Numerical analysis

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2022-2023

Numerical analysis

Lecture 1

What is numerical analysis?

مقدمة – التحليل العددي (Numerical Analysis)

إن التطورات التقنية والعلمية التي شهدها العالم في السنوات الأخيرة في مجال الحاسوب، دفعت بالعديد من المسائل العلمية إلى حيز التطبيق في الفروع المختلفة خاصة وأن حلول هذه المسائل **يتعثر** إيجادها بالطرق التحليلية التقليدية، أو أن **حلولها معقدة** بحيث لا يمكن استخدامها في التطبيقات العملية.

على سبيل المثال ، هناك قوانين لحل المعادلات الجبرية حتى المعادلات الرابعة درجة، ولكن لا توجد مثل هذه القوانين لحل المعادلات الجبرية من درجات تزيد عن الرابعة أو حتى معادلة بسيطة مثل: $x - \sin x = 0$

ولا نستطيع إيجاد الحل الدقيق للتكامل

$$\int_a^b e^{x^2}\,dx$$

وذلك لعدم وجود تابع مشتقه e^{x^2} . وحتى إن أمكن إيجاد الحل التحليلي فقد يكون استخدامه من الناحية النظرية أكثر من الناحية العملية .

مما حفز العلماء للبحث عن **طرائق عددية** لحل مثل هذه المسائل في العلوم الفيزيائية والهندسية والاقتصادية والتجارية .

مقدمة – التحليل العددي (Numerical Analysis)

يهتم **التحليل العددي** بتطوير **طرائق الحل العددي** لـ القضايا العلمية في مختلف الفروع. وتكمن المرحلة الأولى في حل مشكلة خاصة في صياغتها في نموذج رياضي ، حيث يتم استخدام الرموز الرياضية لتمثيل المتغيرات وتطبيق الأسس الفيزيائية (الاقتصادية)، لاستنباط معادلات تصف سلوك هذه المتغيرات.
لذلك فإن الهدف العام من علم التحليل العددي هو تصميم خوارزميات (طرق) تقريبية لحل المسائل الصعبة التي يصعب حلها بالورقة والقلم.

ما هو التحليل العددي؟

التحليل العددي هو دراسة الخوارزميات لمسائل الرياضيات المستمرة. (L.N. Trefethen)

ما هي الطرق العددية (numerical methods) ولماذا يجب عليك دراستها؟

الطرق العددية هي تقنيات يتم من خلالها صياغة المسائل الرياضية بحيث يمكن حلها بالعمليات الحسابية والمنطقية. نظرًا لأن أجهزة الكمبيوتر الرقمية تتفوق في إجراء مثل هذه العمليات .

لماذا الطرق العددية مطلوبة؟

لتقريب حلول المشكلات التي لا يمكن حلها بدقة.

ما نوع التطبيقات التي يمكن أن تستفيد من الدراسات العددية؟

إن الطفرة التي حدثت في الحاسبات في نهاية القرن الماضي كان لها أكبر الأثر في استخدام هذا العلم في الكثير من **التطبيقات الهندسية والعلمية والطبية والحيوية وشتى نواحي العلوم التي نعرفها هذه الأيام.**

لذلك فالطرق العددية يجب أن تكون جزءًا من التعليم الأساسي **لكل مهندس وعالم**. مثلما يجب أن يكون لدينا جميعًا أسس متينة في المجالات الأخرى للرياضيات والعلوم.

هناك العديد من الأسباب الإضافية التي تجعلك تدرس الطرق لعددية:

١- توسع الطرق العددية بشكل كبير التي تعالج أنواع عديدة من المسائل التي تواجهك.

٢- تسمح الطرق العددية باستخدام البرامج المعلبة (Canned software) برؤية ثاقبة. إذا كنت ملمًا بالطرق العددية ولديك خبرة في برمجة الكمبيوتر ، فيمكنك تصميم برامجك الخاصة لحل المشكلات دون الحاجة إلى شراء برامج باهظة الثمن .

٣ - تعد الأساليب العددية وسيلة فعالة لتعلم استخدام أجهزة الكمبيوتر و تطبيقها لحل المشكلات المستعصية، و أيضًا التعرف على أخطاء التقريب التي تعد جزءًا لا يتجزأ من الحسابات الرقمية واسعة النطاق والتحكم فيها.

٤- توفر الطرق العددية وسيلة لتعزيز فهمك للرياضيات. نظرًا لأن الطرق العددية هي اختزال الرياضيات العليا إلى العمليات الحسابية الأساسية يمكن أن ينتج عن هذا المنظور البديل تعزيز الفهم والبصيرة.

مع هذه الأسباب كحافز، يمكننا الآن الشروع في فهم كيفية عمل الأساليب العددية وأجهزة الكمبيوتر الرقمية جنبًا إلى جنب لتوليد حلول جيدة للمسائل الرياضية. هذا المقرر مكرس لهذه المهمة.

سنقوم بتطبيق خوارزميات الطرق الواردة في هذا المقرر باللغة بايثون (Python) هي لغة برمجة مفتوحة. يمكن كتابة برامج بايثون وتطويرها في العديد من البيئات.

محتوى المقرر

يحتوي المقرر مواضيع أساسية في التحليل العددي لاسيما المستخدمة في المجالات الهندسية التقنية ، وهي:

مفاهيم أساسية في التحليل العددي.

- الخطأ المطلق والخطأ النسبي
- خطأ تدوير الأرقام
- خطأ اقتطاع السلاسل

بعض الطرائق العددية لإيجاد أحد الجذور التقريبية للمعادلات غير الخطية:

طريقة تنصيف المجال

طريقة نيوتن

طريقة النقطة الثابتة

استيفاء كثيرات الحدود:

طريقة لاغرانج

طريقة نيوتن غريغوري التقدمية

محتوى المقرر

بعض الطرائق العددية للحساب التفاضلي والتكاملي

بعض الطرائق للحساب التفاضلي: - استخدام كثيرة حدود نيوتن غريغوري

- طريقة أمثال غير معينة

بعض طرائق العددية لحساب التكامل المحدد: - طريقة أشباه المنحرفات

- طريقة سيمبسون

بعض الطرائق العددية لحل جملة معدلات تفاضلية بشروط ابتدائية:

- طريقة أولر
- طريقة رونج كوتا

بعض الطرائق العددية لحل جملة معادلات خطية:

- طريقة كرامر
- طريقة مقلوب مصفوفة

طريقة نيوتن التقريبية لحل جملة معادلات غير خطية

المراجع

1- Steven C. Chapra Dr., David Clough (2022). *Applied Numerical Methods with Python for Engineers and Scientists.* McGraw Hill.

2- Kiusalaas, J. (2013). *Numerical methods in engineering with Python 3*. Cambridge university press

3- Gautschi, W. (2011). Numerical analysis. Springer Science & Business Media.

4- Burden, R. L., Faires, J. D., & Burden, A. M. (2015). Numerical analysis. Cengage learning

5- Cheney, E. W., & Kincaid, D. R. (2012). Numerical mathematics and computing. Cengage Learning.

مراجعة التفاضل

لماذا مراجعة التفاضل والتكامل ؟؟؟

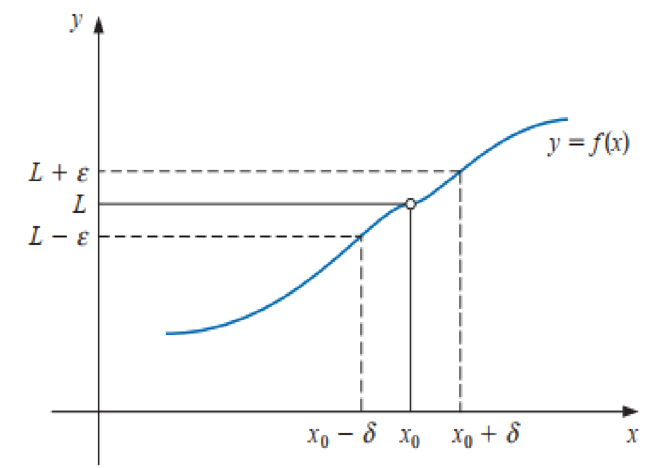
عند تطوير الطرائق العددية ، سنستخدم نظريات من التفاضل والتكامل لضمان أن تكون خوارزمياتنا منطقية. إذا كانت النظرية سليمة ، فعندما تفشل برامجنا ، نبحث عن الأخطاء في الكود!

Limit-continuity

Definition: ***Limit*** — A function f defined on a set X of real numbers $X \subset \mathbb{R}$ has the limit L at x_0, written

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

if given any real number $\epsilon > 0$ ($\forall \epsilon > 0$), there exists a real number $\delta > 0$ ($\exists \delta > 0$) such that $|f(x) - L| < \epsilon$ whenever $x \in X$ and $0 < |x - x_0| < \delta$.



Limit-continuity

Definition: *Continuity (at a point)* —

Let f be a function defined on a set X of real numbers, and $x_0 \in X$. Then f is continuous at x_0 if

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

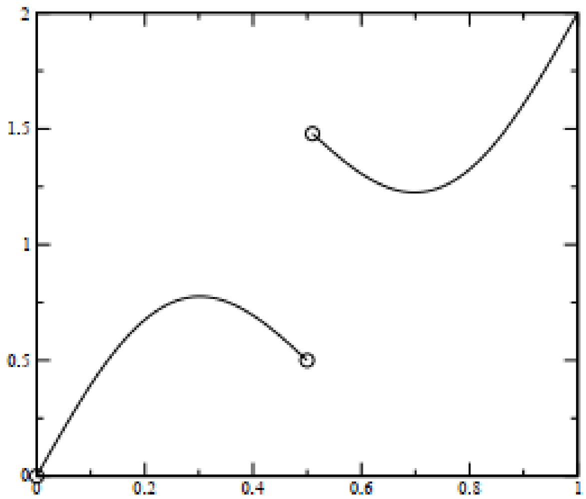
Limit-continuity

Example

The function

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}\sin(2\pi x) & x < 0.5 \\ x + \frac{1}{2}\sin(2\pi x) + 1 & x > 0.5 \end{cases}$$

discontinuity at $x_0 = 0.5$



Limit-continuity

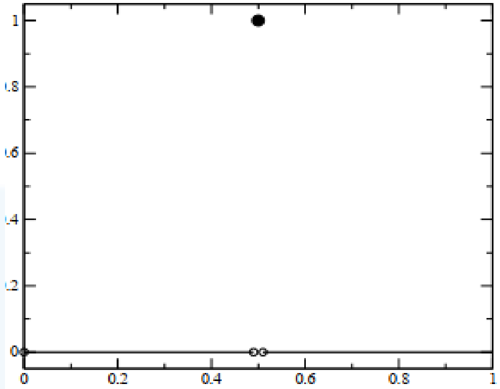
The function

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0.5 \\ 0 & x \neq 0.5 \end{cases}$$

has a discontinuity at $x_0 = 0.5$.

The **limit exists**, but

$$\lim_{x \to 0.5} f(x) = 0 \neq 1$$



Definition: ***Continuity (in an interval)*** —
The function f is continuous on the set X (denoted $f \in C(X)$) if it is continuous at each point x in X.

Differentiability

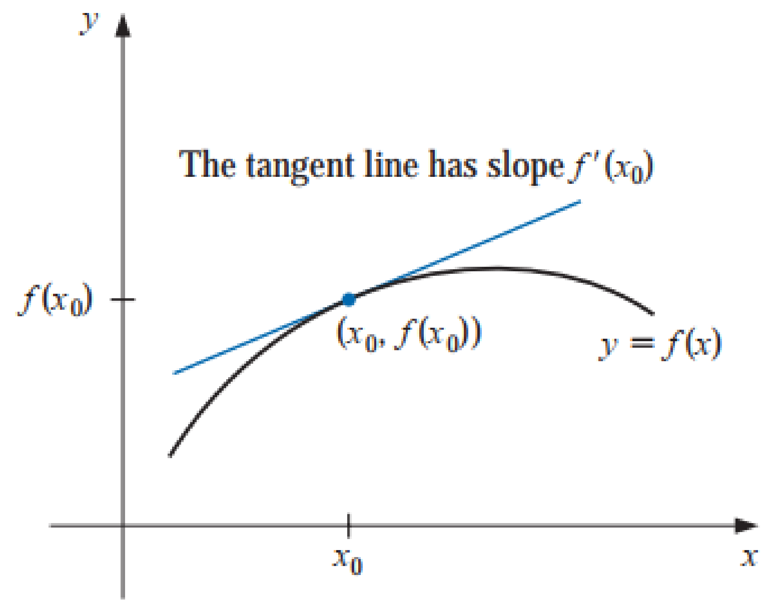
Definition: ***Differentiability (at a point)*** — Let f be a function defined on an open interval containing x_0 $(a < x_0 < b)$. f is differentiable at x_0 if

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{exists.}$$

If the limit exists, $f'(x_0)$ is the derivative at x_0.

Differentiability

The derivative of f at x_0 is the slope of the tangent line to the graph of f at $(x_0, f(x_0))$, as shown in Figure



جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Differentiability

Definition: Differentiability (in an interval) — If $f'(x_0)$ exists $\forall x_0 \in X$, then f is differentiable on X

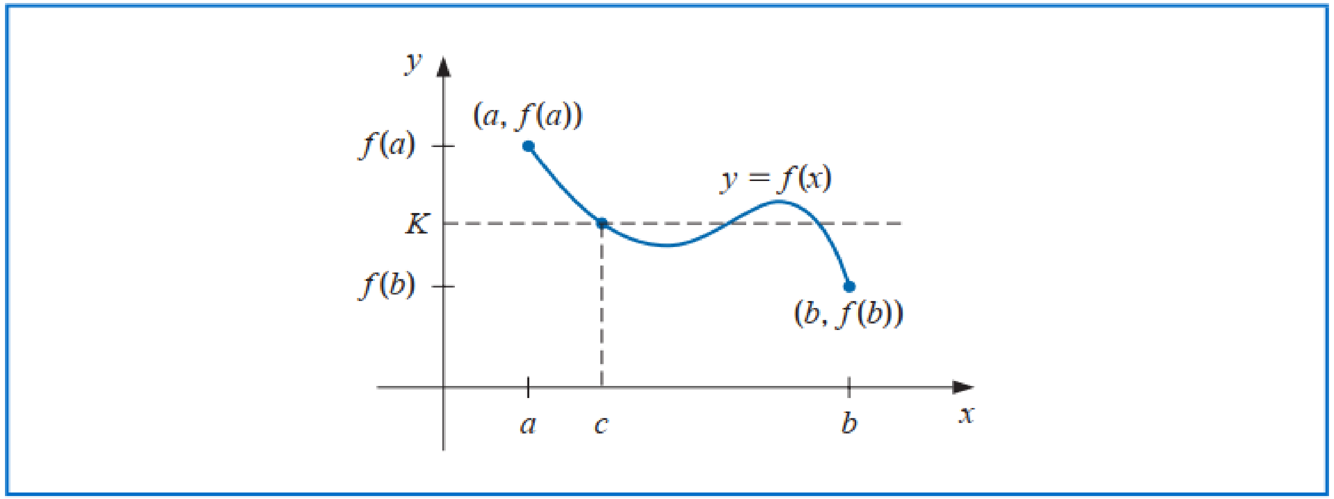
Theorem: Differentiability $\Rightarrow$ Continuity —
If f is differentiable at x_0, then f is continuous at x_0.

Intermediate Value Theorem

Theorem

(Intermediate Value Theorem)

If $f \in C[a,b]$ and K is any number between $f(a)$ and $f(b)$, then there exists a number c in (a,b) for which $f(c) = K$. ■



Intermediate Value Theorem

Example

Show that $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ has a solution in the interval $[0, 1]$.

Solution Consider the function defined by $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1$. The function f is continuous on $[0, 1]$. In addition,

$$f(0) = -1 < 0 \qquad \text{and} \qquad 0 < 1 = f(1).$$

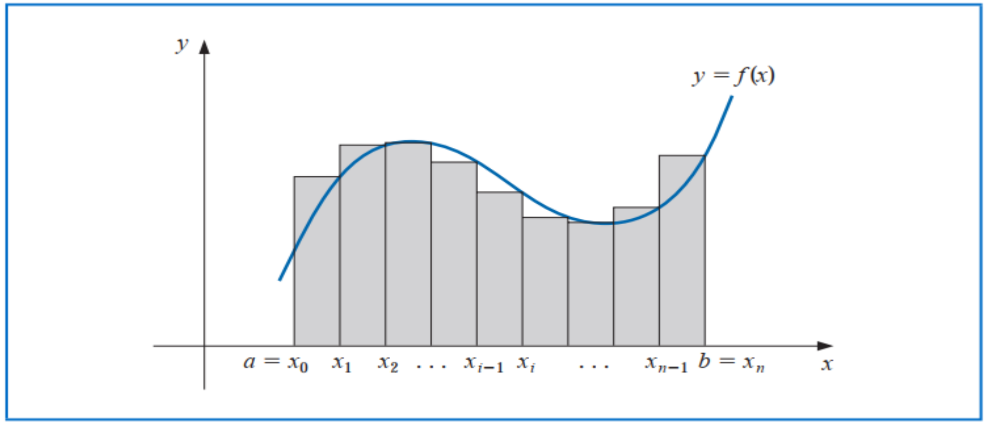
The Intermediate Value Theorem implies that a number x exists, with $0 < x < 1$, for which $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$. ■

Integration

Definition

The **Riemann integral** of the function f on the interval $[a,b]$ is the following limit, provided it exists:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i,$$



Taylor Polynomials and Series

Suppose $f \in C^n[a,b]$, that $f^{(n+1)}$ exists on $[a,b]$, and $x_0 \in [a,b]$. For every $x \in [a,b]$,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

Taylor Polynomials and Series

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

where

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Here $P_n(x)$ is called the ***n*th Taylor polynomial** for f about x_0, and $R_n(x)$ is called the **remainder term**

Taylor Polynomials and Series

Important Examples: Below are important functions studied in Calculus 2

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Taylor Polynomials and Series

Example : Approximate $\sin(x)$ with x near $\frac{\pi}{6}$

We know $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, so what about $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0.1\right)$

Since $f(x) \in C^{\infty}(-\infty, \infty)$, we can use Taylor's theorem:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \end{aligned}$$

Taylor Polynomials and Series

From Taylor's theorem $\sin(x)$ with x near $\frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \sin(x)\bigg|_{x=\frac{\pi}{6}} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n \\
&= \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \\
&\quad \frac{1}{2!}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{1}{3!}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \ldots
\end{aligned}$$

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

Thank you for your attention