# الفصل الثالث

# جريان الموائع المثالية وحيدة البعد

# مفهوم جريان مائع

الجريان الدائم: هو الجريان الذي تكون فيه $\vec{V}$ غير متعلقة بالزمن (ثابتة مع الزمن).
في حال كانت السرعة متغيرة مع الزمن يسمى الجريان "غير دائم".

سرعة جريان جزيئة المائع هي مقدار شعاعي يتعين فراغياً بمركباته الثلاث على محاور الجملة الديكارتية (X, Y, Z) ومركبات شعاع السرعة على هذه المحاور تحدد بالثنائية (الشدة × شعاع الواحدة). وبالتالي يمكن أن نكتب شعاع السرعة $\vec{V}$ كالتالي:

$$\vec{V} = u.\vec{i} + v.\vec{j} + w.\vec{k}$$

أما شدة شعاع السرعة فتعطى بالعلاقة:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

# مفهوم جريان مائع

الجريان وحيد البعد: عندما يكون شعاع السرعة تابعاً لإحداثي وحيد (بالإضافة إلى الزمن في الجريان غير الدائم).

$$\vec{V} = f(x, t), \quad u = f(x, t)$$

$$v = w = 0$$

هذه الحالة تشابه حركة الماء في أنبوب دائري ذي قطر صغير.

في حين يكون الجريان ثنائي البعد إذا كان شعاع السرعة تابعاً لإحداثيين.

$$\vec{v} = f(x, y, t)$$

$$u = f_1(x, y, t), \quad v = f_2(x, y, t)$$

هذه الحالة تكافئ جريان الماء في قناة موشورية (مقطعها ثابت على طول محور الجريان)

الجريان ثلاثي الأبعاد هو الذي يتبع فيه شعاع السرعة للإحداثيات الثلاثة X,Z,Y

$$\vec{v} = f(x, y, z, t)$$

$$u = f_1(x,y,z,t), \quad v=f_2(x,y,z,t), w=f_3(x,y,z,t)$$

# مفهوم جريان مائع

هناك طريقتان لوصف حركة الموائع . الاولى تعزى للاغرانج Lagrange والثانية لاولر Euler

في طريقة لاغرانج تعطى لكل ذرة كتلتها ( dm ) قيم أولية( a, b, c ) تعبر مثلاً من احداثياتها الاصلية ($x_o$, $y_o$ ,$z_o$) في اللحظة ( t = 0 )،ومن ثم يعبر عن احداثيات تلك الذرة (x,y,z) في اللحظة ( t )كتابع لـ (a, b, c) أي :

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= f_1(a, b, c, t) \\
y &= f_2(a, b, c, t) \\
z &= f_3(a, b, c, t)
\end{aligned}
\right\}
$$

# مفهوم جريان مائع

في طريقة أُولر تعبر التفاضلات $(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt})$ عن التغيرات بالنسبة للزمن للمركبات $(u, v, w)$ لذرة مائعة معينة والتي تصدف أن تكون في النقطة $[(x, y, z)]$ في اللحظة $(t)$ اذن فهي تمثل التسارعات المادية أو التسارعات الكلية لهذه الذرة.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \\
\frac{dv}{dt} &= u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \\
\frac{dw}{dt} &= u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \quad (3-6)$$

## خطوط التيـــــار Streamlines :

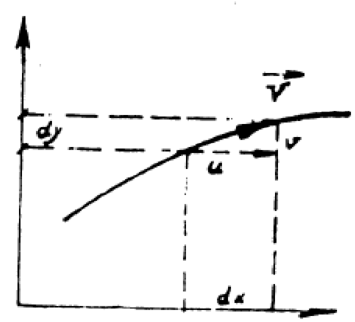
إذا رسمنا منحنيات تمس في كل نقطة من حقل أو مجـــال الجريان شعاع السرعة في تلك النقطة وفي لحظة معينة فاننا نحصـــل على مجموعة من المنحنيات تسمى خطوط التيار .

بما أن خطوط التيار مماســـة لاشعة السرعة في كل نقطة فتعطى معادلاتها في الجريان المستـــــوي بالعلاقة :

$$\frac{dy}{v} = \frac{dx}{u}$$

وفي الجريان ثلاثي البعد ينتج:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$



## المسارات :

المسار هو المحل الهندسي لاوضاع الذرة المائعة أثناء انتقالها من مكان لآخر، أي هو المنحني الذي ترسمه الذرة أثناء حركتها ضمن المائع. نحصل على معادلات هذا الخط بحذف ( $t$ )من مجموعة المعادلات( 2 - 3 ) فنحصل على :

$$y = F(x)$$

$$z = G(x)$$

أي :

$$H(x, y, z) = 0$$

أنابيب التيار Stream Tubes :

إذا رسمنا في لحظة معينة جميع خطوط التيار التي تستند على منحني مغلق ما ،شكل( ٣ ـ ٣ ) فانها تشكل مايشبه الانبوب وندعوه انبوب التيار .

يعطى شعاع السرعة ( $\vec{V}$ ) لجريان ما في الحالـــــة العامة كتابع للمكان ( S ) والزمن ( t ) من الشكل:

$$\boxed{\vec{V} = f(x \;, \; t)}$$

ا ـ يعطى التفاضل الكلي للشعاع ( $\vec{V}_s$ ) باتجاه الجُريان بالعلاقة :

$$dV_s = \frac{\partial V_s}{\partial S}\, dS + \frac{\partial V_s}{\partial t}\, dt$$

ومنه :

$$\frac{dV_s}{dt} = V_s \frac{\partial V_s}{\partial S} + \frac{\partial V_s}{\partial t} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial (V_s)^2}{\partial S} + \frac{\partial V_s}{\partial t}$$

إن تطبيق معادلة الاستمرار على انبوب التيار يعطي :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_Q \rho dQ + \int_A \rho \vec{V}.d\vec{A} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_Q \rho dQ + \int_A (\rho_2 V_2 dA_2 - \rho_1 V_1 dA_1) = 0$$

عندما تكون السرعة والكتلة النوعية منتظمتي التوزيع على السطحين $A_1$ و $A_2$ فان العلاقة الاخيرة تصبح :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_Q \rho dQ + \rho_2 A_2 V_2 - \rho_1 A_1 V_1 = 0$$

الحد الاول من هذه العلاقة عبارة عن المعدل الزمني لتغير كتلة المائع ضمن حجم المراقبة.

عندما يكون المائع متجانساً وغير قابل للانضغاط، نحصل على $\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dQ = 0$

وبالتالي يتساوى معدل خروج المائع من المقطع A2 مع معدل دخول المائع من المقطع A1

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = C$$

$$\rho V A = C$$

$$\rho VA = C$$

أن العلاقة هي معادلة الاستمرار لجريان وحيد البعد تحت الشروط التالية :

١ ـ الجريان الدائم •

٢ ـ السرعة والكتلة النوعية منتظمتا التوزيع على كامل السطح A.

٣ ـ اتجاه أو منحني السرعة عمودي على السطح •

٤ ـ للمقدار الثابت C وحدة كتلة / زمن ويدعى معدل التدفق الكتلي •

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial S} + g\frac{\partial z}{\partial S} + V\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

تلك هي معادلة الحركة لجريان غير دائم قابل للانضغاط وفق خط تيار معين S . في الجريان الدائم لايظهر الزمن t كمتحول مستقل والعلاقة الاخيرة تصبح :

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dS} + g\frac{dz}{dS} + V\frac{dV}{dS} = 0$$

$$\frac{dP}{\rho} + gdz + VdV = 0$$

تعرف هذه المعادلة بمعادلة أولر لجريان دائم وحيد البعد وعديم اللزوجة .

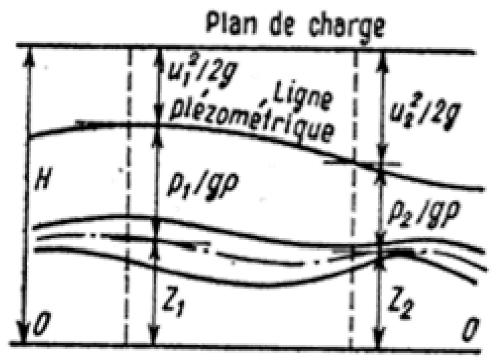
- معادلة برنوللـــــي:

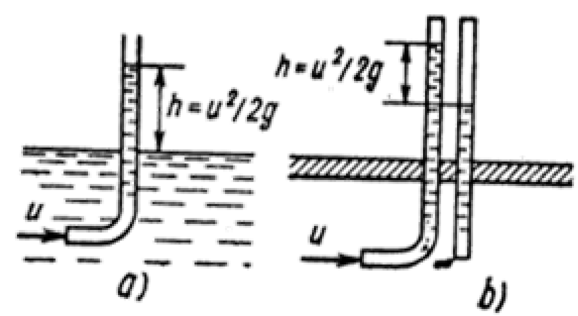
إن العلاقة (19 - 3) هي معادلة تربط بين خـــــواص التيار عند نقطة ما من خط معين ، وتكامل هذه المعادلة يعنـــي تحديد العلاقة بين الضغط والسرعة والارتفاع عند جميع نقاط خـــط التيار المفروض

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C$$

$$P + \rho\frac{V^2}{2} + \rho gz = C_2$$

$$\frac{P}{\omega} + \frac{V^2}{2g} + z = C_1$$



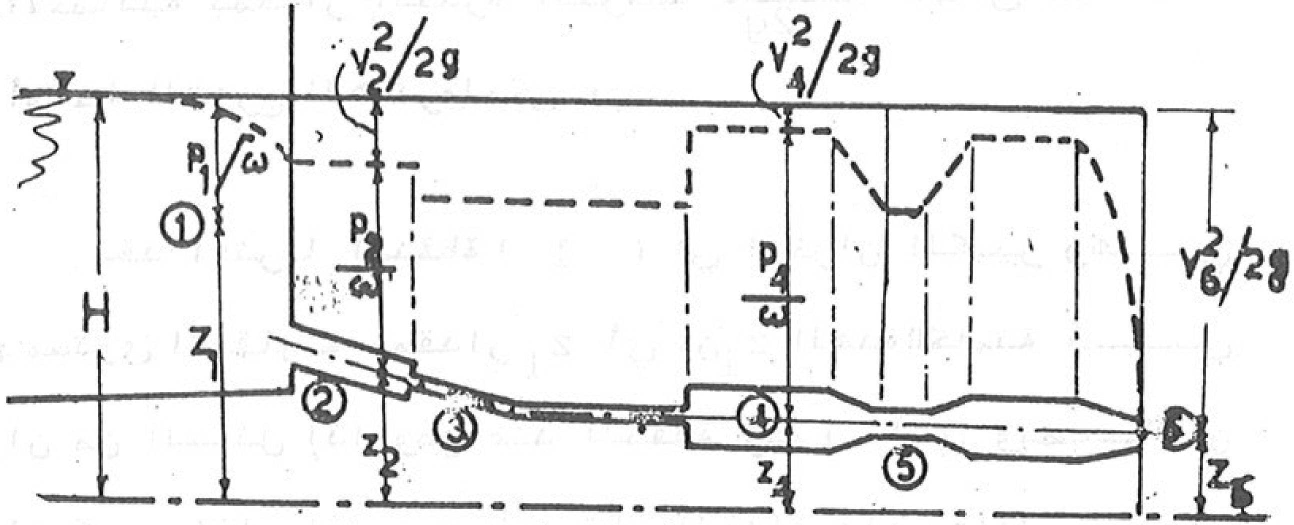
# أهميـــــــــــة الحدود الثلاثة في معادلة برنوللي :

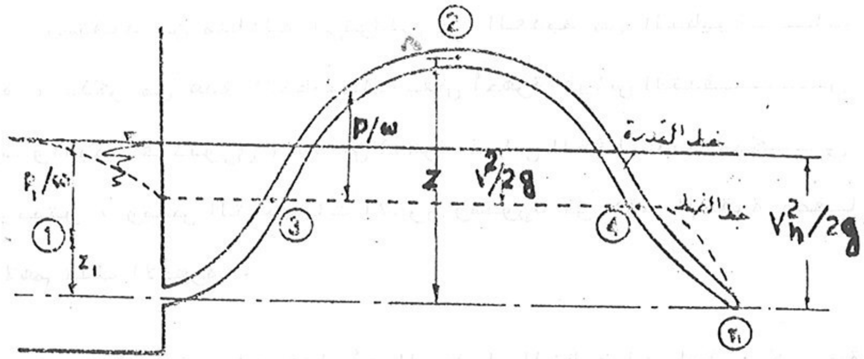
لنعتبر الصيغة التالية لمعادلة برنوللي :

$$\frac{P}{\omega} + \frac{V^2}{2g} + z = C$$

ان تطبيق معادلة برنوللي بين نقطتين مختلفتين من خط تيار معين يعطي :

$$\frac{P_1}{\omega} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\omega} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 = H$$






الشكل ( ٣ – ١٠ )

ان تطبيق المعادلة ( 24 – 3 ) على خط التيار المبين في الشكل ( ٣ – ١٠ ) بين النقاط ( 1 ) و ( 2 ) و ( 3 ) يعطي :

$$\frac{P}{\omega} + 0 + z_1 = -\frac{P_2}{\omega} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 =$$

$$= 0 + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 = H$$

إذا تتبعنا مسار نقطة على خط التيار بدءاً من النقطة 0 على السطح الحر لوجدنا أن الضغط يتغير كمايلي :

الضغط عند النقطة 0 هو ضغط جوي. يزداد الضغط كلما ازدادالعمق. يبقى الضغط ثابتاً في الانبوب الافقي إذا كان مقطع الانبوب ثابتاً حين ينحني الانبوب صاعداً تزداد القدرةالكامنةوينقص الضغط. يصل الضغط الى قيمته الدنيا حين وصل الانبوب الى ذروته العليا . يعود الضغط للتزايد من جديد ( بقيمته السالبة ) الى أن ينعدم ( أي يساوي الضغط الجوي ) عند تقاطع خط التيار مع خط الضغط . ونلاحظ أن :

$$P_o = P_3 = P_4 = P_n = 0$$

# الخلاصة:

- مفاهيم أساسية في الجريان
- شعاع السرعة في الفراغ

$$\vec{V} = u.\vec{i} + v.\vec{j} + w.\vec{k}$$

- معادلة الاستمرار $\rho V A = C$

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = C$$

- معادلة برنوللي

$$\frac{P}{\omega} + \frac{V^2}{2g} + z = H$$

- تطبيقات معادلة برنوللي:
  - **الجريان من الفتحات**
    - **الجريان من فتحة صغيرة**
    - **الجريان من فتحة كبيرة نسبيا**
    - **الجريان من فتحة في خزان مضغوط**
    - **الجريان من فتحة سفلية بارتفاع متغير**

$$V = C_v \sqrt{2gH}$$

$$Q = C_d\, A\, \sqrt{2gH}$$

$$Q = \frac{2}{3}\, C_d\, b\, \sqrt{2g}\,(h_2^{3/2} - h_1^{3/2})$$