Finite Elements Method

مقدمة

التقدم التكنولوجي في الوقت الحالي يدفع بالمهندسين لتنفيذ مشاريع معقدة ومكلفة وتخضع لقيود صارمة بخصوص الأمان كمشاريع غزو الفضاء وتصميم الطائرات والهندسة النووية وغيرها، حيث إنّ أي خطأ في قرارات المهندس في أي مرحلة من مراحل التصميم لهذه المشاريع قد يودي بحياة الأشخاص، يحتاج المهندس من أجل التحكم بهذه المشاريع وكذلك ببعض المشاريع المرتبطة بالبيئة مثل ضبط التلوث بأنواعه الحراري والسمعي والكيميائي، وموضوع التنبؤ الجوي...الخ. إلى محاكاة سلوك الأنظمة الفيزيائية المعقدة وبالتالي القدرة على اتخاذ القرار المناسب انطلاقاً من مرحلة التصميم.

تسمح العلوم الهندسية المتعلقة بميكانيك الأجسام الصلبة والموائع والميكانيك الحراري وغيرها بوصف سلوك الأنظمة الفيزيائية عن طريق المعادلات التفاضلية. لحل هذه المعادلات توجد عدة طرائق رقمية من بينها:

1- Boundary elements method
2- Difference elements method
3- Finite elements method

تعتبر طريقة العناصر المنتهية Finite elements method من أكثر الطرائق الرقمية استخداماً لحل المعادلات التفاضلية، تتميز بعموميتها حيث يمكن تطبيقها على معظم المسائل المستقرة وغير المستقرة، الخطية وغير الخطية، وتطبق على أي شكل هندسي 1D ,2D,3D مهما بلغ تعقيده.

تهدف طريقة العناصر المنتهية إلى استخدام ***<u>تقريب</u>*** بسيط للمتحولات (البارامترات) حتى يتم تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلات جبرية، ويُفترض بمستخدمي هذه الطريقة الإلمام بالمجالات العلمية التالية:

1- العلوم الهندسية لوصف القوانين الفيزيائية
2- المعادلات التفاضلية
3- التقريب الرقمي لتشكيل المعادلات الجبرية وحلها بواسطة الأدوات البرمجية.

لمحة عن تطور طريقة العناصر المنتهية:

وضع الأساس لطريقة العناصر المنتهية في عام 1956 من قبل Turner, Clough, Martin &Topp

واعتباراً من العام 1960 عرفت طريقة العناصر المنتهية تطوراً سريعاً في عدة اتجاهات من حيث الصياغة الرياضية وإدخال مفهوم التابع الضعيف، بالإضافة إلى ابتكار عناصر منتهية منحنية وذات دقة عالية، واعتباراً من عام 1967 نشرت كتب عديدة تشرح هذه الطريقة من أشهرها:

Zienkiewicz (The Finite Elements Method : the Basis (vol1),2000)

Zienkiewicz (The Finite Elements Method: solid Mechanics(vol2)

Zienkiewicz (The Finite Elements Method :Fluid Mechanics (vol3)

لاقت طريقة العناصر المنتهية في الوقت الحالي انتشاراً واسعاً في الصناعات المتقدمة، وأصبحت الشركات الكبرى تعتمد على برامج معدة خصيصاً للاستثمار الصناعي مبنية على أساس العناصر المنتهية من أشهر هذه البرامج:

IDEAS- SAMCEF- NASTRAN- ABAQUS- FIDAP-MARC-ANSYS-ADINA-LSDYNA-ASTER-CASTEM -CATIA

حتى يكون استخدام طريقة العناصر المنتهية فعالاً في هذه البرامج لا بد من استخدام برامج إعداد لبيانات الإدخال ومعالجة النتائج. في الوقت الحالي، غالباً ما تكون هذه الخطوات مدمجة في البرنامج نفسه مثل: *IDEAS -CATIA*

خطوات للنمذجة الرقمية:

بغض النظر عن الطريقة الرقمية المستخدمة توجد أربع خطوات للنمذجة الرقمية:

1- الموديل الفيزيائي: يقصد به وصف النظام الفيزيائي المدروس بلغة المهندس وتحديد المشكلة المطلوب معالجتها.
2- الموديل الرياضي: يعد الترجمة الرياضية للموديل الفيزيائي عن طريق المعادلات التفاضلية الناظمة له.
3- الموديل الرقمي: يمثل كتابة المعادلة التفاضلية للموديل الرياضي على شكل جملة معادلات جبرية باستخدام إحدى الطرائق الرقمية: BEM-FEM- DEM

4- الموديل البرمجي: وهو كتابة البرنامج الذي يحل جملة المعادلات الجبرية التي يعطيها الموديل الرقمي باستخدام الحاسوب.

تتولد العديد من الأخطاء سواء في الموديل الفيزيائي المفروض بحد ذاته أو عند الانتقال من موديل إلى آخر، نذكر من بين هذه الأخطاء الأنواع الثلاث الآتية:

خطأ في اختيار الموديل الرياضي: وهو يمثل الفرق بين الحل الدقيق للموديل الرياضي والسلوك الحقيقي للنظام الفيزيائي.

خطأ في التقريب: ويمثل الفرق بين الحل الدقيق للمعادلة التفاضلية والحل الدقيق للموديل الرقمي.

خطأ متعلق بإمكانية الحواسيب: يُعزى إلى الدقة المحدودة للحسابات المنجزة بواسطة الحاسوب وإلى أخطاء في البرمجة.

يكمن فن النمذجة الرقمية في فهم هذه الأخطاء، والتأكد من أن الحل المعطى لا يختلف عن سلوك النظام الفيزيائي المدروس.

باعتبار أن النمذجة الرقمية باستخدام العناصر المنتهية تعتمد على مبدأ التوابع التقريبية فلا بد من التذكير بطريقة صياغة هذه التوابع والتمهيد لمفهوم التقريب العقدي.

مفهوم التابع التقريبي

تتضمن الأنظمة الفيزيائية بشكل عام عدة بارامترات مثل السرعة ودرجة الحرارة والأبعاد ... وهذه البارامترات قد تعتمد على عددٍغير منتهٍ من البارامترات غير المعروفة، لذلك غالباً ما يتم الاستعاضة عنها بتوابع تقريبية تعتمد على عددٍ منتهٍ من البارامترات بحيث أن الفرق الذي يمثل خطأ التقريب يكون أصغر ما يمكن.

الهدف من التوابع التقريبية:

- إيجاد الحل التقريبي لمعادلة تفاضلية.
- إيجاد القيمة التقريبية في كل نقطة من تابع صعب التقييم أو قيمه معروفة في بضع نقاط فقط.

يوجد عدة طرائق للتقريب نذكر منها:

1- التقريب متعدد الحدود Polynomial approximation

2- التقريب العقدي Nodal approximation

التقريب متعدد الحدود

حتى يتم تشكيل تابع تقريبي يتم اختيار مجموعة منتهية من التوابع $u(x,a_1,a_2,...,a_n)$ تتبع لعدد من البارامترات وليكن n نسميها البارامترات العامة للتقريب $a_i, i=1,...n$, ويتم اختيارها بجعل الحل التقريبي $u(x,a_1,a_2,...,a_n)$ ينطبق على الحل الدقيق في n نقطة $x_1,x_2,...,x_n$ وهي لا تحمل أي معنى فيزيائي. لتجنب تعقيد الحل غالباً ما نجعل تابع التقريب يتبع خطياً للبارامترات العامة للتقريب:

$$u(x)=P_1(x)a_1+P_2(x)a_2+P_3(x)a_3+...+P_n(x)a_n$$

$P_1(x),P_2(x),...,P_n(x)$ توابع الأساس للتقريب

تطبيق 1: إيجاد الحل التقريبي لمعادلة تفاضلية

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية: $0\le x\le 1$ $\quad \dfrac{d^2u_{ex}(x)}{dx^2}=\dfrac{11-12x}{8}$

الشروط الحدية: $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow u_{ex}=0$

المطلوب إيجاد التابع التقريبي $u(x)\approx u_{ex}(x)$ الذي يحقق نفس الشروط الحدية

الحل:

نختار التابع التقريبي: $u(x)=a_1\sin(\pi x)+a_2\sin(2\pi x)$

$$\left.\begin{aligned} x_1=0.25 \Rightarrow \left.\frac{d^2u_{ex}}{dx^2}\right|_{x_1} &= -a_1\pi^2\sin(0,25\pi)-4\pi^2a_2\sin(0.5\pi)=\frac{11-12x_1}{8}=1 \\ x_2=0.75 \Rightarrow \left.\frac{d^2u_{ex}}{dx^2}\right|_{x_2} &= -a_1\pi^2\sin(0,75\pi)-4\pi^2a_2\sin(1.5\pi)=\frac{11-12x_2}{8}=0.25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$a_1=-\frac{5}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\pi^2} \quad , \quad a_2=-\frac{3}{32}\frac{1}{\pi^2}$$

$$u(x)=-\frac{5}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)-\frac{3}{32}\frac{1}{\pi^2}\sin(2\pi x)$$

توابع الأساس للتقريب هي $P_1(x)=\sin(\pi x)$ و $P_2(x)=\sin(2\pi x)$

بارامترات التقريب هي: $a_1=-\frac{5}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\pi^2}$, $a_2=-\frac{3}{32}\frac{1}{\pi^2}$

الحل الدقيق للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2u_{ex}(x)}{dx^2}=\frac{11-12x}{8} \quad 0\le x\le 1$$

التكامل للمرة الأولى:

$$\frac{du_{ex}(x)}{dx}=\frac{1}{8}\left(11x-6x^2\right)+C_1$$

التكامل للمرة الثانية: $u_{ex}(x)=11\frac{x^2}{16}-\frac{1}{4}x^3+C_1x+C_2$

حساب C_1 و C_2 باستخدام الشروط الحدية:

$$x=0\Rightarrow u_{ex}=0\Rightarrow C_2=0$$

$$x=1\Rightarrow u_{ex}=0\Rightarrow 0=\frac{11}{16}-\frac{1}{4}+C_1\Rightarrow C_1=-\frac{7}{16}$$

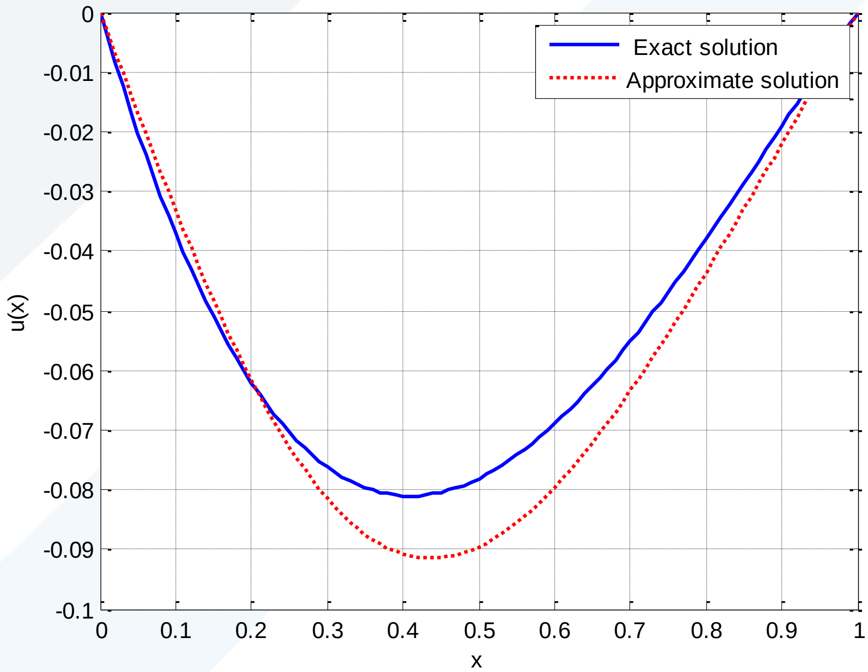
وبالتالي يكون حل المعادلة التفاضلية:

$$u_{ex}(x)=11\frac{x^2}{16}-\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{16}x$$

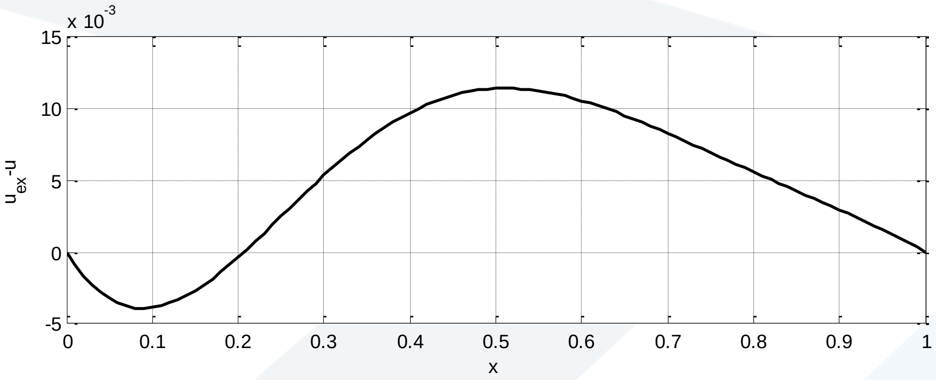
يمكن مقارنة قيم التابع التقريبي مع قيم التابع الحقيقي باستخدام MATLAB وفق البرنامج التالي:

```
close all
x= 0:0.01:1;
u_ex=((11/16).*(x.^2))-(0.25*(x.^3))-(7/16).*x;

figure(1)
hand1 = plot(x,u_ex,'b')
a1 = -5/(sqrt(2)*4*(pi^2));
a2 = -3/(32*(pi^2));
u=a1.*sin(pi.*x)+a2.*sin(2*pi.*x);
hold on
hand2 = plot(x,u,':r')
xlabel('x')
ylabel('u(x)')
```

```
legend(' Exact solution','Approximate solution ')
set(gcf,'color','w');
grid
set(hand1, 'LineWidth', 2);
set(hand2, 'LineWidth', 2);

figure(2)
hand3 = plot(x,u_ex-u,'k')
xlabel('x')
ylabel('u_{ex}-u')
set(gcf,'color','w');
grid
set(hand3, 'LineWidth', 2);
```



الشكل 1: مقارنة التابع التقريبي مع الحل الدقيق



الشكل 2: خطأ تابع التقريب

تطبيق 2: إيجاد التابع التقريبي لبارامتر فيزيائي (تقييم تابع قيمه معطاة في عدة نقاط فقط)

بفرض أن درجة الحرارة لا يمكن قياسها إلا في النقاط الثلاث التالية:

X	u(x)
0	$20^{\circ}C$
0.5	$25^{\circ}C$
1	$22^{\circ}C$

كيف يتم تقييم درجة الحرارة في نقاط أخرى غير المعطاة؟

الحل: نختار تابع تقريبي متعدد الحدود على الشكل:

$$u_{ex}(x) \approx u(x, a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

$$\left.\begin{aligned} u_{ex}(x=0) &= u(x=0) = a_1 = 20 \\ u_{ex}(x=0.5) &= u(x=0.5) = a_1 + 0.5\, a_2 + 0{,}25\, a_3 = 25 \\ u_{ex}(x=1) &= u(x=1) = a_1 + a_2 + a_3 = 22 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1 = 20,\ a_2 = 18,\ a_3 = -16$$

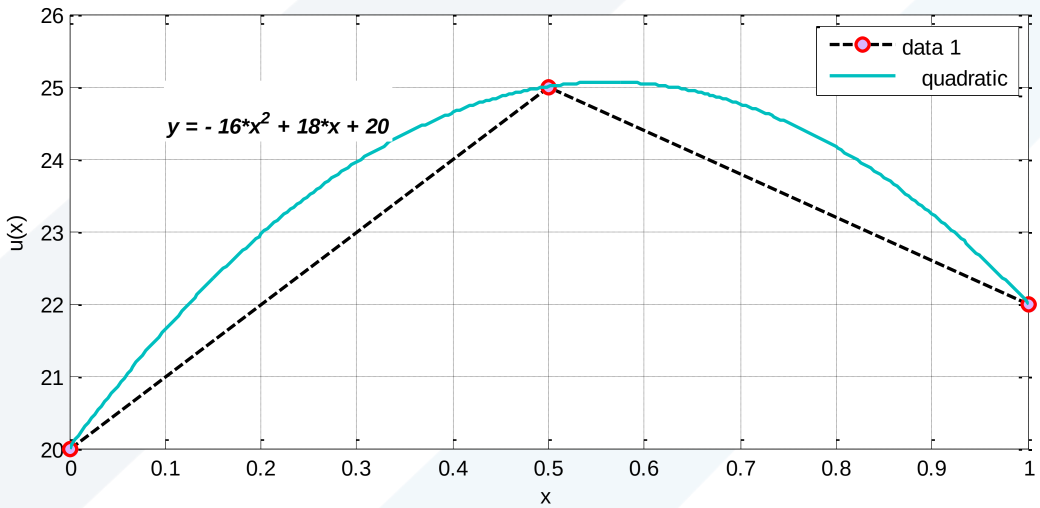
فيكون الشكل العام للتابع التقريبي:

$$u_{ex}(x) \approx u(x, a_1, a_2, a_3) = 20 + 18x - 16x^2$$

يمكن الاستفادة من إمكانيات MATLABللحصول على المعادلة التقريبية باستخدام تعليمة

Basic Fitting

```
x=[0 0.5 1];
u=[20 25 22];
figure
FIG=plot(x,u,'r:o')
xlabel('x')
ylabel('u(x)')
set(gcf,'color','w');
set(FIG, 'LineWidth', 3);
grid
```



الشكل 3: التابع التقريبي لدرجة الحرارة

في هذا المثال كما في المثال السابق نجد أن التابع التقريبي

يكتب على الشكل التالي: $u(x) = P_1(x)\, a_1 + P_2(x)\, a_2 + P_3(x)\, a_3 + \ldots + P_n(x)\, a_n$

$$u(x) = \langle P_1(x)\ P_2(x)\ \ldots\ P_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \langle P \rangle \{a\}$$

حيث إنّ:

$P_1, P_2, \ldots P_n$: توابع معروفة مستقلة خطياً مثل متعدد حدود كما هو الحال في هذا التطبيق أو توابع مثلثية في التطبيق السابق، بحيث لا يمكن تشكيل أي تابع من هذه التوابع عن طريق التركيب الخطي للتوابع الأخرى، وهذه التوابع مستقلة عن قيم a_i.

$a_1,a_2,..,a_n$: هي بارامترات التقريب التي لم يكن لها أي معنى فيزيائي في التطبيقين السابقين.

التقريب العقدي Nodal approximation

في التقريب العقدي يتم اختيار بارامترات التقريب $a_1,a_2,..,a_n$ كقيم للتابع التقريبي في n نقطة نسميها عقد، إحداثياتها $x_1,x_2,..,x_n$

$$\begin{aligned} a_1 &= u(x_1) = u_1 \\ a_2 &= u(x_2) = u_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= u(x_n) = u_n \end{aligned}$$

عندئذٍ يكتب التابع التقريبي على الشكل التالي:

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + \ldots + N_n(x)u_n$$

$$u(x) = \langle N_1(x) + N_2(x)u_2 + \ldots + N_n(x)\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{Bmatrix} = \langle N \rangle \{u_n\}$$

نسمي هذا النوع من التقريب بالتقريب العقدي.

التوابع هي: توابع الاستيفاء أو توابع الشكل

البارامترات u_i هي: البارمترات العقدية أو المتحولات العقدية للتقريب

يتميز التقريب العقدي بالخاصية الأساسية التالية باعتبار أن: $u(x_i) = u_i$

فإن توابع الاستيفاء N_i تحقق العلاقة التالية: $N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \\ 1 & \text{if} \quad \mathrm{i} = \mathrm{j} \end{cases}$

يعطى خطأ التقريب بالعلاقة التالية: $e(x) = u(x) - u_{ex}(x)$

ينعدم هذا الخطأ في كل العقد: $u(x_i) = u_{ex}(x_i)$

$$e(x_i) = 0$$

تطبيق 3: نعتبر أنه لدينا تابع $u_{ex}(x)$ لا على التعيين قيمه معطاة فقط في أربع نقاط

x_1	x_2	x_3	x_4
1	2	5	7
20	25	20	19

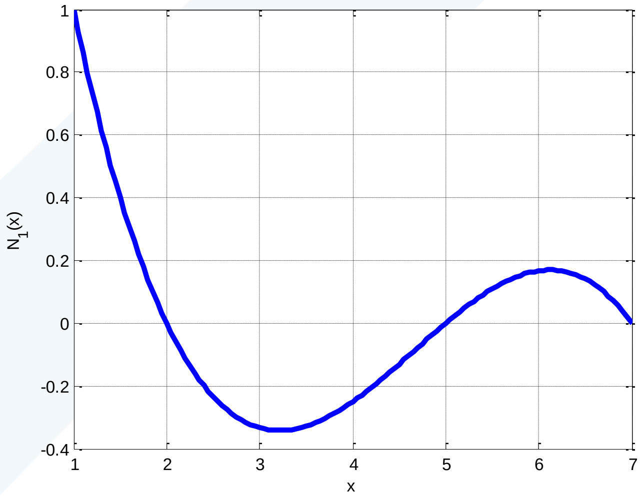
ونقوم بتقريبه بواسطة التابع: $u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + N_3(x)u_3 + N_4(x)u_4$

حيث أن N_i تعطى بالعلاقة التالية: $N_i = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{4} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$

هذا التقريب عقدي لأن توابع الاستيفاء تحقق العلاقة $N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad i \neq j \\ 1 & \text{if} \quad i = j \end{cases}$

على سبيل المثال: $N_1 = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} \frac{(x - x_3)}{(x_1 - x_3)} \frac{(x - x_4)}{(x_1 - x_4)}$

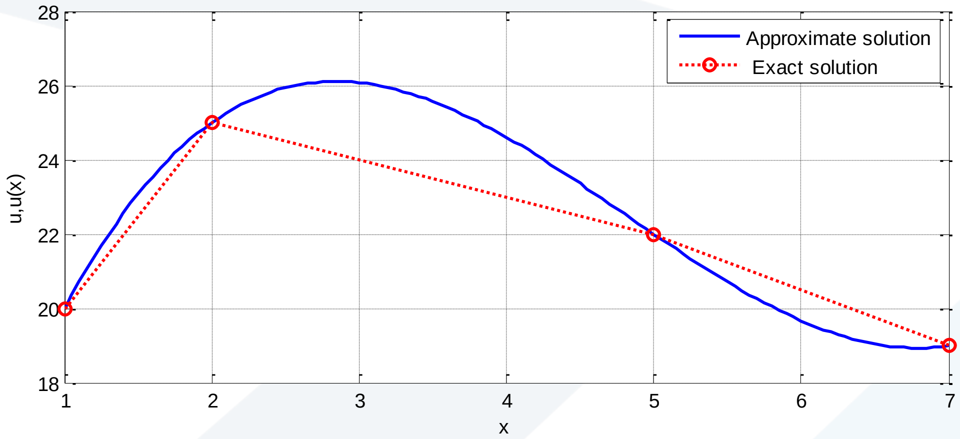
الشكل التالي يمثل تابع الأساس للتقريب N_1



الشكل 4: تابع الأساس للتقريب N_1

الشكل التالي يمثل الحل التقريبي $u(x)$ والحل الدقيق u_{ex} (قيم النقاط الأربعة المعطاة)

والخطأ الذي يجب أن ينعدم عند التي تمثل الحل الدقيق.



الشكل 5: التابع التقريبي وخطأ التقريب

```
clear all
clc
close all
x=[1 2 5 7];
xe=1:0.05:7;
uex=[20 25 22 19];
N1=zeros(size(xe,2),1);
N2=N1;
N3=N1;
N4=N1;
u=N1;

for i=1:size(xe,2)
N1(i)=((xe(i)-x(2))*(xe(i)-x(3)).*(xe(i)-
x(4)))./((x(1)-x(2)).*(x(1)-x(3)).*(x(1)-x(4)));
N2(i)=((xe(i)-x(1))*(xe(i)-x(3))*(xe(i)-
x(4)))/((x(2)-x(1)).*(x(2)-x(3)).*(x(2)-x(4)));
N3(i)=((xe(i)-x(1)).*(xe(i)-x(2)).*(xe(i)-
x(4)))./((x(3)-x(1))*(x(3)-x(2))*(x(3)-x(4)));
N4(i)=((xe(i)-x(1)).*(xe(i)-x(2)).*(xe(i)-
x(3)))./((x(4)-x(1))*(x(4)-x(2))*(x(4)-x(3)));
u(i)=(uex(1).*N1(i))+(uex(2).*N2(i))+(uex(3).*N3(i))+
(uex(4).*N4(i));
end

figure
FIG3=plot(xe,u,x,uex,'r:o')
xlabel('x')
ylabel('u,u(x)')
```

```
set(gcf,'color','w');
grid
set(FIG3, 'LineWidth', 2);
legend('Approximate solution ',' Exact solution')
figure
FIG4 = plot(xe,N1)
xlabel('x')
ylabel('N_1(x)')
set(gcf,'color','w');
grid
set(FIG4,'LineWidth', 3);
```