رياضيات الأعمال- المحاضرة التاسعة

Mathematics For Business

Dr. Fadi KHALIL

Doctor lecturer in statistics and programing department

في هذه المحاضرة سيتم التطرق للمواضيع الآتية:

- القيمة الحالية للدفعات الدورية Present value of an annuity.
- فكرة صناديق التقاعد Retirement planning
- اهتلاك القروض Amortization

4-2- القيمة الحالية للدفعات الدورية Present value of annuities:

ما هو مقدار المبلغ الواجب إيداعه في حساب يدفع فائدة مركبة 6% نصف سنوية لكي يتم سحب 1000 دولار كل 6 أشهر في ثلاث سنوات القادمة؟

بمعنى آخر يجب إيجاد القيمة الحالية لكل 1000 دولار يتم استردادها خلال 3 سنوات. يمكن ذلك عن طريق إيجاد المبلغ الحالي P في صيغة المبلغ المستقبلي وفقاً للفائدة المركبة:

$$A = P(1+i)^n$$

حيث $i = \frac{r}{m}$، بالتالي:

$$P = \frac{A}{(1+i)^n}$$

بالتعويض في قيم المثال، $i = \frac{r}{m} = \frac{006}{2} = 0.03$، $A = 1000$ ، تكون القيمة الحالية للدفعة التي سيتم تحصيلها بعد الفترة الأولى (الأشهر الستة الأولى):

$$P = \frac{A}{(1+0.03)^1} = \frac{1000}{(1.03)^1} = 1000(1.03)^{-1}$$

والقيمة الحالية للدفعة التي سيتم تحصيلها بعد الفترة الثانية (الأشهر الستة الثانية):

$$P = \frac{A}{(1+0.03)^2} = \frac{1000}{(1.03)^2} = 1000(1.03)^{-2}$$

والقيمة الحالية للدفعة التي سيتم تحصيلها بعد الفترة الثالثة (الأشهر الستة الثالثة):

$$P = \frac{A}{(1+0.03)^3} = \frac{1000}{(1.03)^3} = 1000(1.03)^{-3}$$

والقيمة الحالية للدفعة التي سيتم تحصيلها بعد الفترة الرابعة (الأشهر الستة الرابعة):

$$P = \frac{A}{(1+0.03)^4} = \frac{1000}{(1.03)^4} = 1000(1.03)^{-4}$$

والقيمة الحالية للدفعة التي سيتم تحصيلها بعد الفترة الخامسة (الأشهر الستة الخامسة):

$$P = \frac{A}{(1+0.03)^5} = \frac{1000}{(1.03)^5} = 1000(1.03)^{-5}$$

والقيمة الحالية للدفعة التي سيتم تحصيلها بعد الفترة السادسة (الأشهر الستة السادسة):

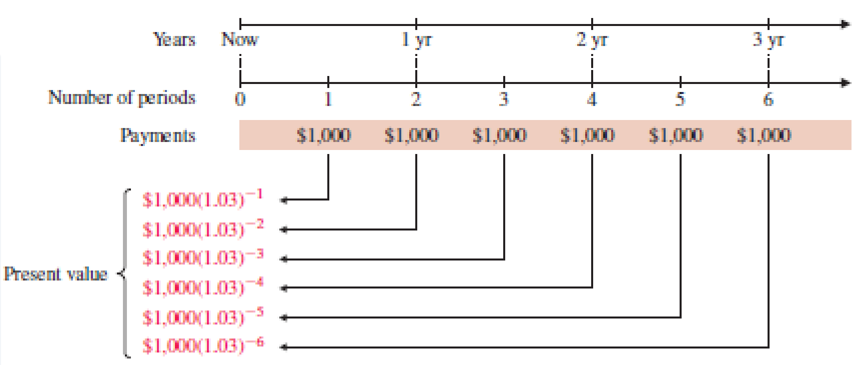
$$P = \frac{A}{(1+0.03)^6} = \frac{1000}{(1.03)^6} = 1000(1.03)^{-6}$$

من القيم الحالية للدفعات يلاحظ أنّها تنخفض مع ازدياد الفترة الزمنية للتحصيل، وهذا يرجع إلى أنّ القيمة الحالية تعبر عن المبلغ الذي سيتم استثماره بحيث يكون المبلغ المستقبلي بعد مرور فترة زمنية محددة 1000 دولار. على سبيل المثال إنّ المبلغ الذي سيتم استثماره ليكون المبلغ المستقبلي 1000 دولار بعد 5 سنوات، سيكون حتماً أقل من ذلك المبلغ الذي سيتم استثماره لمدة 3 سنوات ليكون نفس المبلغ المستقبلي 1000 دولار.

وفي حال حساب مجموع القيم الحالية للدفعات الدورية المنتظمة:

$$P = 1000(1.03)^{-1} + 1000(1.03)^{-2} + 1000(1.03)^{-3} + 1000(1.03)^{-4} + 1000(1.03)^{-5} + 1000(1.03)^{-6} = 5417.19$$

والشكل الآتي يوضّح الحسابات السابقة:



ولكن بما إنّ الحسابات السابقة قد تتطلب وقت ليس بالقليل، وخاصة إذا كانت عدد الدفعات كبير، تمّ اقتراح الصيغة الآتية لمجموع القيم الحالية للدفعات الدورية المنتظمة:

$$P = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

بالتعويض في قيم المثال السابق:

$$R = 1000, \quad i = \frac{0.06}{2} = 0.03, \quad n = 3 * 2 = 6$$

$$P = 1000\frac{1-(1+0.03)^{-6}}{0.03} = 1000\frac{1-(1.03)^{-6}}{0.03} = 5417.19$$

ملاحظة 1: بمقارنة الصيغة السابقة مع الصيغة العامة لمجموع حدود متوالية هندسية منتهية *finite geometric sequence* :

$$S = a\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

بحيث يكون الحد الأول $a = R$ ، وأساسها $r = (1+i)^{-1}$.

ملاحظة 2: في مراجع الرياضيات المالية جرت العادة أن يتم الترميز لـ P بالقيمة الحالية *present value* (PV)، ولقيمة الدفعة R بـ *payement* (PMT)، بالتالي تكتب الصيغة السابقة كما يأتي:

$$PV = PMT\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

حيث:

PV تمثل القيمة الحالية *present value*.

PMT تشير إلى الدفعة الدورية *periodic payement*.

$i = \frac{r}{m}$ تدل على معدل الفائدة في الفترة *rate per period*.

n عدد الدفعات أو الفترات الإجمالي *number of payement (periods)*.

مع التذكير بأنّ الدفعة تتم في نهاية كل فترة.

مثال 1:

ما هو مقدار القيمة الحالية لمجموع الدفعات الشهرية بقيمة 200 دولار ولمدة 5 سنوات علماً أنّ معدل الفائدة المركبة هو 6%؟

باستخدام صيغة مجموع القيم الحالية للدفعات المركبة:

$$PV = PMT\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$PMT = 200, \quad m = 12, \quad i = \frac{0.06}{12} = 0.005, \quad \mathrm{n} = \mathrm{m} * \mathrm{t} = 12 * 5 = 60$$

بالتعويض:

$$PV = PMT\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$PV = 200\frac{1-(1+0.005)^{-60}}{0.005} = 10345.11$$

أي أنّ القيمة الحالية لمجموع الدفعات بقيمة 200 دولار شهرياً هو 10345.11 دولار.

مثال 2:

ما هو مقدار المبلغ الواجب إيداعه في حساب مصرفي يدفع فائدة مركبة ربعية بمعدل سنوي 8% لكي يتم الحصول على دفعات ربعية مستقبلية بقيمة 1000 دولار ولمدة 4 سنوات؟

بما إنّ السؤال هنا يتعلق بالقيمة الحالية مع وجود دفعات مستقبلية فالصيغة المناسبة هي:

$$PV = PMT\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

بالبحث عن المعطيات لتعويضها:

$$PMT = 1000, \quad m = 4, \quad i = \frac{0.08}{4} = 0.02, \quad \mathrm{n = m * t = 4 * 4 = 16}$$

$$PV = 1000\frac{1-(1+0.02)^{-16}}{0.02} = 13577.71$$

أي عند وضع مبلغ يقدر بـ 13577.71 دولار في الحساب المصرفي يمكن الحصول على دفعات شهرية مقدارها 1000 دولار لمدة 4 سنوات.

حالة تطبيقية 1: فكرة صناديق التقاعد retirement planning:

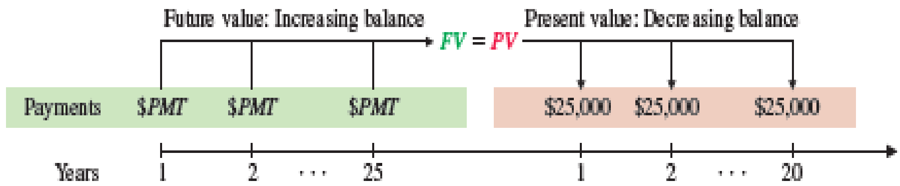
تشبه فكرة صناديق التقاعد صناديق الوفاء Sinking funds حيث يقوم شخص ما بإيداع دفعات دورية منتظمة طيلة وجوده في عمله على أن يتحصل بدءاً من لحظة التقاعد على دفعات دورية منتظمة وفقاً لشروط محددة مسبقاً. والمثال الآتي يتعلق بهذه الفكرة:

قدمت إحدى شركات التأمين الإجتماعي وصناديق التقاعد عرضاً بتقديم دفعات دورية منتظمة مقابل فائدة مركبة سنوية بمعدل 6.5%. في نفس الوقت خطط شخص بإيداع مبالغ متساوية في هذا الحساب لمدة 25 سنة على أن يحصل على 20 دفعة سنوية بقيمة 25000 دولار.

فما هو مقدار المبلغ السنوي الواجب إيداعه سنوياً في هذا الحساب بحيث يصبح كافي ليتم الحصول على الدفعات السنوية (25000)، وما هو مقدار الفائدة المكتسبة خلال 45 سنة.

الحل:

يمكن توضيح ما سبق بالشكل الآتي:



أي أنّ هذا الشخص سيقدم لشركة التأمين دفعات سنوية منتظمة لمدة 25 سنة (اللون الاخضر)، على أن يبدأ بعدها باستلام دفعات دورية منتظمة بقيمة 25000 دولار ولمدة 20 سنة (اللون الأحمر).

لحساب مقدار المبلغ المتوجب إيداعه، بداية يجب إيجاد قيمة مجموع القيم الحالية لمجموع الدفعات السنوية التي سيتحصل عليها لمدة 20 سنة باستخدام الصيغة:

$$PV = PMT\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$PMT = 25000, \quad m = 1, \quad i = \frac{0.065}{1} = 0.065, \quad \mathrm{n} = \mathrm{m} * \mathrm{t} = 1 * 20 = 20$$

$$PV = 25000\,\frac{1-(1+0.065)^{-20}}{0.065} = 275462.68$$

في هذه المرحلة تمّ إيجاد المجموع التراكمي الذي سيتوفر في الحساب وهو 275462.68 دولار . هذا المبلغ سيمكّن هذا الشخص من الحصول على دفعة سنوية مقدارها 25000 دولار لمدة 20 سنة.

ولإيجاد مقدار الدفعة المتوجب إيداعها في هذا الحساب لمدة 25 سنة لكي يكون المجموع التراكمي أو المبلغ المستقبلي هو 275462.68 سيتم تطبيق الصيغة التي تم التعرف عليها في المحاضرة السابقة والمتمثلة بالمبلغ المستقبلي لمجموع دفعات دورية:

$$FV = PMT\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

والمطلوب هنا هو إيجاد مقدار PMT:

$$FV = 275462.68, \qquad m = 1, \qquad i = \frac{0.065}{1} = 0.065,$$
$$\mathrm{n} = \mathrm{m} * \mathrm{t} = 1 * 25 = 25$$

بالتعويض:

$$275462.68 = PMT\,\frac{(1+0.065)^{25} - 1}{0.065}$$

$$PMT = 275462.68\,\frac{0.065}{(1+0.065)^{25}-1} = 4677.76$$

أي لكي يتكون في الحساب مبلغ مقداره 275462.68 بعد 25 سنة يجب إيداع دفعات دورية منتظمة سنوية مقدارها 4677.76.

وبعبارة أخرى إنّ إيداع مبلغ سنوي مقداره 4677.67 في حساب يدفع فائدة مركبة 6.5% لمدة 25 سنة، سيوفر لمدة 20 سنة دفعات دورية منتظمة مقدارها 25000 سنة.

لحساب الفائدة الإجمالية المتحصلة سيتم طرح إجمالي ما تمّ دفعه لمدة 25 سنة (إجمالي الودائع *total seposits*) من إجمالي ما تمّ الحصول عليه لمدة 20 سنة (إجمالي السحوبات *total withdrawals*):

$$interest = total\ withdrawals - total\ deposits$$
$$= 20(25000) - 25(4677.76)$$
$$= 383056$$

حالة تطبيقية 2: صناديق التقاعد

إذا تمّ إيداع 2000 دولار بشكل سنوي لمدة 25 سنة في حساب يدفع فائدة مركبة سنوية بمعدل 6.5%، ما هو مقدار السحوبات السنوية التي سيتم الحصول عليها في 20 السنة التالية؟

الحل:

بداية سيتم حساب المبلغ المستقبلي لمجموع الدفعات الدورية في 25 سنة الاولى:

$$FV = PMT\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$PMT = 2000, \qquad m = 1, \qquad i = \frac{0.065}{1} = 0.065,$$
$$\mathrm{n = m * t = 1 * 25 = 25}$$

بالتعويض:

$$FV = 2000\frac{(1+0.065)^{25} - 1}{0.065} = 117775.3572$$

هذا المبلغ يعبر عن المبلغ المستقبلي (*future value*) لمجموع الدفعات التي يتم إيداعها سنوياً لمدة 25 سنة، وهو في نفس الوقت يعبر أيضاً عن القيمة الحالية للدفعات او السحوبات التي سيتم الحصول عليها في 20 سنة التالية.

بالتالي لحساب مقدار السحوبات السنوية سيتم تطبيق صيغة القيمة الحالية (*present value*) لدفعات دورية منتظمة، أو بمعنى آخر سيتم حساب مقدار الدفعة (السحب *withdrawl*) السنوية التي سيتم الحصول عليها سنوياً بحيث تكون القيمة الحالية لهذه السحوبات 117775.3572.

سيتم تطبيق الصيغة الآتية:

$$PV = PMT\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$PV = 117775.3572, \qquad m = 1, \qquad i = \frac{0.065}{1} = 0.065,$$
$$\mathrm{n = m * t = 1 * 20 = 20}$$

$$117775.3572 = PMT\,\frac{1-(1+0.065)^{-20}}{0.065}$$

$$PMT = 117775.3572\,\frac{0.065}{1-(1+0.065)^{-20}} = 10688.87$$

ولحساب مقدار إجمالي الفائدة المتحصلة:

سيتم طرح إجمالي ما تمّ دفعه لمدة 25 سنة (إجمالي الودائع *total seposits*) من إجمالي ما تمّ الحصول عليه لمدة 20 سنة (إجمالي السحوبات *total withdrawals*):

$$interest = total\ withdrawals - total\ deposits$$
$$= 20(10688.87) - 25(2000)$$
$$= 1637774$$

حالة تطبيقية 3: الشراء بالتقسيط:

إذا قام شخص بشراء جهاز حاسوب من شركة لتصنيع الحواسيب بسعر 2500 دولار، حيث تمّ القبول بدفع ثمن الحاسوب بالتقسيط على 48 دفعة شهرية وبمعدل فائدة سنوية تقدر بـ*15* % د، فكم تقدر الدفعة الشهرية؟ وكم تقدر الفائدة التي سيدفعها هذا الشخص؟

الحل:

بما إنّ هذا الشخص قرر شراء الحاسوب بالتقسيط فإنّه من المقرر أن يدفع للشركة المصنعة دفعات شهرية مستقبلية بحيث تكون القيمة الحالية لها 2500 دولار وذلك بمعدل فائدة سنوية 15% أي بمعدل فائدة شهرية $i = \frac{0.15}{12} = 0.0125$. بالتالي لحساب مقدار الدفعة يمكن استخدام الصيغة:

$$PV = PMT\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$PV = 2500, \qquad m = 12, \qquad i = \frac{0.15}{12} = 0.0125, \qquad \mathrm{n = 48}$$

$$2500 = PMT\,\frac{1-(1+0.0125)^{-48}}{0.0125}$$

$$PMT = 2500\,\frac{0.0125}{1-(1+0.0125)^{-48}} = 69.58$$

أي توجب عليه دفع 69.58 دولار ولمدة 48 شهر.

بالتالي يكون مجموع ما دفعه خلاله 4 شهر هو $69.58 * 48 = 3339.84$، وهذا يعني ان الفائدة التي قام بدفعها زيادة عن ثمن الحاسوب 2500 هي:

$$interest = 3339.84 - 2500 = 839.84$$

حالة تطبيقية 4: أقساط التأمين

شركة للتأمين قدّمت عرض بتقديم 10 دفعات سنوية مع معدل ضمان 6.65% وفقاً للفائدة المركبة السنوية، فكم يجب أن تكون قيمة الدفعة السنوية من أجل استلام دفعات مستقبلية سنوية بقيمة 5000 دولار خلال 10 سنوات التالية؟

الحل:

بداية يجب إيجاد مجموع القيمة الحالية لدفعات 5000 دولار التي سيتم استقبالها لمدة عشرة سنوات مستقبلية، ذلك باستخدام الصيغة:

$$PV = PMT\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$PMT = 5000,\ \ m = 1,\ \ i = \frac{0.0665}{1} = 0.0665,\ \ \ \mathrm{n = m * t = 1 * 10 = 10}$$

$$PV = 5000\,\frac{1-(1+0.0665)^{-10}}{0.0665} = 35693.18$$

إنّ المقدار 35693.18 يمثل مجموع القيمة الحالية للدفعات المستلمة في 10 سنوات القادمة، وهي في نفس الوقت تشكل المبلغ المستقبلي للدفعات التي سيتم تقديمها في 10 سنوات الأولى.

ولحساب مقدار الدفعة السنوية سيتم استخدام الصيغة الآتية:

$$FV = PMT\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

والمطلوب هنا هو إيحاد مقدار PMT:

$$FV = 35693.18,\qquad m = 1,\qquad i = \frac{0.0665}{1} = 0.0665,$$
$$\mathrm{n = m * t = 1 * 10 = 10}$$

بالتعويض:

$$35693.18 = PMT\,\frac{(1+0.0665)^{10} - 1}{0.065}$$

$$PMT = 35693.18\,\frac{0.0665}{(1+0.0665)^{10}-1} = 2567.16$$