

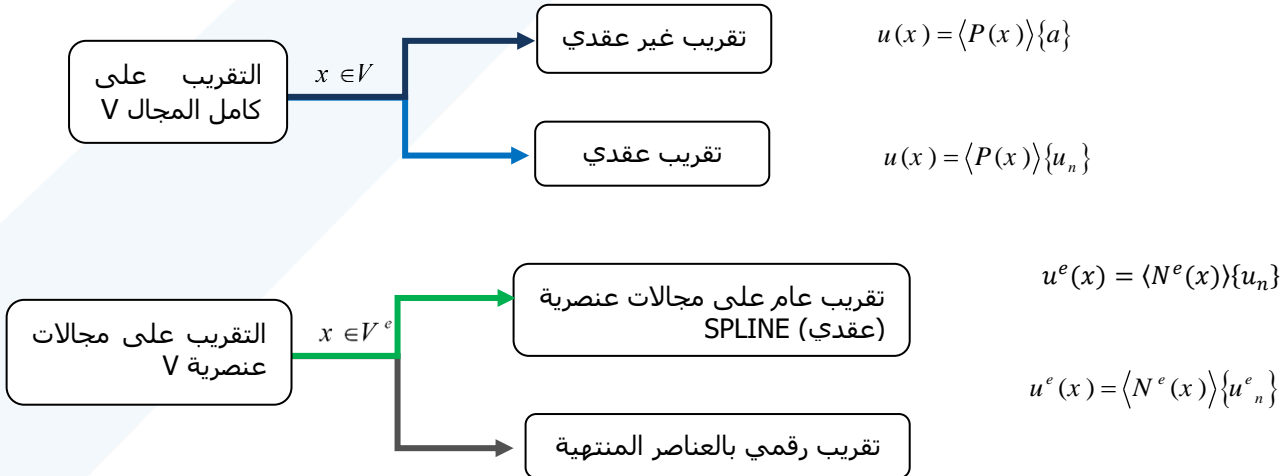
المحاضرة الثالثة

الصعوبات في التقريب العقدي:

- 1- يطلب من التابع التقريبي أن يحقق بعض الشروط الحدية
 - 2- تتطلب عملية إيجاد تابع تقريبي يقترب من الحل الدقيق عدد كبير من العقد
- للتغلب على هذه الصعوبات نلجأ إلى **التقريب العقدي على مجالات عنصرية** الأمر الذي يجعل عملية تشكيل التوابع التقريبية أقل تعقيداً.

خطوات التقريب العقدي على مجالات عنصرية :

- 1- نعرّف مجموعة من المجالات العنصرية V_e مجموعها يمثل المجال الكلي V نسمة هذه المجالات العنصرية بالعناصر المنتهية.
 - 2- نستخدم التقريب العقدي لنعرّف توابع تقريبية مختلفة على كل مجال عنصري يمكن أن يعتمد التابع التقريبي $u^{e1}(x)$ لمجال عنصري V_{e1} على المتحولات العقدية لمجال عنصري آخر V_{e2} كما هي الحالة في التقريب الرقمي من نوع Spline تعتبر طريقة التقريب الرقمي بالعناصر المنتهية حالة خاصة من التقريب العقدي على مجالات عنصرية من حيث ما يلي:
- تابع التقريب على كل مجال عنصري هو تابع مستمر على هذا المجال ولا يعتمد إلا على المتحولات العقدية الموافقة للعقد الواقعة ضمن هذا المجال العنصري أو على حدوده.
- يلخص الجدول التالي طرائق التقريب التي تم شرحها فيما سبق:


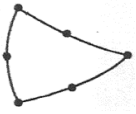

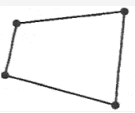
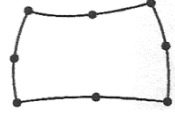

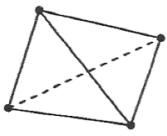
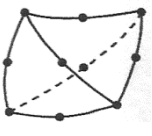
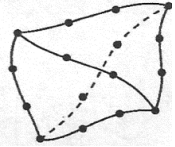


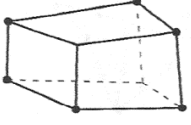
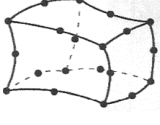
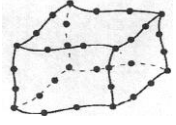
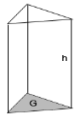
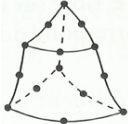

تتطلب طريقة العناصر المنتهية إتقان المفاهيم التالية:

- تعريف الشكل الهندسي لكافة العناصر
- تشكيل توابع الشكل أو الاستيفاء لكل عنصر N_i والتي يجب أن تكون مستمرة بين العناصر.

العناصر المنتهية:

نوضح في الشكل التالي الشكل الهندسي لبعض العناصر المنتهية الموافقة لموديل $1D$, $2D$, $3D$ ، كل عنصر معرف باسم يحدد شكله ونوع المنحني أو السطح الذي يشكل حدوده إضافة إلى عدد العقد الهندسية الضرورية لتعريفه.

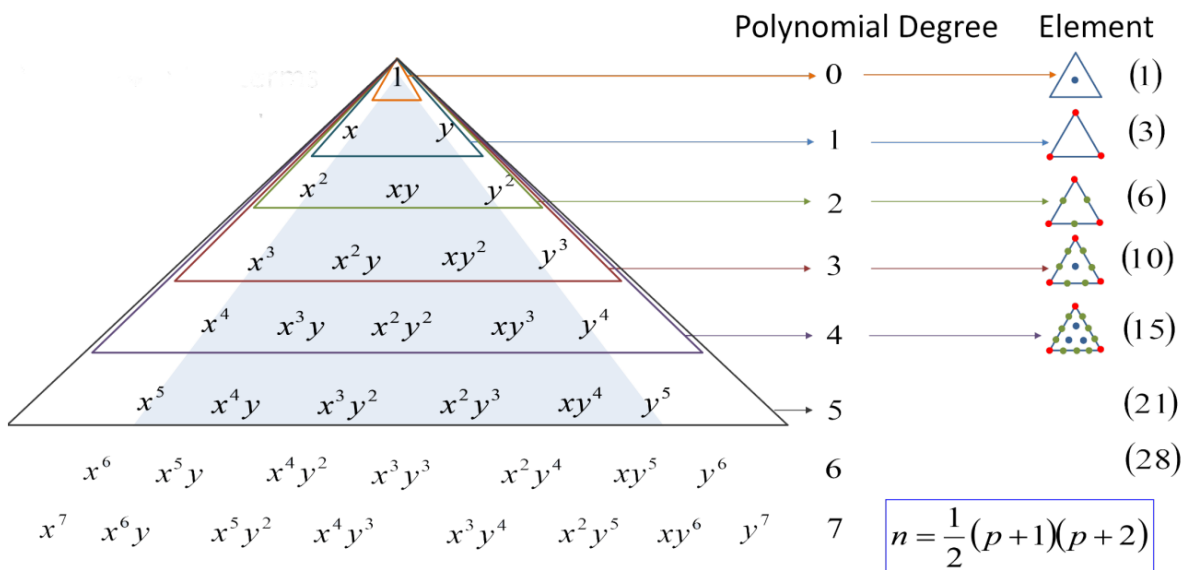
العناصر المنتهية الخاصة بالموديل ثنائي البعد		
Triangular elements		
Linear (3)	Quadratic (6)	Cubic (9)
		
Quadrilateral elements		
Linear (4)	Quadratic (8)	Cubic (12)
		
العناصر المنتهية الخاصة بالموديل ثلاثي البعد		
Tetrahedral elements		
Linear (4)	Quadratic (10)	Cubic (16)
		
hexahedral elements		
Linear (8)	Quadratic (20)	Cubic (32)

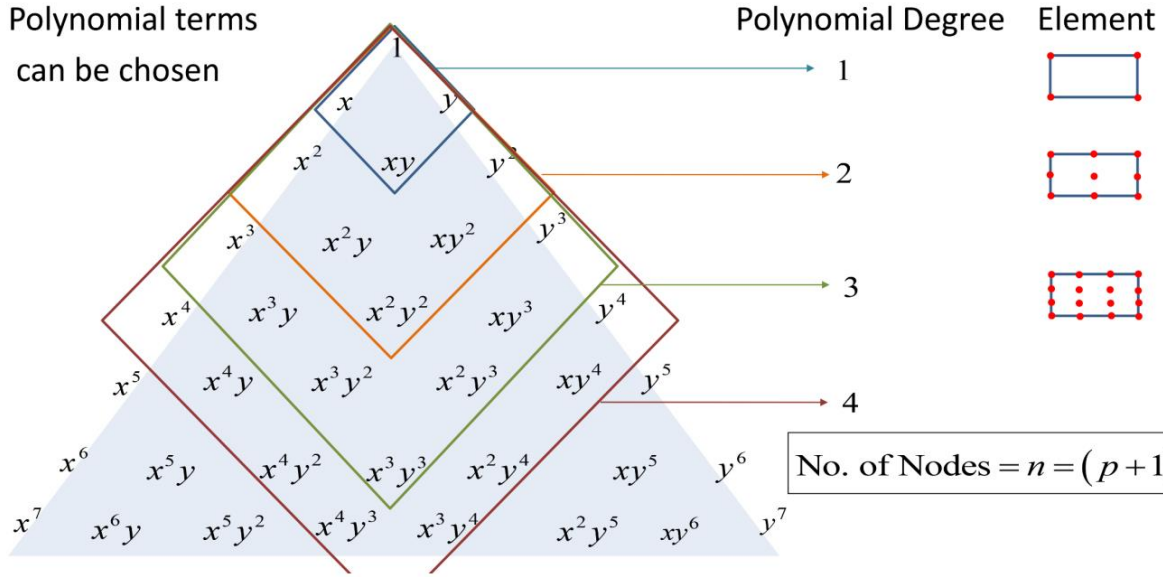
		
Prismatic elements		
Linear (6)	Quadratic (15)	Cubic (24)
		

اختيار توابع الشكل في العناصر المنتهية:

يتم عادة استخدام مثلث باسكال لاختيار توابع الشكل

For triangular elements:





ما يُميز طريقة العناصر المنتهية أنّ التقريب الرقمي لا يكون للموديل الرياضي (التعبير الرياضي القوي) الذي يضبط الموديل الفيزيائي كما هو الحال في طريقة الفروق المنتهية وإنما لعلاقة رياضية أخرى نسميها التعبير الرياضي الضعيف أو الشكل التكاملي أو التعبير الرياضي التبايني **variational form or weak form** ونحصل عليها باستخدام طريقة الرواسب الترجيحية والهدف من ذلك تجنب بعض القيود الناتجة عن عدم استمرارية التابع.

طريقة الإضعاف:

تستخدم طريقة الرواسب الترجيحية لإضعاف التعبير الرياضي القوي (المعادلة التفاضلية التي تحكم الموديل الفيزيائي). من ثم يتم إجراء التكامل بالتجزئة وأخذ الشروط الحدية بعين الاعتبار. تلخص خطوات الإضعاف كالتالي:

- 1- نعرف الراسب
- 2- ضرب الراسب بتابع تجريبي
- 3- تكامل على كامل المجال
- 4- نطبق التكامل بالتجزئة
- 5- نأخذ بعين الاعتبار الشروط الحدية

مزايا التكامل بالتجزئة :

1. تخفيض درجة الاشتقاق
2. إدخال تلقائي للشروط الحدية

تذكر: التكامل بالتجزئة

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

تطبيق: ليكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a = 0$$

المعرفة ضمن المجال D: $x \in [0,10]$

المطلوب إيجاد الحل الرياضي الدقيق لهذه المعادلة من أجل $a = 1$ وضمن الشروط الحدية

$$u(0) = 10, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=10} = 0$$

أكتب التعبير الرياضي الضيف للمعادلة التفاضلية

$$\frac{du}{dx} + a x + C_1 = 0$$

$$x = 10 \Rightarrow 0 + 10a + C_1 = 0 \Rightarrow$$

$$C_1 = -10a$$

الحل:

$$u + a \frac{x^2}{2} - 10a x + C_2 = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow C_2 = -10 \Rightarrow u_{ex}(x) = -a \frac{x^2}{2} + 10a x + 10$$

طريقة الرواسب الترجيحية لإضعاف المعادلة التفاضلية $\frac{d^2u}{dx^2} + a = 0$

$$\int_0^{10} \psi(x) \left(\frac{d^2u^*}{dx^2} + a \right) dx = 0 \quad -1$$

-2 التكامل بالتجزئة:

$$\left[\psi(x) \frac{du}{dx} \right]_0^{10} - \int_0^{10} \frac{d\psi(x)}{dx} \frac{du}{dx} dx + \int_0^{10} \psi(x) a dx = 0$$

$$\left(\psi(10) \frac{du}{dx} \Big|_{10} - \psi(0) \frac{du}{dx} \Big|_0 \right) - \int_0^{10} \frac{d\psi(x)}{dx} \frac{du}{dx} dx + \int_0^{10} \psi(x) a dx = 0 \quad \forall \psi(x)$$

-3 نأخذ الشروط الحدية بالاعتبار:

$$\int_0^{10} \frac{d\psi(x)}{dx} \frac{du}{dx} dx - \int_0^{10} \psi(x) a dx = 0, \quad \psi(0) = 0$$

يوضح التطبيق التالي أهمية طريقة العناصر المنتهية لتقييم حقل درجة الحرارة في موديل أحادي البعد وذلك بهدف تحسين العزل الحراري لجدار حُرْفَة.

تعد هذه المسألة من المسائل المعقدة وذلك للأسباب التالية:

- 1- مسألة غير مستقرة أي مرتبطة بالزمن. حيث تصنف المسائل غير المستقرة إلى نوعين:
 - مسائل من الدرجة الأولى بالنسبة للزمن تعرف بالمسائل الانتقالية (انتقال الحرارة، انتشار التلوث)
 - مسائل من الدرجة الثانية بالنسبة للزمن وهي مرتبطة بدراسة ديناميكية الانظمة الميكانيكية.
- 2- مسألة ثلاثية البعد
- 3- طبيعة المواد المستخدمة في بناء الجدار وعدم تجانسها مما يشكل صعوبة في تقييم معاملات التوصيل الحراري.
- 4- من أجل الحل الرقمي لهذا النوع من المسائل من الضروري تبسيطها من خلال عدة فرضيات مبنية على الحس الفيزيائي للمهندس وهنا تكمن إحدى مهارات النمذجة الرقمية:

في البداية نأخذ بعين الاعتبار الحالة العامة للجدار المكون من أربعة أنواع من المواد العازلة بخصائص عزل مختلفة.

الفرضية الأولى: نعتبر أن المسألة مستقرة أي غير مرتبطة بالزمن ويمكن تبرير ذلك من خلال تقييم الحالة الحرارية للجدار ضمن فترة زمنية يكون فيها تغير الشروط الحدية على جانبي الجدار شبه معدوم.

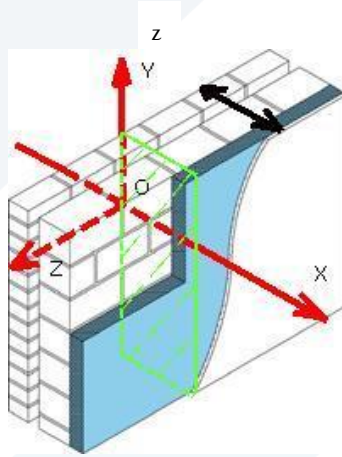
ملاحظة: بالرغم من إمكانية فرض الشروط الحدية على جانب الجدار داخل الغرفة مستقرة فإننا لا نستطيع من الناحية العملية فرض ذلك على الشروط الحدية على جانب الجدار الآخر المعرض لتغيرات الطقس خلال 24 ساعة. في حال كان الزمن صغير نسبياً (أقل من ساعة) فإنه يمكن اعتبار تغير درجة حرارة الجدار كتعاقب لحالات شبه ستاتيكية. أما إذا كان زمن

دراسة الحالة الحرارية للجدار من مرتبة بضع ساعات فلا بد من حل المسألة باستخدام تقريب غير مستقر.

الفرضية الثانية: المتحول في المسألة الذي هو درجة الحرارة يتبع لإحداثي مكاني واحد فقط من أجل ذلك نتبع ما يلي:

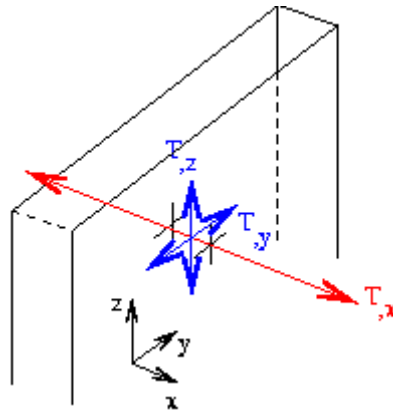
1- نختار جملة محاور إحداثية $oxyz$ بحيث يكون المحور x يتعامد مع سطح الجدار كما هو مبين في الشكل التالي.

2- ن عزل المستوي ثنائي البعد oxy الذي يحوي الأبعاد المميزة للجدار (التي تمثل الاتجاهات المميزة للظاهرة الفيزيائية المدروسة).



نعتمد موديل أحادي البعد بسماكة L على المحور x . تعتبر فرضية الموديل أحادي البعد من أهم الفرضيات في هذه المسألة ويمكن تبريرها بدراسة الحالة الحرارية للجدار بعيداً عن الزوايا.

يمثل الشكل التالي المركبات المختلفة لتدرج درجة الحرارة (التدفق). نلاحظ أن درجة الحرارة تخضع إلى تغير أسرع عبر سماكة الجدار مقارنة مع تغيرها في المستوي المعرف عند x ثابتة.

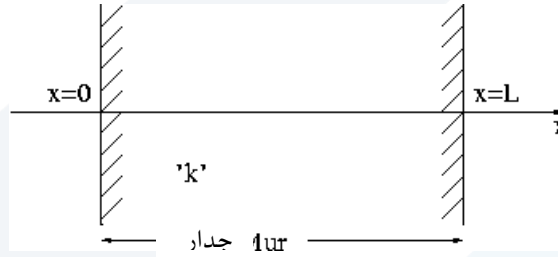


الفرضية الثالثة: تجانس الخصائص الفيزيائية للمواد العازلة، نعتبر الجدار مؤلف من خليط من المواد المتجانسة لها سماكة تعادل عرض الحائط.

حلقة النمذجة الرقمية

الموديل الفيزيائي:

- وصف الشكل الهندسي:



- اختيار المتحولات المجهولة والتي نبحث لتقييم تغيراتها الزمنية والمكانية:

• حساب درجة الحرارة في كل نقطة $T(x)$

• استنتاج قيمة التدفق الحراري $q(x) \text{ w/m}^2$

- القانون الفيزيائي الذي يضبط سلوكية النظام

• قانون التوازن الحراري

• قانون *Fourier* الذي يربط تدرج درجة الحرارة مع التدفق

- قيم الخصائص الفيزيائية التي يفترض أنها معلومة

□ معامل انتقال الحرارة بالحمل بين الجدار والوسط الخارج $h(\text{w/c}^\circ\text{m}^2)$

□ معامل التوصيل الحراري $k(\text{w/c}^\circ\text{m})$

- الشروط الحدية

$T(x=0) = T_0$

$q(x=L) = q_L$

الموديل الرياضي:

□ التوازن الحراري $\vec{\nabla} \cdot \vec{q}(x) - f_v = 0, \forall x \in [0, L]$

قانون Fourier: $\vec{q}(x) = -k\vec{\nabla}T(x)$ ■

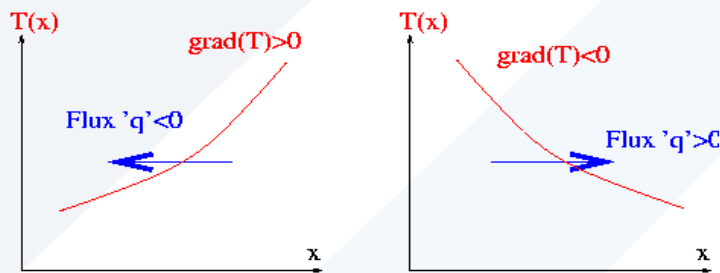
المعادلة المطلوب حلها:

$$k \frac{d^2T(x)}{dx^2} + f_v = 0, \quad \forall x \in [0, L]$$

وفق الشروط الحدية التالية:

$$T(x=0) = 30 \text{ C}^\circ$$

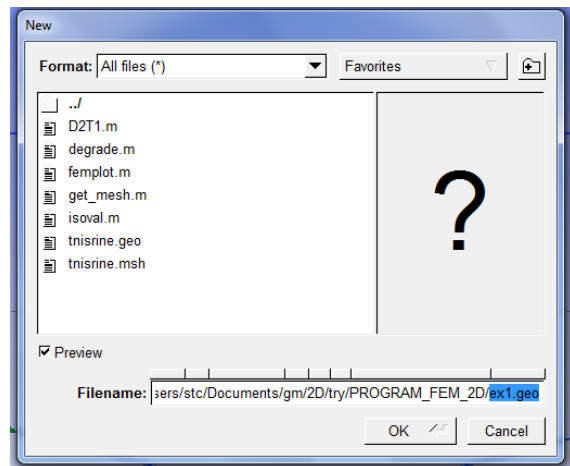
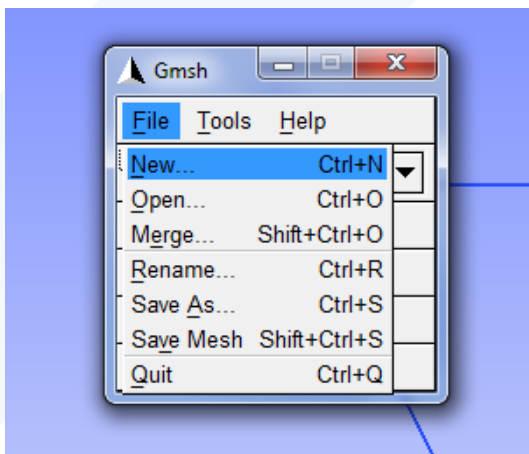
$$q(x=L) = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h(T(L) - T_{ext}) = q_L \text{ W / m}^2$$



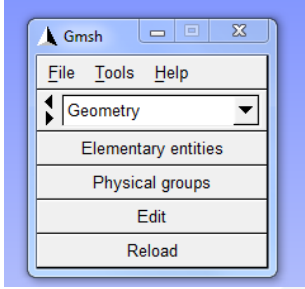
التفسير الفيزيائي للتدفق الحراري وفق Fourier

الجزء العملي من المحاضرة

بناء الشبكة باستخدام **GMSH**
يتم بناء ملف الدخل بامتداد ".geo"



أولاً: يتم رسم الشكل وفق نقاط أساسية ثم خطوط مستقيمة ثم حلقة خطوط وتعريف سطح على حلقة الخطوط ليصبح ملف الدخول وفق الآتي:

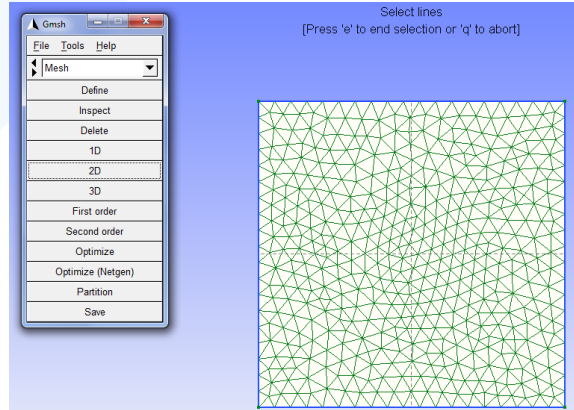


```
Point(1) = {0, 0, 0, 0.05};
Point(2) = {1, 0, 0, 0.05};
Point(3) = {1, 1, 0, 0.05};
Point(4) = {0, 1, 0, 0.05};
Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {2, 3};
Line(3) = {3, 4};
Line(4) = {4, 1};
Line Loop(5) = {4, 1, 2, 3};
Plane Surface(6) = {5};
```

ثانياً: يمكن تعريف أرقام فيزيائية لبعض الخطوط والسطوح التي تخضع لشروط حدية معينة:

```
Physical Line(12) = {1};
Physical Line(13) = {2};
Physical Line(14) = {3};
Physical Line(15) = {4};
Physical Surface(11) = {6};
```

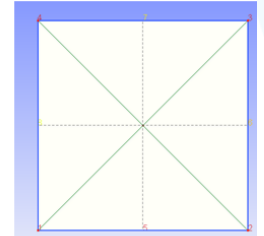
ثالثاً: يتم توليد الشبكة على شكل مثلثات من "Mesh" في موديل 2D



رابعاً: يتم توليد ملف خرج بامتداد " *.msh* " ويتم قراءة بيانات هذا الملف وفق ما هو مبين أدناه لشكل هندسي بسيط عبارة عن مربع تم تقسيمه إلى أربعة عناصر مثلثية وأربعة عناصر أحادية البعد تنطبق على أضلاع المربع :

ex1.geo

ex1.msh



يتم قراءة تليخ إنشاء الملف ونوع النسخة المستخدمة من البرنامج قبل قراءة العقد

```
Point(1) = {0, 0, 0, 0.5};
Point(2) = {1, 0, 0, 0.5};
Point(3) = {1, 1, 0, 0.5};
Point(4) = {0, 1, 0, 0.5};
Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {2, 3};
Line(3) = {3, 4};
Line(4) = {4, 1};
Line Loop(5) = {3, 4, 1, 2};
Plane Surface(6) = {5};
Physical Line(7) = {1};
Physical Line(8) = {2};
Physical Line(9) = {3};
Physical Line(10) = {4};
Physical Surface(11) = {6};
```

```
$MeshFormat
2 0 8
$EndMeshFormat
$Nodes
5
1 0 0 0
2 1 0 0
3 1 1 0
4 0 1 0
5 0.5 0.5 0
$EndNodes
$Elements
8
1 1 3 7 1 0 2
2 1 3 8 2 0 2 3
3 1 3 9 3 0 3 4
4 1 3 10 4 0 4 1
5 2 3 11 6 0 4 1 5
6 2 3 11 6 0 2 3 5
7 2 3 11 6 0 5 1 2
8 2 3 11 6 0 5 3 4
$EndElements
```

عدد العقد

عدد العناصر

رقم العنصر

عنصر أحادي البعد

عنصر مثلثي

مصفوفة الارتباط