{2 \cdot C \cdot L} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{C^2 \cdot R^2 + 4 \cdot L \cdot C}{4 \cdot L^2 \cdot C^2}}$$

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}}$$

يتم اعتماد القيمة الموجبة فقط.

$$\omega_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}} \quad , \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}} \quad \text{مما سبق نجد:}$$

وبالتالي عرض الحزمة **BW** يساوي:

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}} - \left(\frac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}} \right)$$

$$BW = \frac{R}{2L} + \frac{R}{2L} = \frac{2R}{2L} = \frac{R}{L} \text{ [rad/s]}$$

$$BW = \frac{\omega_0}{Q_s} \text{ [rad/s]} \quad \text{وفق تعريف عامل الجودة } Q_s = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} \text{ يكون عرض الحزمة هو:}$$

وبدلالة التردد يكون عرض الحزمة **BW** يساوي:

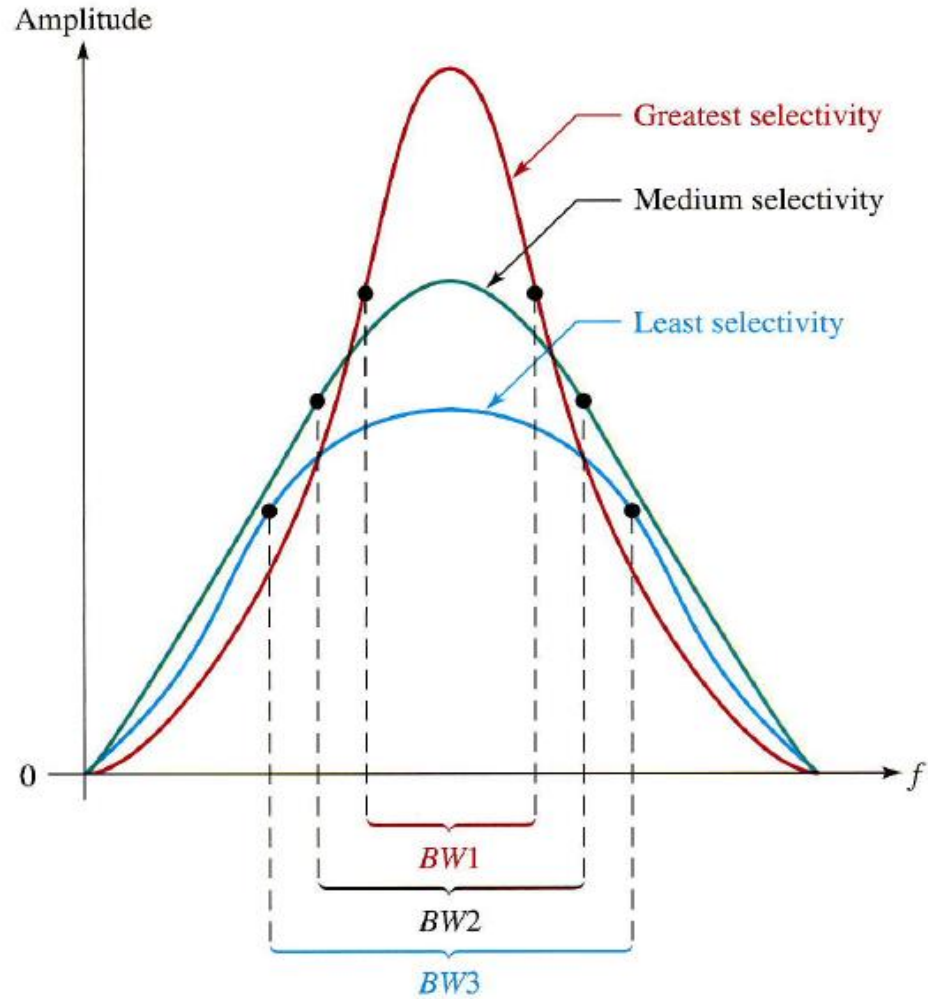
$$BW = f_2 - f_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2 \cdot \pi} = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot L} \text{ [Hz]}$$

من العلاقة الأخيرة ووفق تعريف عامل الجودة $Q_s = \frac{\omega_0 \cdot L}{R}$ يكون:

$$Q_s = \frac{\omega_0 \cdot L}{BW \cdot 2 \cdot \pi \cdot L} = \frac{\frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} \cdot L}{BW \cdot L} = \frac{f_0}{BW} = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$$

أوبدلالة ω :

$$Q_s = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$



المسافة بين الترددين f_1 و f_2 تدل على
قدرة انتخاب الدارة **Selectivity**.

$$\omega_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}} \quad , \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}}$$

بضرب العلاقتين

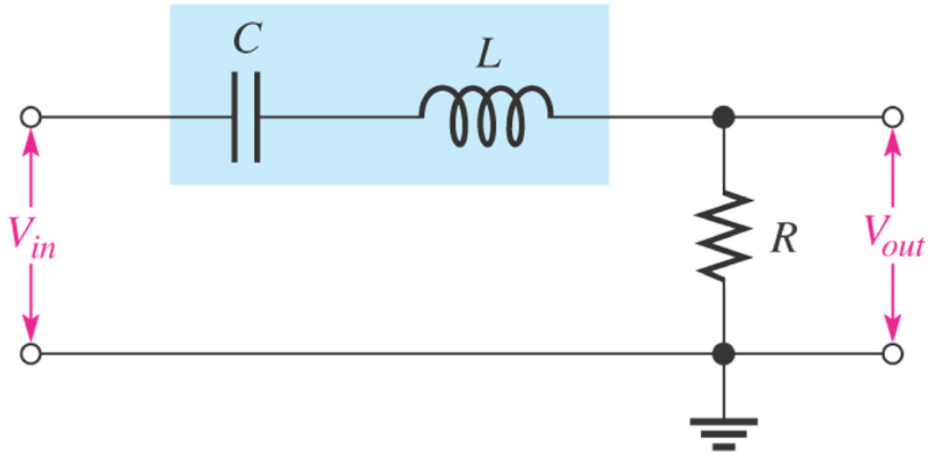
مع بعضهما نجد:

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{L \cdot C} = \omega_0^2$$
$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

تردد الطنين هو المتوسط الهندسي لترددات نصف الطاقة.

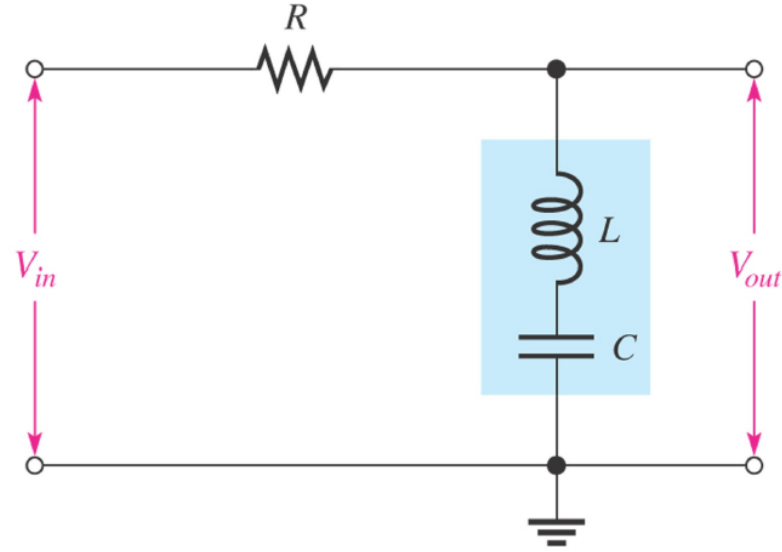
نقول عن عامل الجودة أن عالي إذا تجاوزت قيمته **10**، ونعتمد العلاقتين التاليتين في حساب **ω_1** و **ω_2**

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{BW[\text{rad/s}]}{2}$$
$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{BW[\text{rad/s}]}{2}$$



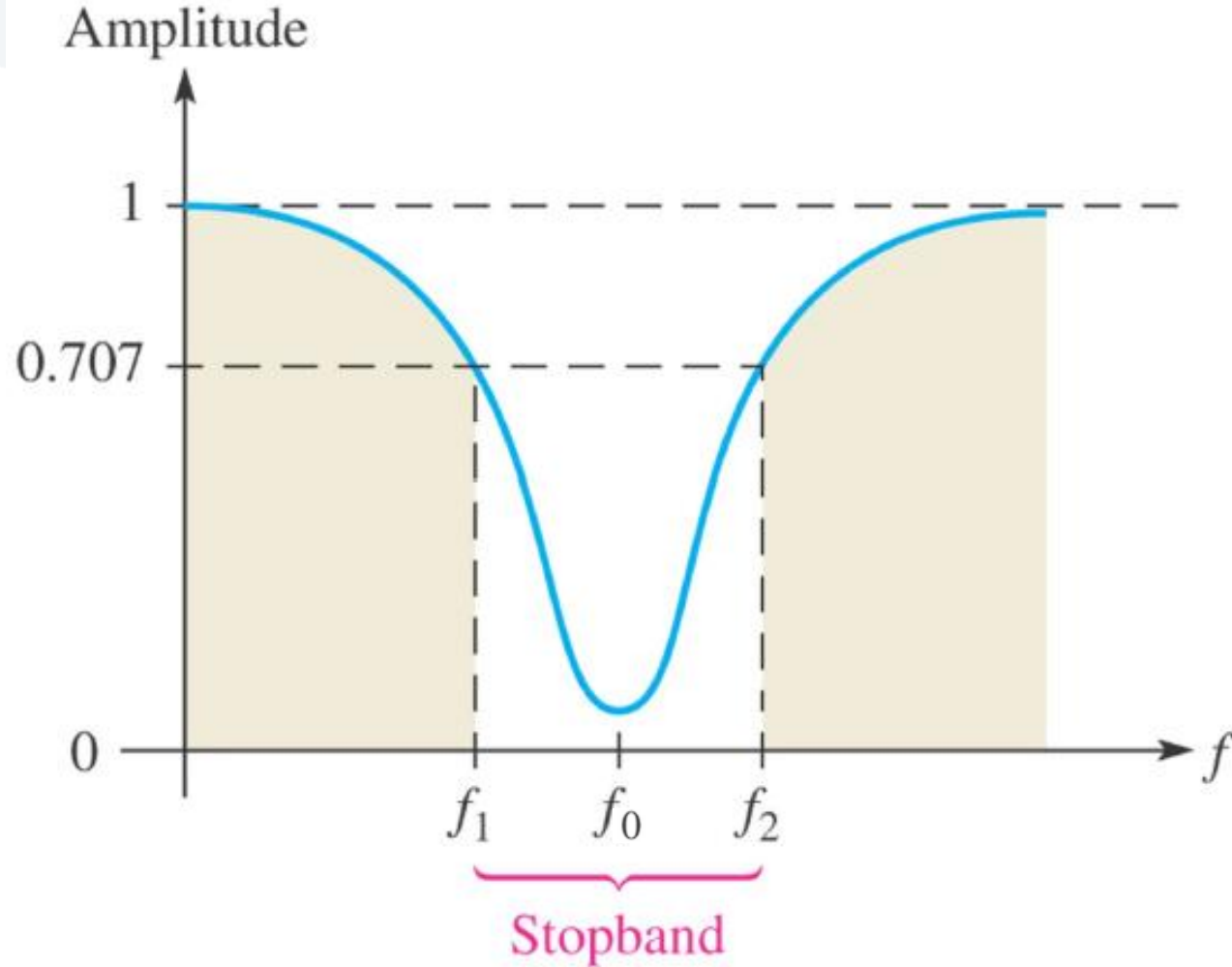
مرشح تمرير حزمة ترددات Band pass filter

نطبق إشارة الدخل V_{in} على طرفي الدارة التسلسلية، ونأخذ إشارة الخرج على طرفي المقاومة. ينتج عمل هذا المرشح من سلوك مميزة ممانعته مع تغير التردد: ففي الترددات المنخفضة تكون الممانعة كبيرة جداً مما يحد من مرور التيار، وبزيادة التردد تنقص هذه الممانعة مما يؤدي إلى مرور كمية من التيار أكبر، وبالتالي يكون الجهد على طرفي المقاومة أكبر. يصل جهد الخرج V_{out} إلى القيمة الأعظمية عند تردد الطنين، مع تيار أعظمي (ممانعة أصغرية). وإذا تابعتنا زيادة التردد فستزداد قيمة الممانعة من جديد لتمنع مرور التيار.



مرشح حذف حزمة ترددات Band elimination (stop) filter

نطبق إشارة الدخل V_{in} على طرفي الدارة التسلسلية، ونأخذ إشارة الخرج V_{out} على طرفي (الوشيعة+المكثف). في الترددات المنخفضة جداً تكون الممانعة (للوشيعة+المكثف) كبيرة جداً بسبب كبر المفاعلة السعوية X_C ، مما يسمح بمرور كامل التيار تقريباً. وبزيادة التردد تنقص قيمة هذه الممانعة لتصبح معدومة (نظرياً) عند تردد الطنين، مما يؤدي إلى حدوث دارة قصر لإشارة الخرج، وبالتالي يكون جهد الخرج معدوماً أو صغيراً جداً. إذا تابعنا زيادة التردد تزداد قيمة الممانعة من جديد (للوشيعة+المكثف)، وبالتالي تزداد قيمة إشارة الخرج.



لا يسمح هذا المرشح بمرور الإشارات ذات الترددات الواقعة بين f_1 و f_2 كما هو مبين بالشكل.

الطنين في دائرة عامة General circuit resonance

لإيجاد تردد الطنين الكهربائي في أية دائرة نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نحسب ممانعة الدخل للدائرة (أو السماحية).
- ✓ نطبق شرط الطنين العام بجعل القسم التخيلي للممانعة (أو السماحية) معدوماً.
- ✓ من شرط الطنين نحسب قيمة تردد الطنين.

