رياضيات الأعمال- المحاضرة الثامنة

Mathematics For Business

Dr. Fadi KHALIL

Doctor lecturer in statistics and programing department

في هذه المحاضرة سيتم التطرق للمواضيع الآتية:

- القيمة المستقبلية للدفعات الدورية Future value of annuities:
- مفهوم صناديق الوفاء أو الإحتياطي Sinking funds

2-3- القيمة المستقبلية للدفعات الدورية Future value of annuities:

الدفعات الدورية هي متوالية من الدفعات المتساوية والتي تكون غالباً منتظمة ordinary annuity (تتم في نهاية فترات زمنية معينة، كل شهر، أو كل سنة، .....). ويطلق على مجموع الدفعات الدورية مضافاً إليها الفائدة المتحققة بالقيمة المستقبلية.

لفهم مبدأ الدفعات الدورية المنتظمة ليكن المثال الآتي:

بفرض أنّ شخص ما يقوم بإيداع 100 دولار كل 6 أشهر في حساب مصرفي الذي يدفع 6% كفائدة مركبة نصف سنوية (compounded semiannually). فإذا قام بإيداع 6 دفعات، في نهاية كل فترة نصف سنوية على مدى 3 سنوات، فما هو المبلغ الذي سيتوفر في الحساب المصرفي في نهاية الدفعة الأخيرة؟

للإجابة على هذا السؤال يمكن استخدام مبدأ الفائدة المركبة التي تم عرضها في المبحث السابق ولكن مع اختلاف أنّ سابقاً يتم إيداع مبلغ لمرة واحدة فقط ومن ثمّ يتم حساب قيمة المبلغ المستقبلي بعد مرور فترة زمنية معينة، أمّا في هذه الحالة يتم إيداع المبلغ أكثر من مرّة ويُطلب حساب المبلغ المستقبلي لجميع هذه الدفعات. لذلك سيتم حساب المبلغ المستقبلي لكل دفعة على التوالي باستخدام صيغة المبلغ المستقبلي:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n$$

لنفرض $i = \frac{r}{m}$ والّذي يعبر عن معدل الفائدة في الفترة، بالتالي تصبح الصيغة:

$$A = P(1 + i)^n$$

الشخص قام بإيداع 6 دفعات، إذاً

الدفعة الأولى (100 دولار) تتم في نهاية الفترة الأولى (نصف السنة الأولى) وبالتالي تحسب القيمة المستقبلية بعد 2.5 سنوات، بفائدة سنوية 6%،علماً أنّ الفائدة المركبة نصف سنوية،

$$P = 100, \quad r = 0.06, \quad m = 2, \quad i = \frac{0.06}{2} = 0.03, \quad n = 2 * 2.5 = 5$$

$$A = 100(1 + 0.03)^5$$

الدفعة الثانية (100 دولار) تتم في نهاية الفترة الثانية (نصف السنة الثاني، أي أنّه قد يكون قد مضى سنة) وبالتالي تحسب القيمة المستقبلية بعد 2 سنة، بفائدة سنوية 6%،علماً أنّ الفائدة المركبة نصف سنوية،

$$P = 100, \quad r = 0.06, \quad m = 2, \quad i = \frac{0.06}{2} = 0.03, \quad n = 2 * 2 = 4$$

$$A = 100(1 + 0.03)^4$$

الدفعة الثالثة (100 دولار) تتم في نهاية الفترة الثالثة (نصف السنة الثالث، أي أنّه قد يكون مضى سنة ونصف) وبالتالي تحسب القيمة المستقبلية بعد 1.5 سنة، بفائدة سنوية 6%،علماءأنّ الفائدة المركبة نصف سنوية،

$$P = 100, \quad r = 0.06, \quad m = 2, \quad i = \frac{0.06}{2} = 0.03, \quad n = 2 * 1.5 = 3$$

$$A = 100(1 + 0.03)^3$$

الدفعة الرابعة (100 دولار) تتم في نهاية الفترة الرابعة (نصف السنة الرابع، أي أنّه قد مضى سنتين) وبالتالي تحسب القيمة المستقبلية بعد 1 سنة، بفائدة سنوية 6%،علماءأنّ الفائدة المركبة نصف سنوية،

$$P = 100, \quad r = 0.06, \quad m = 2, \quad i = \frac{0.06}{2} = 0.03, \quad n = 2 * 1 = 2$$

$$A = 100(1 + 0.03)^2$$

الدفعة الخامسة (100 دولار) تتم في نهاية الفترة الخامسة (نصف السنة الخامس، أي أنّه قد مضى سنتين ونصف) وبالتالي تحسب القيمة المستقبلية بعد نصف سنة، بفائدة سنوية 6%،علماءأنّ الفائدة المركبة نصف سنوية،

$$P = 100, \quad r = 0.06, \quad m = 2, \quad i = \frac{0.06}{2} = 0.03, \quad n = 2 * 0.5 = 1$$

$$A = 100(1 + 0.03)^1$$

الدفعة السادسة (100 دولار) تتم في نهاية الفترة السادسة (نصف السنة السادس، أي أنّه قد مضى ثلاث سنوات) وبالتالي تحسب القيمة المستقبلية بشكل فوري، بفائدة سنوية 6%،علماءأنّ الفائدة المركبة نصف سنوية،

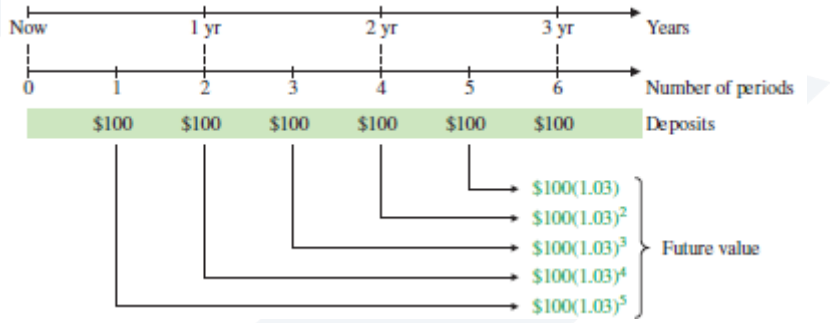
$$P = 100, \quad r = 0.06, \quad m = 2, \quad i = \frac{0.06}{2} = 0.03, \quad n = 2 * 0 = 0$$

$$A = 100(1 + 0.03)^0 = 100$$

بالعودة للمطلوب وهو حساب المبلغ المستقبلي لمجموع الدفعات خلال 3 السنوات، يتم جمع القيم المستقبلية السابقة:

$$S = 100 + 100(1 + 0.03)^1 + 100(1 + 0.03)^2 + 100(1 + 0.03)^3 + 100(1 + 0.03)^4 + 100(1 + 0.03)^5$$

والشكل الآتي يساعد في فهم الدفعات الدورية، توقيتها، وقيمها المستقبلية:



ما سبق يظهر الحاجة إلى تبسيط الحسابات، وضرورة وضع صيغة عامة من أجل الحصول على مجموع القيم المستقبلية لمجموعة الدفعات الدورية المنتظمة كما يأتي:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

حيث تمثل R هي قيمة الدفعة الدورية المنتظمة، $i = \frac{r}{m}$ يمثل معدل الفائدة في الفترة، n هوو عدد الدفعات الإجمالي.

وبتطبيق هذه الصيغة على المعطيات في المثال السابق يمكن حساب مجموع القيم المستقبلية للدفعات الدورية:

$$R = 100,\ \ i = \frac{r}{m} = \frac{0.06}{2} = 0.03,\quad n = 2 * 3 = 6$$

بالتعويض:

$$S = 100\frac{(1+0.03)^6 - 1}{0.03} = 646.84$$

ملاحظة 1: بالعودة إلى مبحث المتواليات الهندسية وتذكر صيغة المجموع العام لمتوالية هندسية منتهية

$$S = a\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

وبمقارنتها مع صيغة مجموع القيم المستقبلية لدفعات دورية:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

يلاحظ أنّ هذه الصيغة تعبر عن مجموع حدود متوالية هندسية منتهية *finite geometric sequence* بحيث يكون الحد الأول $a = R$، و $1 + i = r$.

ملاحظة 2: في مراجع الرياضيات المالية جرت العادة أن يتم الترميز لـ S بالقيمة المستقبلية *future value* (FV)، ولقيمة الدفعة R بـ *payement* (PMT)، بالتالي تكتب الصيغة السابقة كما يأتي:

$$FV = PMT\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

حيث:

FV تمثل القيمة المستقبلية *future value*.

PMT تشير إلى الدفعة الدورية *periodic payement*.

$i = \frac{r}{m}$ تدل على معدل الفائدة في الفترة *rate per period*.

n عدد الدفعات أو الفترات الإجمالي *number of payement (periods)*.

مع الملاحظة أنّ الدفعة تتم في نهاية كل فترة.

مثال 1:

ما هي إجمالي القيمة المستقبلية لمجموعة الدفعات السنوية في نهاية 20 سنة، وذلك إذا تمّ إيداع 2000 دولار في نهاية كل سنة بمعدل فائدة مركبة سنوية 8.5%، وما هي مقدار الفائدة المدفوعة في نهاية 20 سنة؟

يلاحظ أنّ الدفعات الدورية المنتظمة في دفعات سنوية وبالتالي سيتم استخدام الصيغة الآتية:

$$FV = PMT\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$PMT = 2000, \quad r = 0.085, \quad m = 1, \; i = \frac{0.085}{1} = 0.085, \quad n = 20$$

بالتعويض:

$$FV = 2000\frac{(1+0.085)^{20} - 1}{0.085}$$

$$FV = 2000\frac{(1.085)^{20} - 1}{0.085} = 96754.03$$

وهو القيمة المستقبلية لإجمالي 20 دفعة التي تمّ إيداعها سنوياً على مدى 20 سنة.

لحساب مقدار الفائدة المدفوعة *Interest* يتم طرح إجمالي الودائع (*deposits*) من إجمالي القيمة المستقبلية:

$$interest = FV - deposits$$

لحساب إجمالي الودائع على مدى 20 سنة وهو ضرب عدد الدفعات الإجمالي n في قيمة الدفعة الواحدة

$$deposits = n * 2000 = 20 * 2000 = 40000.$$

بالتالي لحساب الفائدة:

$$interest = 96754.03 - 40000 = 56754$$

مثال 2:

ما هو إجمالي القيمة المستقبلية لمجموعة من الدفعات نصف السنوية على مدى 10 سنوات، إذا تم إيداع 1000 دولار في نهاية كل 6 أشهر وبفائدة مركبة سنوية 8%، وما هو مقدار الفائدة؟

يلاحظ أنّ الدفعات الدورية المنتظمة في دفعات سنوية وبالتالي سيتم استخدام الصيغة الآتية:

$$FV = PMT\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$PMT = 1000, \quad r = 0.08, \quad m = 2, \quad i = \frac{0.08}{2} = 0.04, \quad n = 2 * 10 = 20$$

بالتعويض:

$$FV = 1000\frac{(1+0.04)^{20} - 1}{0.04}$$

$$FV = 1000\frac{(1.04)^{20} - 1}{0.04} = 29778.078$$

وهو القيمة المستقبلية لإجمالي 20 دفعة التي تمّ إيداعها بشكل نصف سنوي على مدى 10 سنوات.

لحساب مقدار الفائدة المدفوعة *Interest* يتم طرح إجمالي الودائع (*deposits*) من إجمالي القيمة المستقبلية:

$$interest = FV - deposits$$

لحساب إجمالي الودائع على مدى *10* سنوات، وهو ضرب عدد الدفعات الإجمالي n في قيمة الدفعة الواحدة

$$deposits = n * 1000 = 20 * 1000 = 20000.$$

بالتالي لحساب الفائدة:

$$interest = 29778.078 - 20000 = 9778.078$$

من أهم جوانب تطبيقات القيمة المستقبلية للدفعات الدورية المنتظمة هو ما يعرف بصناديق الوفاء، أو الاحتياطي Sinking funds. وفيما يأتي توضيح لهذا الجانب:

2-3-1- صناديق الوفاء أو الاحتياطي Sinking funds:

وهي تعبير عن صندوق أو حساب يتم تشكيله لكي يوضع به مجموعة من الدفعات ويتم تلبية التزام أو دفع دين مستقبلي، لتوضيح فكرة صناديق الوفاء *sinking funds* سيتم عرض المثال الآتي:

بفرض أنّ إحدى العائلات قررت أنّ في كل سنة، وفي اليوم الذي يصادف عيد ميلاد مولودها الجديد ولمدة 17 سنة، تقوم بإيداع مبلغ من المال PMT في حساب مصرفي يدفع 6% فائدة مركبة سنوية. إذ تنوي هذه العائلة استخدام هذه المبالغ لسداد مصاريف الدراسة في الجامعة. المطلوب ما هو المبلغ السنوي PMT الواجب إيداعه في الحساب لكي يتوفر في الحساب 80000 دولار بعد مرور 17 سنة؟

في هذا المثال يلاحظ أن إجمالي القيمة المستقبلية للدفعات الدورية المنتظمة $FV = 80000$، والمطلوب هو إيجاد قيمة الدفعة الواحدة PMT، وبتطبيق الصيغة الآتية:

$$FV = PMT\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$FV = 80000, r = 0.06, \quad m = 1, \quad i = \frac{0.06}{1} = 0.06, \quad n = 1 * 17 = 17$$

$$80000 = PMT\frac{(1+0.06)^{17} - 1}{0.06}$$

$$PMT = 80000\frac{0.06}{(1+0.06)^{17} - 1}$$

$$= 2835.58$$

أي يتوجب على هذه العائلة أن تضع في الحساب المصرفي مبلغ 2835.58 دولار بشكل سنوي وبفائدة مركبة 6% لكي تحصل بعد 17 سنة على مبلغ 80000 دولار.

مثال 3:

قدرّت شركة أنّ بعد 5 سنوات يتوجب عليها أن تقوم باستبدال إحدى آلاتها بتكلفة 800000 دولار، ولكي تقوم الشركة بتأمين هذا المبلغ قامت بتشكيل صندوق احتياطي *sinking fund* وذلك عن طريق إيداع دفعات شهرية متساوية في حساب وذلك بفائدة مركبة تقدر بـ 6.6% .

المطلوب:

1- ما هو مقدار الدفعة الشهرية؟

2- ما هو إجمالي الفائدة المكتسبة خلال السنوات الخمس؟

3- ما هو مقدار الفائدة المكتسبة في السنة الخامسة؟

الحل:

لإيجاد مقدار الدفعة المنتظمة بشكل شهري يتم تطبيق صيغة إجمالي القيمة المستقبلية للدفعات المنتظمة:

$$FV = PMT\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$FV = 800000, r = 0.066, \quad m = 12, \quad i = \frac{0.066}{12} = 0.0055,$$

$$n = 12 * 5 = 60$$

$$800000 = PMT\frac{(1+0.0055)^{60} - 1}{0.0055}$$

$$PMT = 80000\frac{0.0055}{(1+0.0055)^{60} - 1}$$

$$= 11290.42$$

أي يجب على الشركة أن تودع مبلغ شهري يقدر بـ 11290.42 دولار ولمدة سنوات لكي تحصل في النهاية بعد 5 سنوات على مبلغ 800000.

2- إجمالي الفائدة المكتسبة في السنوات الخمس:

لحساب مقدار الفائدة المدفوعة *Interest* يتم طرح إجمالي الودائع (*deposits*) من إجمالي القيمة المستقبلية:

$$interest = FV - deposits$$

لحساب إجمالي الودائع على مدى 5 سنوات، وهو ضرب عدد الدفعات الإجمالي n في قيمة الدفعة الواحدة

$$deposits = n * 11290.42 = 60 * 11290.42 = 677425.2،$$

بالتالي لحساب الفائدة الإجمالية:

$$interest = 800000 - 677425.2 = 122547.8$$

3- لحساب الفائدة المكتسبة في السنة الخامسة فقط يجب أولاً حساب مقدار الزيادة المتحققة في هذه السنة، وذلك بحساب القيمة المستقبلية بعد أربع سنوات ومن ثم طرحها من المبلغ المستقبلي 800000:

إجمالي القيمة المستقبلية بعد 4 سنوات:

$$FV = PMT\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$PMT = 11290.42\ , r = 0.066, \quad m = 12,$$

$$i = \frac{0.066}{12} = 0.0055,$$

$$n = 12 * 4 = 48$$

$$FV = 11290.42\frac{(1+0.0055)^{48} - 1}{0.0055}$$

$$= 618277.04$$

أي أنّ المبلغ المستقبلي بعد مرور 4 سنوات هو 618277.04، أي أنّ مقدار الزيادة المتحققة في السنة الخامسة هو :

$$800000 - 618277.04 = 181722.96$$

هذه الزيادة في القيمة المستقبلية بعد مرور 5 سنوات تتكون من فائدة و مجموع ما يدفع من دفعات شهرية في السنة الخامسة، وبالتالي:

مجموع ما يدفع في السنة الخامسة من الدفعات الشهرية هو :

$$12 * 11290.2 = 135485.04$$

إذاً مقدار الفائدة المدفوعة في السنة الخامسة هو:

$$181722.96 - 135485.04 = 46237.92$$