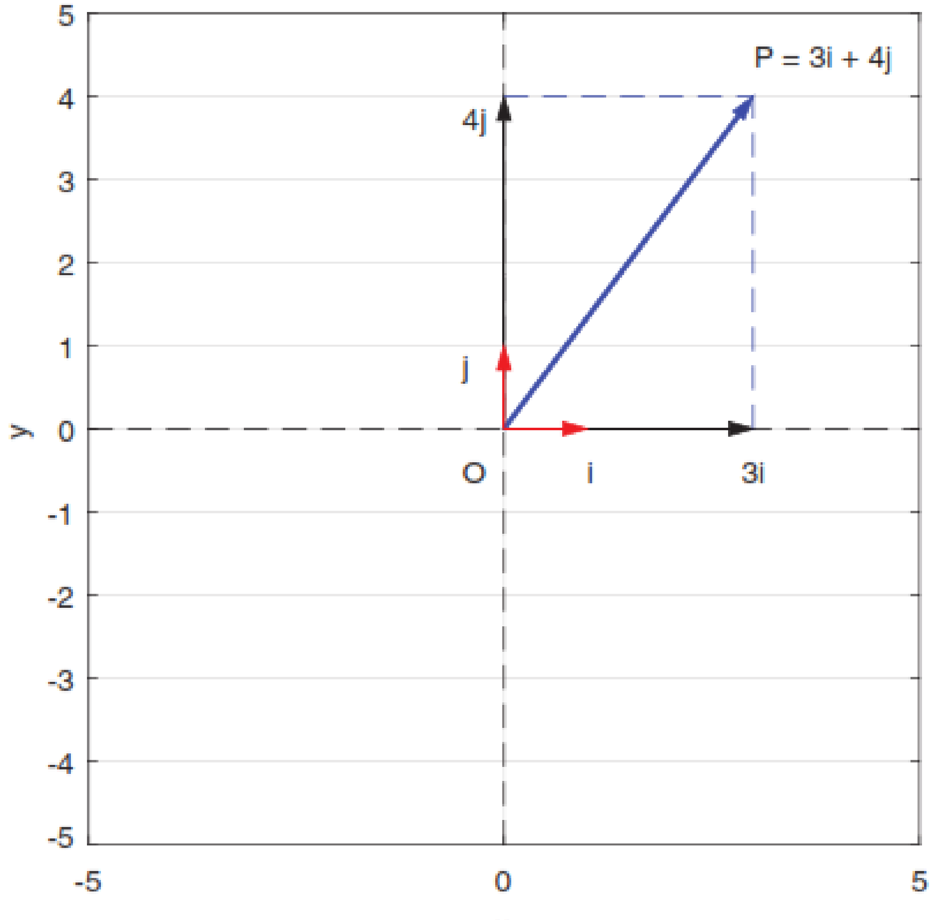
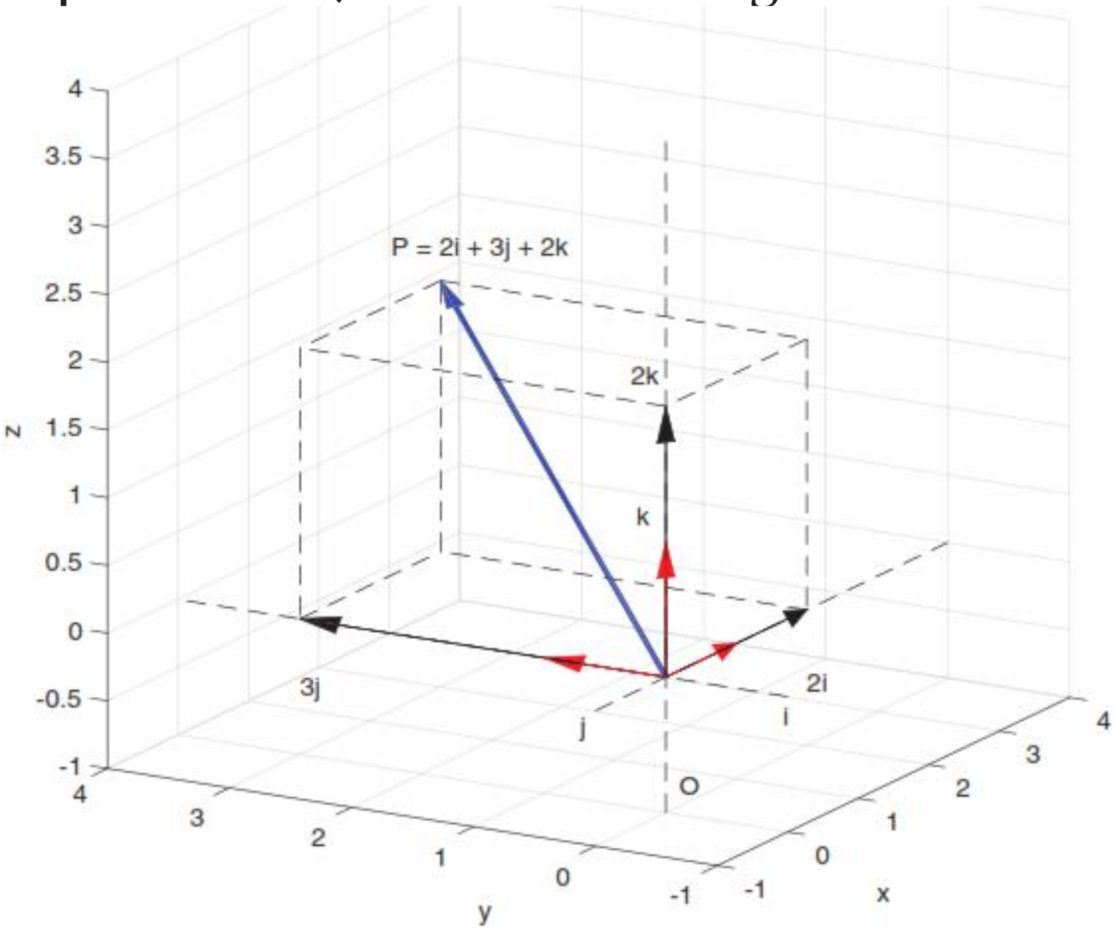
Graphic Representation of Vectors

Vectors can be represented in terms of some chosen reference components. In practice reference vectors are chosen to be orthogonal (perpendicular) and of unit length.

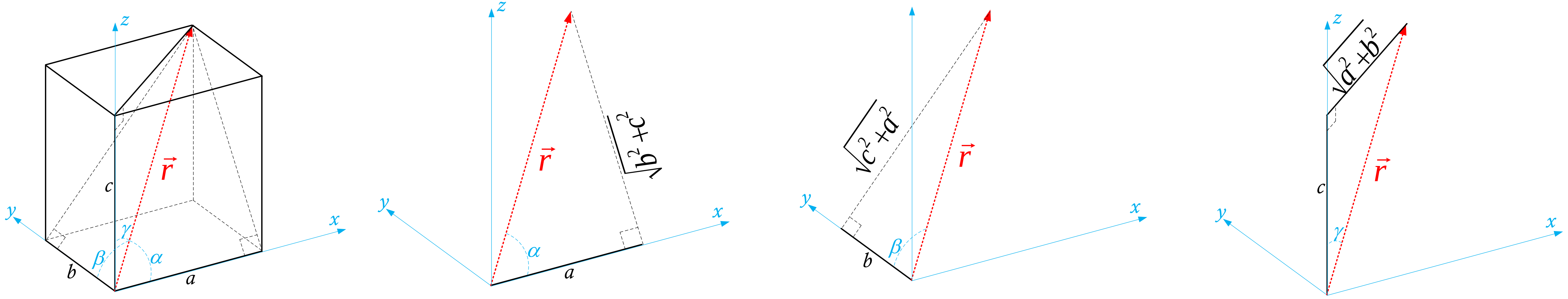




Standard notation for the unit vectors are $\hat{\imath}$ along *X*-axis, $\hat{\jmath}$ along *Y*-axis, & $\hat{k}$ along the *Z*-axis.

DIRECTION COSINES - - كوسainات التوجيه

Let $\alpha, \beta, \& \, \gamma$ be the angles made by a vector $\vec{r} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$, with the three primary axes. The cosines of these three angles $\cos\alpha, \cos\beta, \& \, \cos\gamma$ are known as direction cosines

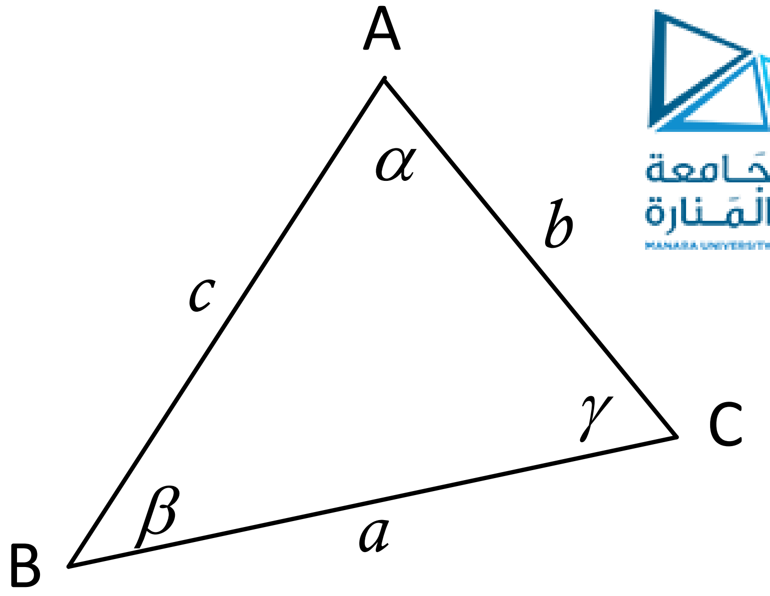


$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

It follows from the above that: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Example: Sketch the vector $\vec{r} = 5\hat{\imath} + \sqrt{3}\hat{\jmath} + \sqrt{8}\,\hat{k}$, and find its length, the direction cosines and the angles it makes with coordinate axes.

Cosine Formula in the Triangle



Given a tringle with vertices (singular, vertex): A, B and C.

With α, β and γ as the corresponding angles.

And a, b and c , as the corresponding sides. From the figure.

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, then $(\overrightarrow{BC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$, which gives the general cosine formula

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

Ex. Write the two other similar formula.

Sine Formula in the Triangle

$$\text{AREA} = \left|\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right| = \left|\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right|$$

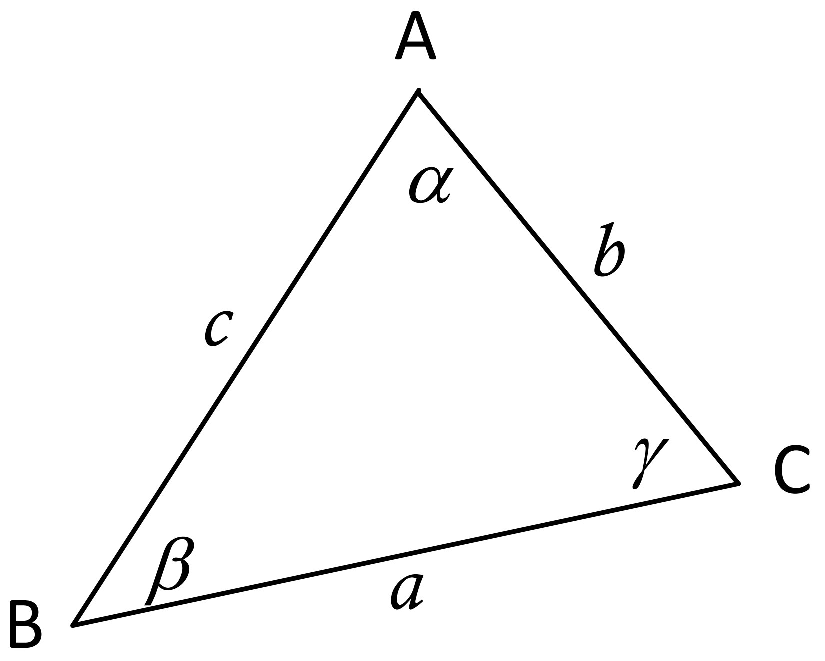
Then: $\tfrac{1}{2}cb\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta = \tfrac{1}{2}ba\sin\gamma$

Multiply by 2 and divide by abc, to get

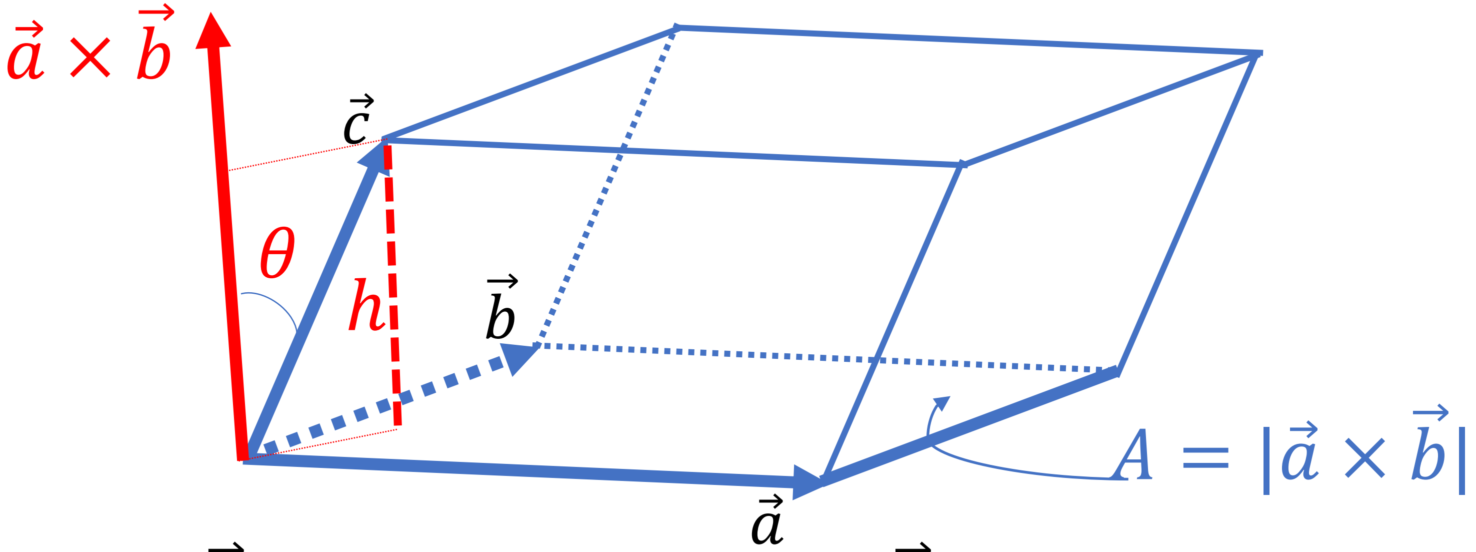
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Inverting the fractions to get

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



لتكن الأ شعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ، من الفضاء ثلاثي الأبعاد ولنفرض أنها غير واقعة في مستوٍ واحد.
نرسم متوازي سطوح أحرفه موازية لهذه الأشعة:

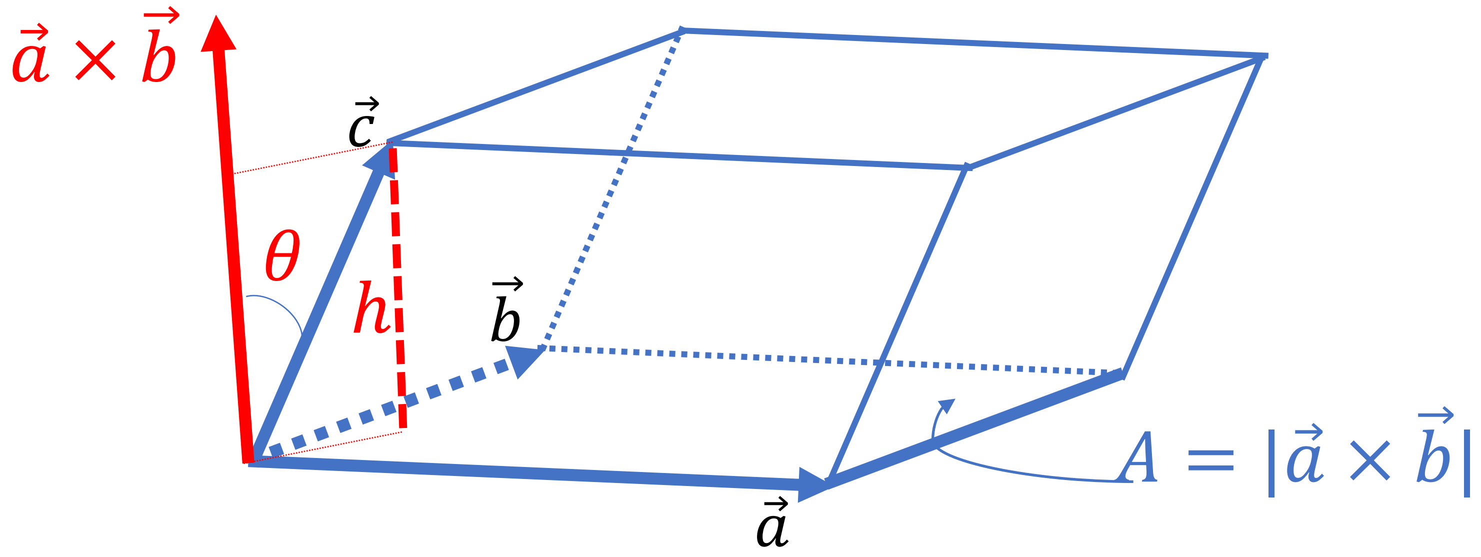


A : مساحة متوازي الأضلاع المرسوم بالشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تساوي قياس الجداء الشعاعي: $\vec{a} \times \vec{b}$.

V : حجم متوازي السطوح المرسوم بالأ شعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ، يساوي جداء ارتفاعه h بمساحة قاعدته A. أي: $V = hA$.

h : ارتفاع متوازي السطوح المرسوم بالأ شعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ، يساوي الجداء السلمي: $h = \vec{c} \cdot \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$.

وبالتالي فإن حجم متوازي السطوح المرسوم بالأ شعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ، هو: $V = hA = \vec{c} \cdot \left(\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} \left(|\vec{a} \times \vec{b}|\right) \right)$

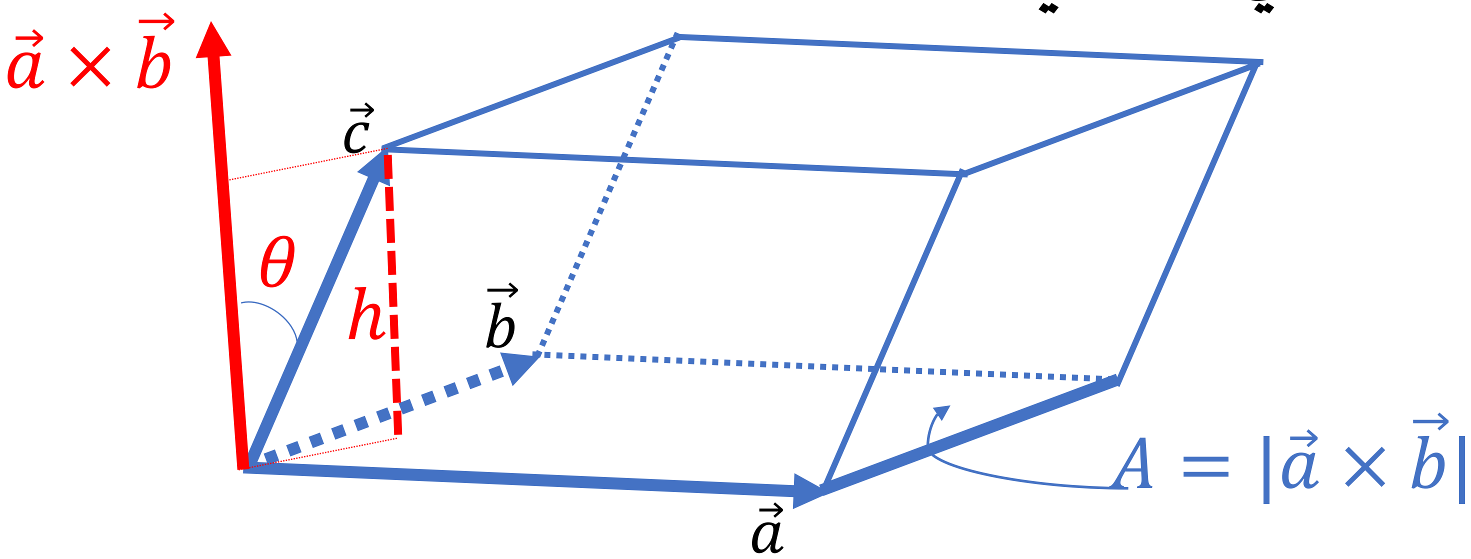


وبالتالي فإن حجم متوازي السطوح المرسوم بالأشعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ، هو: $V = hA = \vec{c} \cdot \left(\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\right)\left(|\vec{a} \times \vec{b}|\right)$

النتيجة: إن حجم متوازي السطوح المرسوم بالأشعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ، هو: $V = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

تعريف: يُسمى الجداء الثلاثي: $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ ، بالجداء الثلاثي السلمي المختلط للأشعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$.

بعض خواص الجداء الثلاثي السلمي المختلط للأشعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$.



$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =$$

$$-\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$$

العبارة التحليلية للجداء الثلاثي السلمي المختلط للأشعة: $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$.

وجدنا سابقاً العبارة التحليلية للجداء الشعاعي: $\vec{a} \times \vec{b}$ ، على الشكل التالي:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{\imath}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) + \hat{\jmath}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

كما وجدنا سابقاً العبارة التحليلية للجداء السلمي: $\vec{u} \times \vec{v}$ ، على الشكل التالي:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

فتكون العبارة التحليلية للجداء الثلاثي السلمي المختلط للأشعة: $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$.

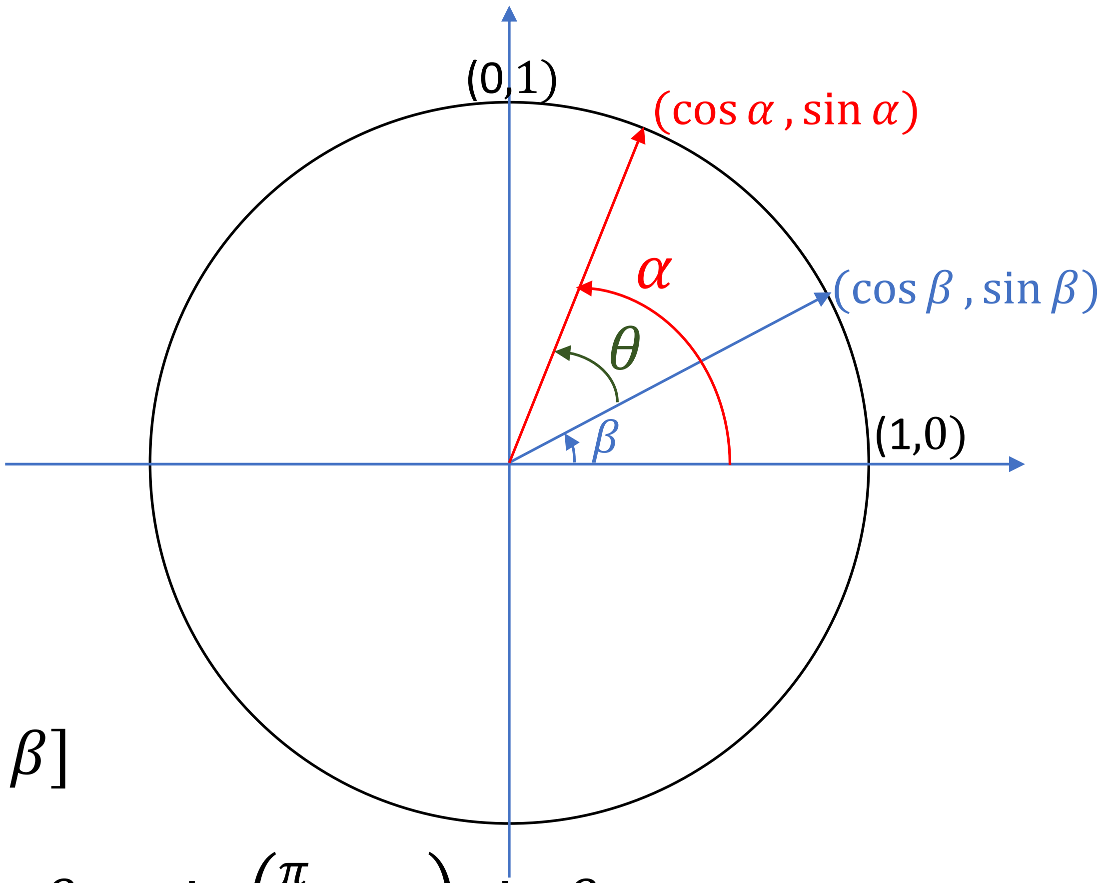
$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = c_x\left(a_y b_z - a_z b_y\right) + c_y(a_z b_x - a_x b_z) + c_z\,(a_x b_y - a_y b_x)$$

كما يمكن كتابة هذه العبارة التحليلية للجداء الثلاثي السلمي المختلط للأشعة: $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$. بالمحدد:

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Review of Trigonometry

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = (1)(1)\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y$$



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)] = \cos[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta]$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$