طريقة الرواسب الترجيحية

مفهوم الراسب:

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{du}{dx} = -u$$

التعبير الرياضي القوي:

$$\frac{du}{dx} + u = 0$$

الشر ط الحدي: $u(x=0)=1$

<u>المطلوب</u> حل هذه المعادلة ضمن المجال $0 \le x \le 1$

نفرض وجود حل تقريبي لهذه المعادلة على شكل متعدد حدود من الدرجة الثانية:

$$u^* = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

هذا الحل التقريبي يجب أن يحقق الشروط الحدية وبالتالي:

$$u^*(x=0) = a_1 + a_2 \times 0 + a_3 \times 0^2 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$u^* = 1 + a_2 x + a_3 x^2$$

يجب تقييم البارامترات a_2 و a_3 لذلك نضع شرطاً يسمح لنا بمعايرة هذين البارامترين ليعطيا الحل الرياضي الدقيق للمسألة.

نُعرّف الراسب: $R = \frac{du^*}{dx} + u^*$

$$R = \frac{d}{dx}\left(1_1 + a_2 x + a_3 x^2\right) + \left(1_1 + a_2 x + a_3 x^2\right)$$

$$R = a_2 + 2a_3 x + \left(1 + a_2 x + a_3 x^2\right)$$

$$R = a_2(1+x) + a_3(2x + x^2) + 1$$

إذا كانت $u = u^*$ أي تساوي الحل الدقيق للمعادلة عندئذٍ يكون الراسب $R(x) = 0$

إذاً الهدف الآن هو جعل هذا الراسب يساوي الصفر من أجل أي قيمة ل x ضمن المجال $0 \le x \le 1$

توجد عدة طرائق من أكثرها استخداماً

Collocation method(Collocation par points)

باعتبار أنّه يوجد لدينا مجهولان إذاً نحتاج إلى معادلتين للحل. نفرض أنَّ قيمة الراسب معدومة في النقطتين التاليتين من المجال المفروض $0 \le x \le 1$:

$$x = \frac{2}{3} \text{ و } x = \frac{1}{3}$$

نُعوّض في علاقة الراسب:

$$R(x) = a_2(1 + x) + a_3(2x + x^2) + 1$$

$$R(x = \frac{1}{3}) = a_2(1 + \frac{1}{3}) + a_3(2\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2) + 1$$

$$R(x = \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}a_2 + \frac{7}{9}a_3 + 1 = 0$$

$$R(x = \frac{2}{3}) = a_2(1 + \frac{2}{3}) + a_3(2\frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2) + 1$$

$$R(x = \frac{2}{3}) = \frac{5}{3}a_2 + \frac{16}{9}a_3 + 1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{3}a_2 + \frac{7}{9}a_3 + 1 = 0 \\ \frac{5}{3}a_2 + \frac{16}{9}a_3 + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_2 &= -0.9310 \\ a_3 &= 0.3103 \end{aligned}$$

نحسب قيم a_2, a_3 : inv([4/3 7/9;5/3 16/9])*[-1;-1]

Subdomain method-Méthode de collocation par sous domaines

لجعل قيمة الراسب تساوي الصفر نفرض أنَّ متوسط الراسب يساوي الصفر على مجالين عنصريين يُمثّل مجموعهما المجال الكلي:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} R(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(a_2(1+x)+a_3(2x+x^2)+1\right) dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} R(x)\,dx = \frac{1}{2}+\frac{5}{8}a_2+\frac{7}{24}a_3$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} R(x)\,dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{5}{8}a_2+\frac{7}{24}a_3 = 0$$

ومن أجل المجال العنصري الثاني:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} R(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(a_2(1+x)+a_3(2x+x^2)+1\right) dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} R(x)\,dx = \frac{1}{2}+\frac{7}{8}a_2+\frac{25}{24}a_3$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} R(x)\,dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{7}{8}a_2+\frac{25}{24}a_3 = 0$$

نحصل على معادلتين بمجهولين:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}+\frac{5}{8}a_2+\frac{7}{24}a_3 = 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{7}{8}a_2+\frac{25}{24}a_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_2 = -0.9474 \\ a_3 = 0.3158 \end{array}$$

في MATLAB `inv([5/8 7/24;7/8 25/24])*[-0.5;-0.5]`

Méthode de Galerkine

لجعل قيمة الراسب تساوي الصفر سوف نفرض أنَّ متوسط الراسب المضروب بتابع تجريبي يساوي الصفر على المجال الكلي. يتمّ اختيار التوابع التجريبية من بين التوابع التي استخدمت لتشكيل التابع التقريبي:

$$\int_0^1 x\, R(x)\, dx = 0 \quad , \quad \int_0^1 x^2\, R(x)\, dx = 0$$

$$\int_0^1 x\ R(x)\ dx = \int_0^1 x \times \left(a_2(1+x) + a_3(2x + x^2) + 1\right)\ dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 x\ R(x)\ dx \quad = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}a_2 + \frac{11}{12}a_3$$

المعادلة الثانية:

$$\int_0^1 x^2\ R(x)\ dx = \int_0^1 x^2 \times \left(a_2(1+x) + a_3(2x + x^2) + 1\right)\ dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 x^2\ R(x)\ dx \quad = \frac{1}{3} + \frac{7}{12}a_2 + \frac{14}{20}a_3$$

نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{5}{6}a_2 + \frac{11}{12}a_3 \\ \frac{1}{3} + \frac{7}{12}a_2 + \frac{14}{20}a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_2 = -0.9143 \\ a_3 = 0,2857 \end{array}$$

```
inv([5/6  11/12 ; 7/12  14/20])*[-0.5;-1/3]
```

Least squares method (Méthode des moindres carrés)

نعتبر أنَّ متوسط مربّع الراسب على طول المجال أصغر ما يمكن.

$$S = \int_0^1 R^2(x)\ dx$$

يجب أن تكون S أصغر ما يمكن، أي أن مشتق S بالنسبة للبارامترات المجهولة معدوم.

$$\frac{\partial S}{\partial a_2}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial a_2}\int_0^1 R^2(x)\,dx=2\int_0^1 \mathrm{R(x)}\frac{\partial R(x)}{\partial a_2}\,dx=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_3}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial a_3}\int_0^1 R^2(x)\,dx=2\int_0^1 \mathrm{R(x)}\frac{\partial R(x)}{\partial a_3}\,dx=0$$

$$\int_0^1 \mathrm{R(x)}\frac{\partial R(x)}{\partial a_2}\,dx=\int_0^1\left(a_2(1+x)+a_3(2x+x^2)+1\right)\times\left(1+x\right)\,dx$$

$$\int_0^1 \mathrm{R(x)}\frac{\partial R(x)}{\partial a_2}\,dx=\frac{3}{2}+\frac{7}{3}a_2+\frac{9}{4}a_3$$

$$\int_0^1 \mathrm{R(x)}\frac{\partial R(x)}{\partial a_3}\,dx=\int_0^1\left(a_2(1+x)+a_3(2x+x^2)+1\right)\times\left(2x+x^2\right)\,dx$$

$$\int_0^1 \mathrm{R(x)}\frac{\partial R(x)}{\partial a_3}\,dx=\frac{4}{2}+\frac{9}{4}a_2+\frac{38}{15}a_3$$

نحصل على المعادلتين التاليتين:

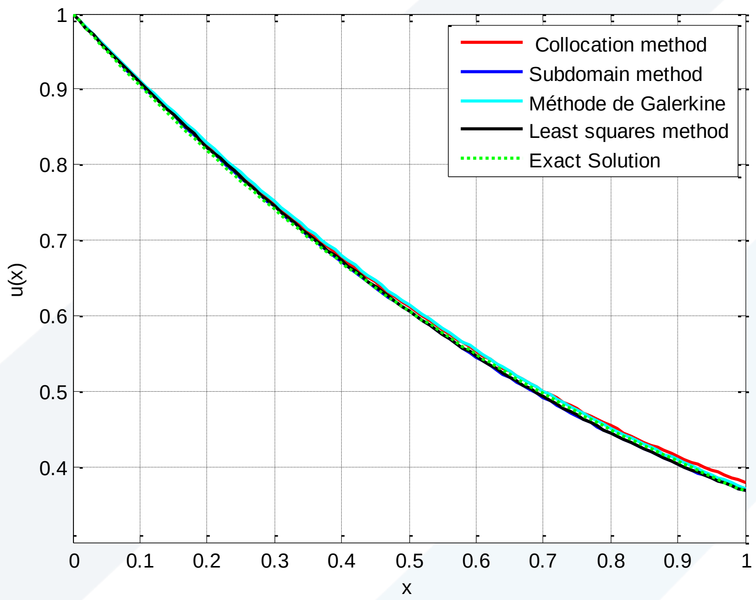
$$\left.\begin{matrix}\frac{3}{2}+\frac{7}{3}a_2+\frac{9}{4}a_3\\ \frac{4}{3}+\frac{9}{4}a_2+\frac{38}{15}a_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}a_2=-0.9427\\ a_3=0.3110\end{matrix}$$

```
inv([ 7/3  9/4;9/4 38/15])*[-3/2;-4/3]
```

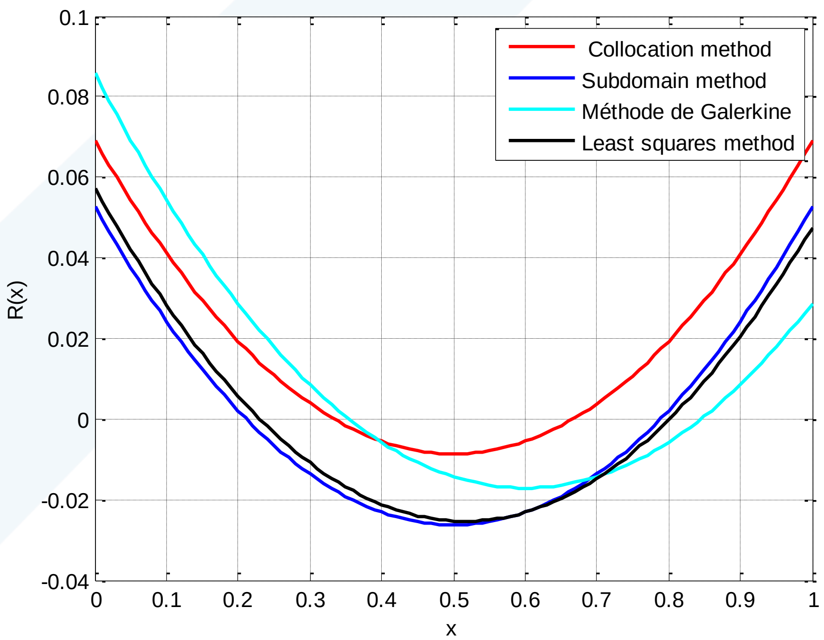
الحل الرياضي الدقيق:

$$\frac{du}{u}=-dx \Rightarrow \ln(u)=-x+c \Rightarrow u=e^{-x+c} \Rightarrow$$

$$u=Ce^{-x} \;,\quad x=0 \Rightarrow u=1 \Rightarrow C=1 \Rightarrow u=e^{-x}$$



التابع التقريبي بطريقة الرواسب الترجيحية



الراسب

```
%  Programme 3: Weighted Residual Method
close all
x= 0:0.01:1;
a1=1;
%collocation
a21=-0.9310;
a31=0.3103;
R1=a21*(1+x)+(a31*(2.*x+x.^2))+1
u1= a1+(a21.*x)+(a31.*x.^2);
hand1 = plot(x,u1,'r');
hold on
%subdomain
a22= -0.9474;
a32=  0.3158;
R2=a22*(1+x)+(a32*(2.*x+x.^2))+1
u2= a1+(a22.*x)+(a32.*x.^2);
hold on
hand2 = plot(x,u2,'b')
%galerkine
a23=-0.9143;
a33 =  0.2857;
R3=a23*(1+x)+(a33*(2.*x+x.^2))+1
u3= a1+(a23.*x)+(a33.*x.^2);
hold on
hand3=plot(x,u3,'c')
%least
a24=  -0.9427;
a34 = 0.3110;
R4=a24*(1+x)+(a34*(2.*x+x.^2))+1
u4= a1+(a24.*x)+(a34.*x.^2);
hand4=plot(x,u4,'k')
%Exact solution
uex=exp(-x);
hold on
hand5=plot(x,uex,'g:')
set(hand5, 'LineWidth', 2);
xlabel('x')
ylabel('u(x)')
set(gcf,'color','w');
grid
set(hand1, 'LineWidth', 2);
```

```
set(hand2, 'LineWidth', 2);
set(hand3, 'LineWidth', 2);
set(hand4, 'LineWidth', 2);
legend('      Collocation       method','Subdomain
method','Méthode    de    Galerkine','Least     squares
method','Exact Solution')
```

```
figure
hand6=plot(x,R1,'r',x,R2,'b',x,R3,'c',x,R4,'k')
set(hand6, 'LineWidth', 2);
xlabel('x')
ylabel('R(x)')
set(gcf,'color','w');
grid
legend('   Collocation   method','Subdomain   method
','Méthode   de   Galerkine  ','Least  squares  method
','Exact Solution')
```

يمكن تعميم طريقة الرواسب الترجيحية كما يلي:

$$\int_0^1 w_1 \, R(x)\, dx = 0$$

$$\int_0^1 w_2 \, R(x)\, dx = 0$$

حيث إنّ توابع الوزن أو الترجيح w_1 و w_2 تعطى وفق الطريقة المستخدمة:

❖ في طريقة ***Collocation method***

$w_1 = \delta(x - \frac{1}{3}) \ , \ w_2 = \delta(x - \frac{2}{3})$ وهي *توابع* Dirac

❖ في طريقة ***Subdomain method***

تكون توابع الوزن أو الترجيح هي: *unit step function(échelon unité)* :

$$w_1 = u_0(x) - u_{\frac{1}{2}}(x) \ , \ w_2 = u_{\frac{1}{2}}(x)$$

❖ في طريقة <u>Galerkine</u>

تكون توابع الوزن أو الترجيح هي توابع الأساس للتقريب

$$w_1 = x \ , \ w_2 = x^2$$

❖ في طريقة <u>Least squares method</u>

تكون توابع الترجيح أو الوزن هي مشتق الراسب بالنسبة إلى البارامترات المطلوب تحديدها

$$w_1 = \frac{\partial R}{\partial a_2} \ , \ w_2 = \frac{\partial R}{\partial a_3}$$

تطبيق

استخدم طريقة *Galerkine* للحصول على حل تقريبي للمعادلة التالية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 10x^2 = 5 \qquad 0 \le x \le 1$$

التعبير الرياضي القوي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 10x^2 - 5 = 0$$

الشروط الحدية:

$$y(0) = y(1) = 0$$

نختار التابع التقريبي التالي:

$$y^* = a_1 \times x(x-1)$$

نُعرّف الراسب:

$$R(x) = \frac{d^2y^*}{dx^2} - 10x^2 - 5$$

نعوّض قيمة التابع التقريب في معادلة الراسب:

$$R(x) = 2a_1 - 10x^2 - 5$$

يجب أن نحسب a_1 بحيث تكون قيمة $R(x)$ أصغر ما يمكن، نستخدم طريقة الرواسب الترجيحية.

$$\int_a^b \psi_i(x)\, R(x)\, dx = 0$$

نختار التابع التجريبي وفق طريقة Galerkine

$$\psi_i(x) = N_1(x) = x(x-1)$$

- *نعوّض في العلاقة السابقة:* $\int_a^b x(x-1)\,(2a_1 - 10x^2 - 5)\; dx = 0$

$$-\frac{a_1}{3} - 2 + \frac{40}{12} = 0 \Rightarrow a_1 = -4$$

$$y^* = -4 \times x(x-1)$$

وفي حال استخدام تابعين أساسيين للتقريب:

$$y^* = a_1 \times x(x-1) + a_2 \times x^2(x-1)$$

نُعوّض في علاقة الراسب:

$$R(x) = \frac{d^2y^*}{dx^2} - 10x^2 - 5$$

$$R(x) = 2\,a_1 + 6\,a_2\,x - 2\,a_2 - 10x^2 - 5$$

$$R(x) = -10x^2 + 2\,a_2(3x-1) + (2\,a_1 - 5)$$

نختار التابع التجريبي وفق طريقة *Galerkine*

$$\psi_i(x) = N_1(x) = x(x-1)$$

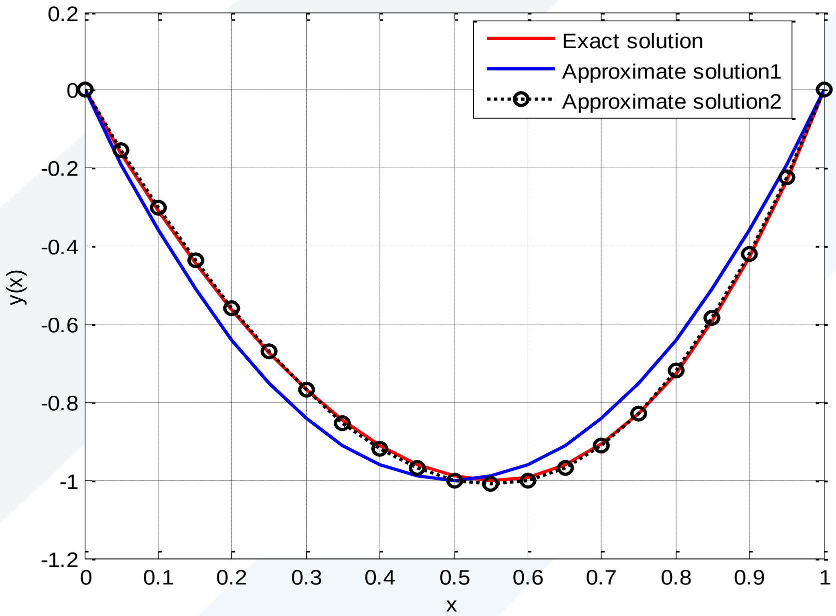
$$\int_a^b \psi_i(x)\, R(x)\; dx = 0$$

المعادلة الأولى: $\int_0^1 x(x-1)\left(-10x^2 + 2\,a_2(3x-1) + (2\,a_1 - 5)\right)\, dx = 0$

المعادلة الثانية: $\int_0^1 x^2(x-1)\left(-10x^2+2\,a_2(3x-1)+(2\,a_1-5\,)\right)\,dx=0$

حل هاتين المعادلتين يعطي: $a_1=\frac{19}{6}$ و $a_2=\frac{5}{3}$

التابع التقريبي: $y^*=\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{19}{6}x$




```
x=0:0.05:1;
yex=[10/12 0 +5/2  -10/3 0]
y_ex= polyval(yex,x)
y_ap1= 4.*x.*(x-1);
y_ap2=polyval([5/3 3/2 -19/6 0],x)
figure
hand= plot(x,y_ex,'r',x,y_ap1,'b',x,y_ap2,'ko:')
set(hand, 'LineWidth', 3);
xlabel('x')
ylabel('y(x)')
set(gcf,'color','w');
grid
set(hand,'LineWidth', 2);
legend('Exact solution','Approximatesolution1','Approximate solution2')
```