الدارات الكهربائية
المحاضرة السادسة

أ.د. فادي غصنه

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

الهدف من ذلك إيجاد القيم لعناصر الدارات الكهربائية مثل التيارات والجهود،..إلخ.ويتم ذلك من خلال تبسيط الدارات الكهربائية وتمثيلها بالمعادلات الرياضية وتحويلها إلى أشكال مبسطة. والقوانين التي سوف نستخدمها في هذا الفصل، هي قوانين عامة يمكن استخدامها في الدارات الخطية للتيار المستمر وكذلك في حالة التيار المتناوب أخذين بعين الاعتبار عندئذ السعات وعناصر التحريض بعد استبدال منابع التيار المستمر بمولدات التيار المتناوب.

في هذا الفصل، تنحصر المواضيع في شرح الطرق والنظريات الأساسية لتبسيط وتحليل الدارات الكهربائية المؤلفة من منابع التيار، منابع الجهد والمقاومات الأومية فقط.

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

2-2 استعمال قانوني كيرشوف الأول والثاني

من الناحية العملية نواجه بعض الدارات الكهربائية التي يصعب تبسيطها باستخدام قانوني التسلسل و التفرع إلا أنه يسهل تحليل هذه الدارات الكهربائية (إيجاد المقاومة المكافئة لمجموعة المقاومات أو التيار الكهربائي المتدفق خلال عناصر الدارة) باستخدام قاعدتي كيرشوف نسبة إلى العالم جوستاف كيرتشوف.

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

يشار دوماً للتيارات الكهربائية المقاسة في دارة ما إلى اتجاه مرجعي، ويشار عادة إلى هذا الاتجاه بواسطة سهم على الشكل المراد دراسته، أو بواسطة الأحرف الذيلية المضافة لرمز التيار. ينص قانون كيرشوف الأول : أن المجموع الجبري للتيارات الكهربائية في عقدة يساوي الصفر. و يتم التعبير عن ذلك من خلال العلاقة الرياضية التالية :

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \qquad (1-2)$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

وهكذا يعتبر هذا القانون صورة لقانون حفظ الشحنة ، وغالبا ما تسمى هذه العلاقة بقاعدة التفرع وبشكل عام تستخدم قاعدة التفرع في تحليل دارة ما $(P-1)$ حيث P تشير إلى عدد العقد في الدارة الكهربائية.

أما قانون كيرشوف الثاني (قانون الجهود) أو يسمى في بعض الأحيان بقانون الحلقات، ينص على أن مجموع الجهود الكهربائية لعناصر مختلفة من الدارة الكهربائية تساوي الصفر. ويعبر عن ذلك رياضياً بالعلاقة التالية :

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = 0 \qquad (2-2)$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

يمكن حل دارات التيار المستمر بالحل المشترك لمجموعة المعادلات التي تمثل قانوني كيرشوف الأول و الثاني بالنسبة للدارة الكهربائية المعطاة، ويتم ذلك من خلال تحديد ما يلي:

- عدد معادلات التيار المستقلة (قانون كيرشوف الأول)
- عدد معادلات القوة المحركة الكهربائية المستقلة (قانون كيرشوف الثاني).

في دارة كهربائية تحوي على P فرع و q عقدة حيث أن القوة المحركة الكهربائية معروفة فيها، ويطلب تحديد قيم التيارات المارة في الفروع، أي أن عدد المجاهيل يساوي عدد الفروع P .

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

حسب قانون كيرشوف الأول يكون عدد معادلات التيار المستقلة مساوياً $(q-1)$.

أما حسب قانون كيرشوف الثاني فيكون عدد معادلات القوة المحركة الكهربائية معطى بالعلاقة $(3-2)$.

$$P-(q-1) \qquad (3-2)$$

لكتابة المعادلات باستخدام قانوني كيرشوف من أجل حل دارات التيار المستمر نتبع الخطوات التالية:

- ✓ تحديد اتجاه التيارات في فروع الدارة الكهربائية المعطاة بشكل افتراضي ومنطقي.
- ✓ افتراض اتجاه مرجعي للحلقة

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

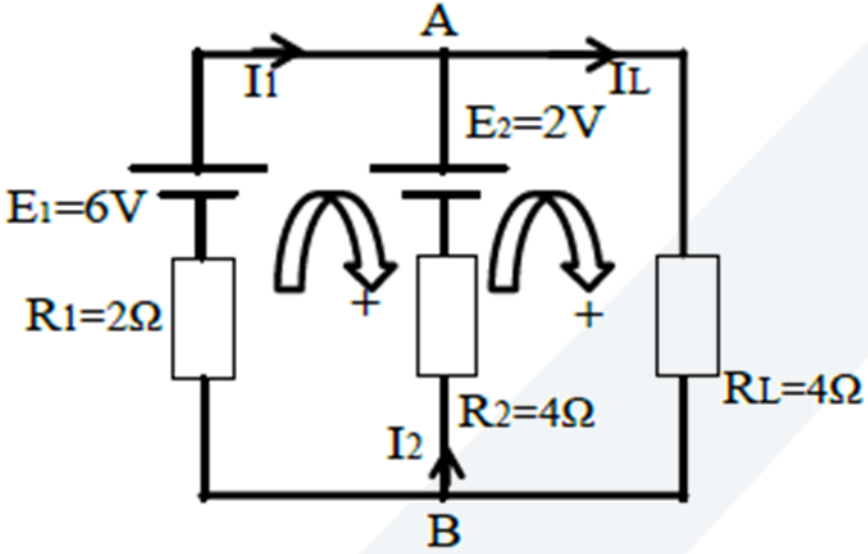
✓ كتابة المقادير الداخلة في تركيب معادلات الحلقة الواحدة، مع الأخذ بعين الاعتبار اتجاه منابع الجهد و اتجاه هبوطات الجهد على عناصر الدارة الكهربائية في تلك الحلقة. بحيث يكون :

- المنابع التي يتفق اتجاهها مع الاتجاه المرجعي للحلقة تأخذ إشارة موجبة.
- التيارات التي يتفق اتجاهها مع الاتجاه الموجب للدوران في الحلقة تأخذ إشارة موجبة.

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

مثـــال 2 – 1

احسب قيمة التيارات المارة في فروع الدارة الكهربائية التالية المعطاة بالشكل (2 – 2) مستخدماً قانوني كيرشوف



الشكل (2 – 1)

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

بعد تحديد اتجاه التيارات المارة في فروع الدارة بشكل افتراضي، وكذلك الاتجاه الموجب للحلقة مع عقارب الساعة، يمكن أن نكتب ما يلي :

$$\left.\begin{aligned} E_1 - E_2 &= I_1R_1 - I_2R_2 \\ E_2 &= I_2R_2 + I_LR_L \end{aligned}\right\}$$ معادلات الحلقات

معادلة التيارات في العقدة A تعطى ب $I_1 + I_2 = I_L$

بالحل المشترك نحصل على :

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

$$E_2 = I_2 R_2 + (I_1 + I_2) R_L \Rightarrow E_2 = I_2 (R_2 + R_L) + I_1 R_L$$

من معادلات الحلقات نحصل على :

$$4 = 2I_1 - 4I_2 \Rightarrow I_1 = 2 + 2I_2$$

$$2 = 4I_2 + 4I_L \Rightarrow 1 = 2I_2 + 2I_L \Rightarrow 1 = 2I_2 + 2I_1 + 2I_2 = 4I_2 + 2I_1 \Rightarrow$$

$$1 = 4I_2 + 2(2 + 2I_2) \Rightarrow I_2 = \frac{1-4}{8} = -0.375A$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

بما أن إشارة التيار سالبة عندئذ اتجاه التيار المفروض خطأ و الاتجاه الصحيح عكس ما هو مفروض.

من أجل حساب التيار I_1 نعوض في معادلات الحلقات

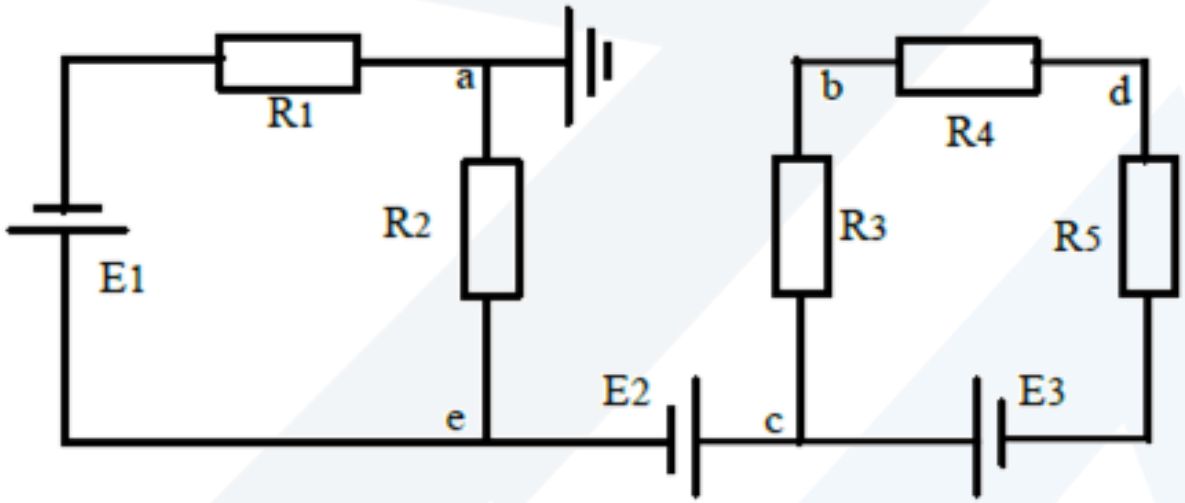
$$I_1 = 2 + 2I_2 \Rightarrow I_1 = 2 - 2 \times 0.375 = 1.25A$$

من أجل حساب التيار I_L نعوض في معادلة التيارات فنحصل على :

$$I_L = I_1 + I_2 \Rightarrow I_L = 1.25 - 0.375 = 0.875A$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

مثـــال 2 – 2



الشكل (2 – 2)

أحسب قيمة التوتر بين النقطتين a و b في الدارة الكهربائية المبينة بالشكل (2 – 2)

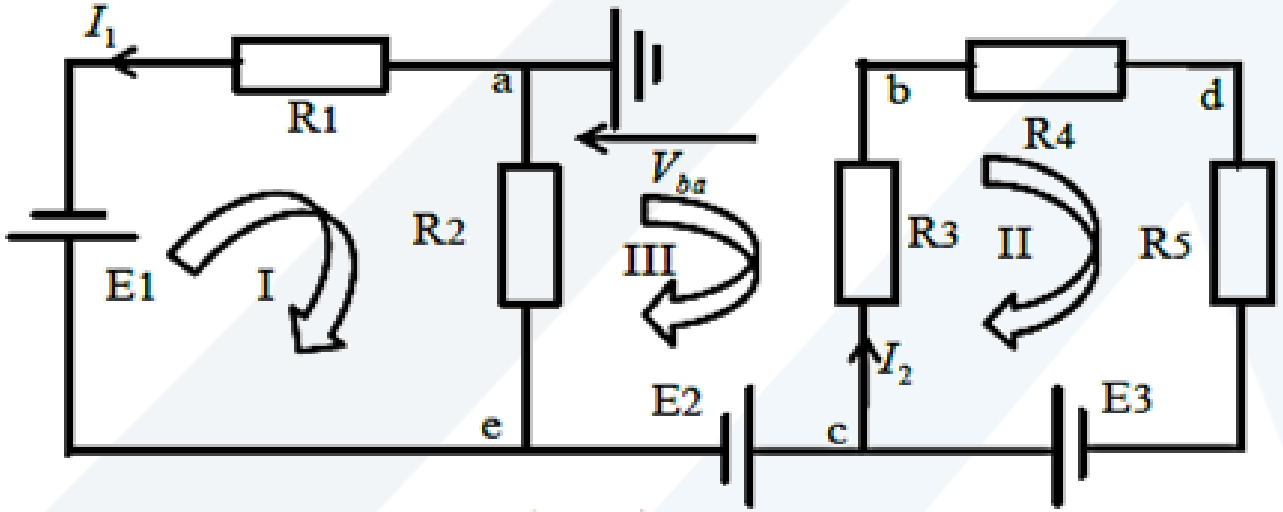
إذا علمت أن

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

$$R_1 = R_4 = R_5 = 1\Omega, R_2 = 2\Omega, R_3 = 3\Omega$$

$$E_1 = 10V, E_2 = 1V, E_3 = 4V$$

الحـــــل



الشكل (3 – 2)

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

بتطبيق قانون كيرشوف الثاني في الحلقة I و الحاوية على منبع الجهد E_1 نجد ما يلي

$$-E_1 = -I_1(R_1 + R_2)$$

من خلال هذه العلاقة يتم حساب التيار I_1 ، فنجد :

$$I_1 = \frac{E_1}{(R_1 + R_2)} = \frac{10}{1+2} = 3.33A$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

نطبق مرة ثانية قانون كيرشوف الثاني في الحلقة الثانية II و الحاوية على منبع الجهد E_2 ، فنجد ما يلي :

$$E_3 = I_2(R_3 + R_4 + R_5)$$

من خلال هذه العلاقة يتم حساب التيار I_2 ، فنجد :

$$I_2 = \frac{E_3}{(R_3 + R_4 + R_5)} = \frac{4}{3+1+1} = 0.8A$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

يتم افتراض منبع جهد وهمي E_4 بين النقطتين a و b حيث القطب السالب من جهة النقطة a . عندئذ نطبق قانون كيرشوف الثاني في الحلقة الثالثة III و الحاوية على منبع التوتر E_3 فنجد :

$$E_4 - E_2 = -I_2R_3 + I_1R_2$$

من العلاقة السابقة و بعد التعويض العددي نجد :

$$E_4 = E_2 - I_2R_3 + I_1R_2 = 1 - 0.8\times 3 + 3.33\times 2 = 5.26V$$

التوتر بين النقطتين a و b يسمى V_{ba} باعتبار أن النقطة a هي المؤرضة

$$V_{ba} = V_b - V_a = E_4 \Rightarrow V_b = 5.26V$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

طريقة التيارات الحلقية (تيارات ماكسويل):

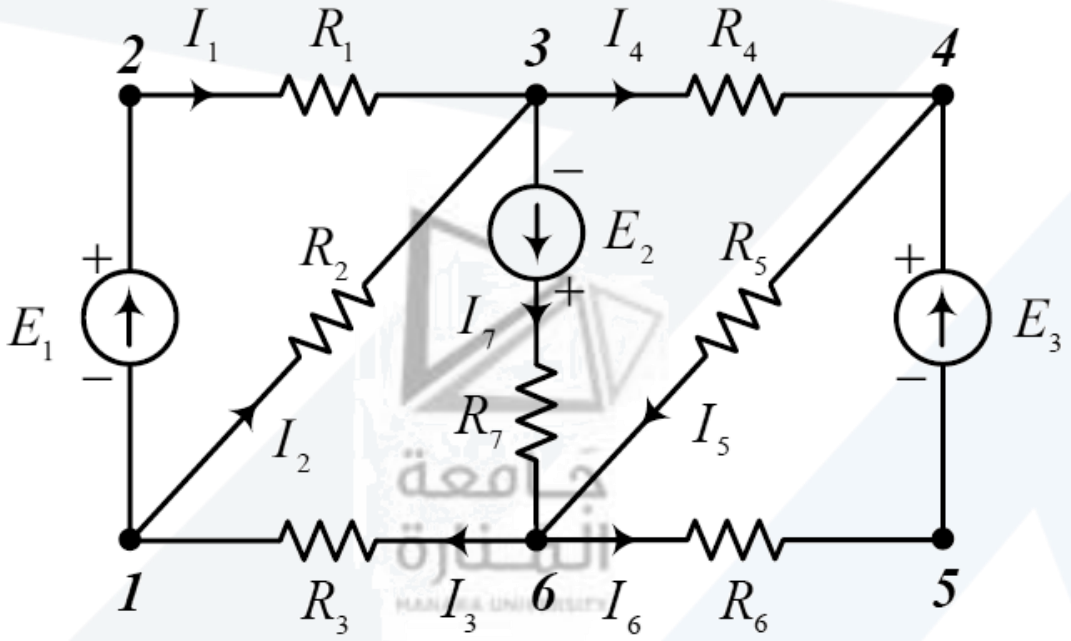
Mesh Currents method

لحساب الدارة باستخدام قانوني كيرشوف نحتاج كما وجدنا سابقاً لحل جملة معادلات عددها مساوٍ لعدد المجاهيل. وتُعد هذه الطريقة عامة وسيئتها الحاجة إلى وقت كبير في الحساب.

استخدام طريقة التيارات الحلقية يسمح بحل المسألة نفسها بأقل عدد من المعادلات، إذا نحتاج فقط إلى B (عدد الحلقات المستقلة) معادلة بدلاً من Z معادلة.

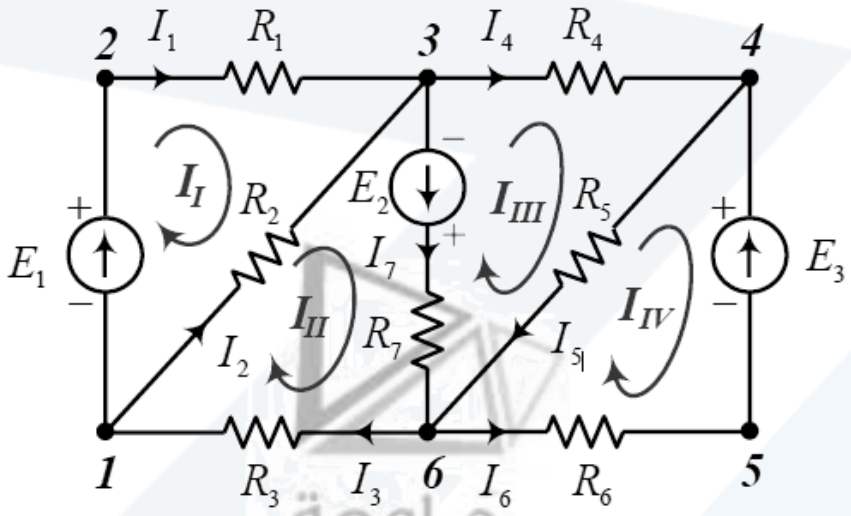
وفقاً لهذه الطريقة نحتاج إلى معرفة عدد الحلقات المستقلة في الدارة، حيث نضع في كل حلقة مستقلة اتجاه افتراضي للتيار، يمثّل التيار الحلقي الخاص بهذه الحلقة، والذي يعبّر عن قيمة حسابية تكون واحدة من أجل جميع عناصر الحلقة، كما في الدارة التالية.

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية



نفرض تيارات حلقية داخل الحلقات المستقلة.

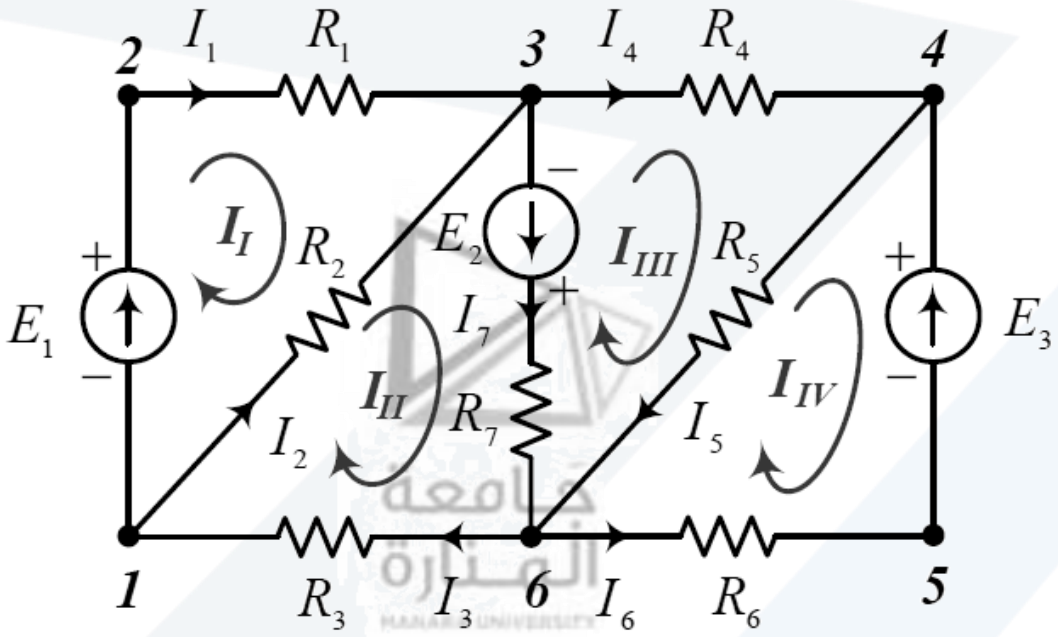
طرق حل دارات التيار المستمر الخطية



يمكن من خلال الشكل ملاحظة أن الفروع المستقلة في الدارة تكون مشتركة بين حلقتين متجاورتين، وبالتالي تتحد القيمة الفعلية للتيار في مثل هذه الفروع من خلال الجمع الجبري للتيارات الحلقية المتجاورة في الحلقات المشتركة بهذا الفرع. مثلاً: يدخل الفرع 3-1 ذي المقاومة R_2 في مجال الحلقتين المتجاورتين I و II، فالتيار الفعلي I_2 الذي يسري في هذا الفرع يساوي المجموع الجبري للتيارات الحلقية للحلقتين I و II، أي:

$$I_2 = I_{II} - I_I$$

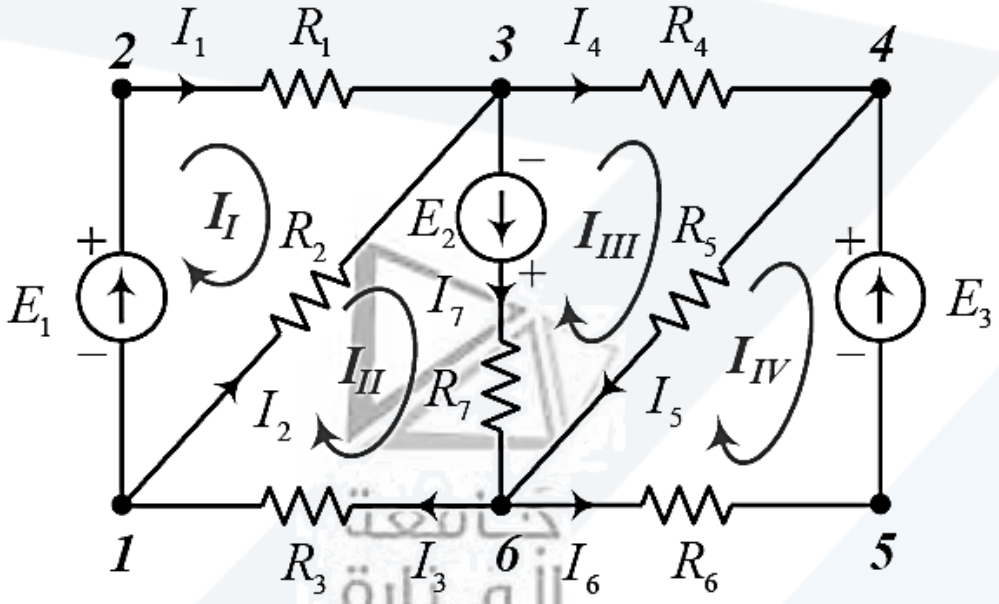
طرق حل دارات التيار المستمر الخطية



التيار الفعلي المار في المقاومة R_1 هو قيمة التيار الحلقي II نفسه، أي:

$$I_1 = I_I$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

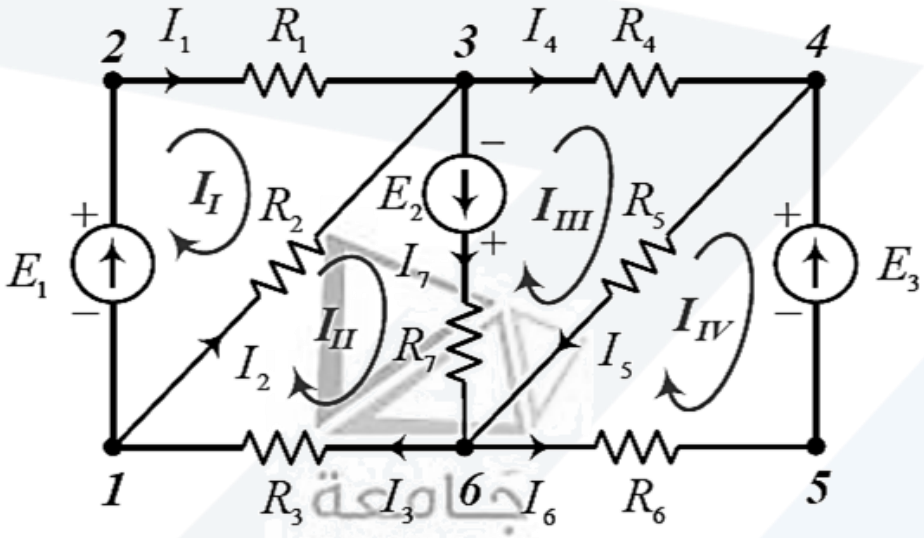


ويتم بالطريقة نفسها تحديد باقي التيارات في الفروع، فنجد أن:

$$I_3 = I_{II} \quad , \quad I_4 = I_{III} \quad , \quad I_5 = I_{III} - I_{IV}$$

$$I_6 = -I_{IV} \quad , \quad I_7 = I_{II} - I_{III} .$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية



تُكتب المعادلات المعتمدة على التيارات الحلقية وفق قانون كيرشوف الثاني كما يأتي:

في الحلقة I: $E_1 = I_I \cdot (R_1 + R_2) - I_{II} \cdot R_2$

في الحلقة II: $E_2 = -I_I \cdot R_2 + I_{II} \cdot (R_2 + R_3 + R_7) - I_{III} \cdot R_7$

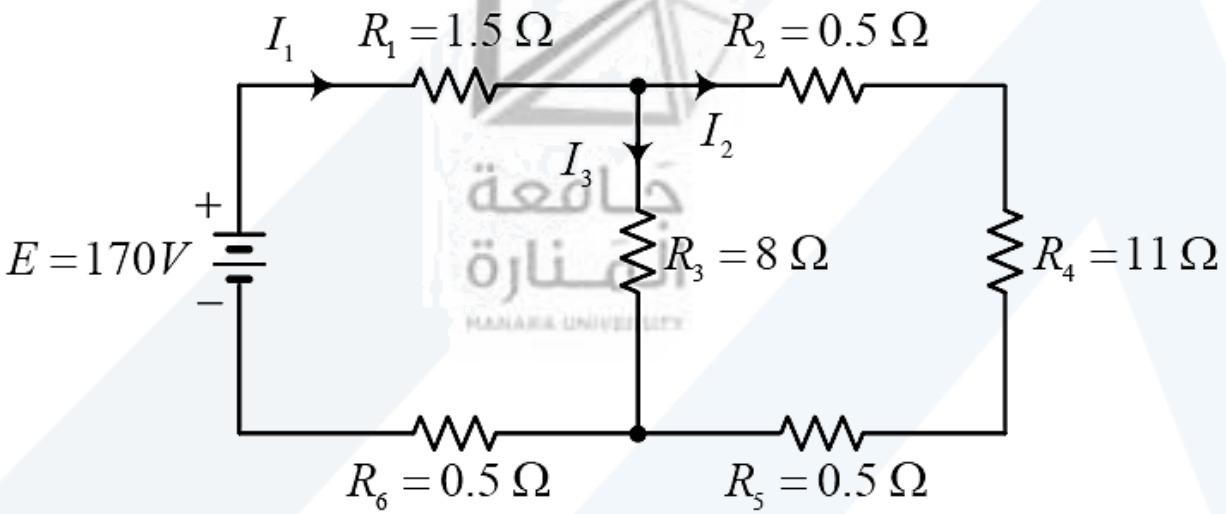
في الحلقة III: $-E_2 = -I_{II} \cdot R_7 + I_{III} \cdot (R_4 + R_5 + R_7) - I_{IV} \cdot R_5$

في الحلقة IV: $-E_3 = I_{IV} \cdot (R_5 + R_6) - I_{III} \cdot R_5$

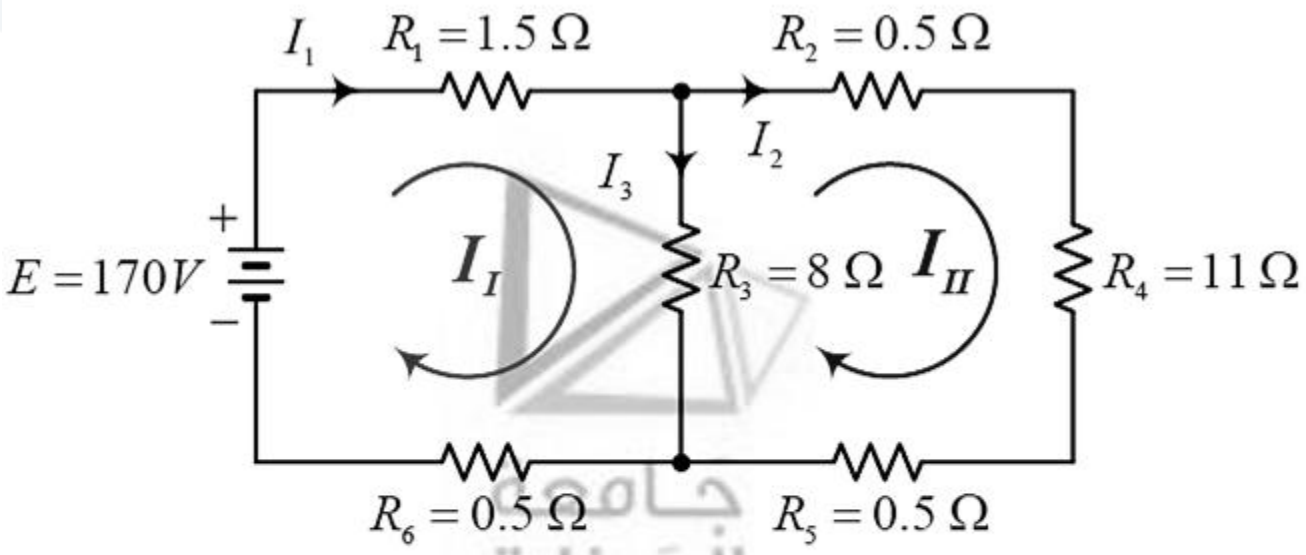
طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

مثال:

احسب قيم التيارات في الدارة المبينة بالشكل، وذلك باستخدام طريقة التيارات الحلقية (ماكسويل).



طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

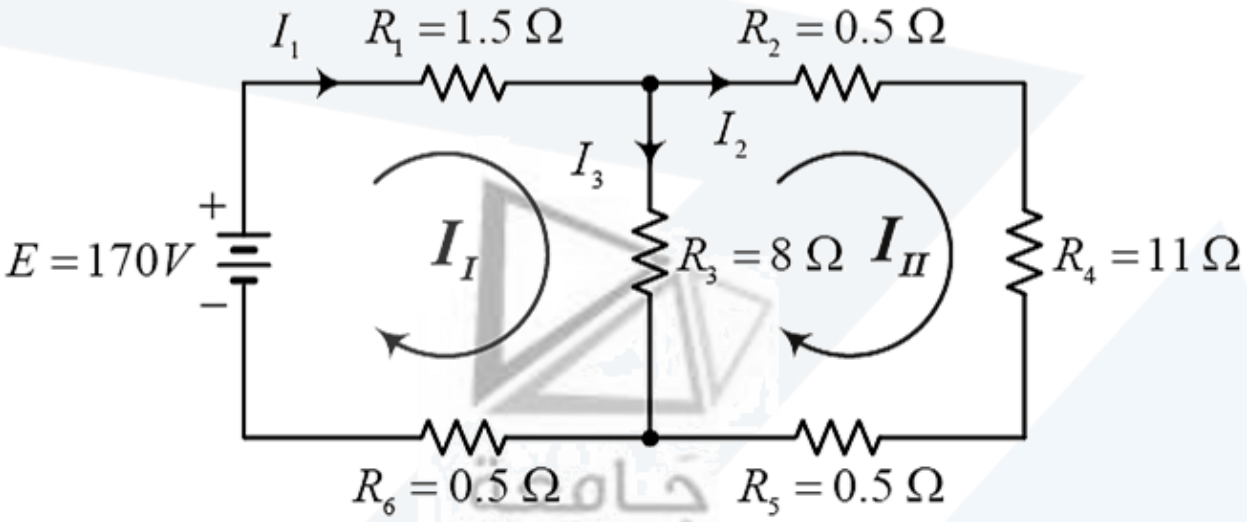


معادلة الحلقة الأولى I:

$$E = I_I \cdot (R_1 + R_3 + R_6) - I_{II} \cdot R_3$$

$$170 = 10 I_I - 8 I_{II} \qquad (1)$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية



معادلة الحلقة الثانية II:

$$0 = I_{II} \cdot (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - I_I \cdot R_3$$

$$0 = 20 I_{II} - 8 I_I \Rightarrow I_I = \frac{20}{8} \cdot I_{II} \qquad (2)$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

$$170 = 10I_I - 8I_{II} \qquad (1)$$

$$0 = 20I_{II} - 8I_I \Rightarrow I_I = \frac{20}{8} \cdot I_{II} \qquad (2)$$

نعوض (2) في (1):

$$170 = 10 \cdot \frac{20}{8} \cdot I_{II} - 8I_{II} \Rightarrow I_{II} = \frac{170}{17} = 10\,[A] \Rightarrow I_2 = 10\,[A]$$

نعوض في (2):

$$I_I = \frac{20}{8} \times 10 = \frac{200}{8} = 25\,[A] \Rightarrow I_1 = 25\,[A]$$

التيار في الفرع المشترك I_3 يساوي:

$$I_3 = I_I - I_{II} = 25 - 10 = 15\,[A]$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

2-3 نظرية التنضيد

تنص نظرية التنضيد على أنه في أي دارة كهربائية تحتوي على أكثر من مصدر للقوى المحركة الكهربائية: التيار في أي فرع من فروع الدارة الكهربائية يساوي المجموع الجبري للتيارات المارة في ذلك الفرع والناتجة عن تأثير كل منبع من منابع القوى المحركة الكهربائية بشكل منفرد وحذف بقية المنابع و الاستعاضة عنها بمقاوماتها الداخلية (قصر منابع الجهد وفتح منابع التيار).

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

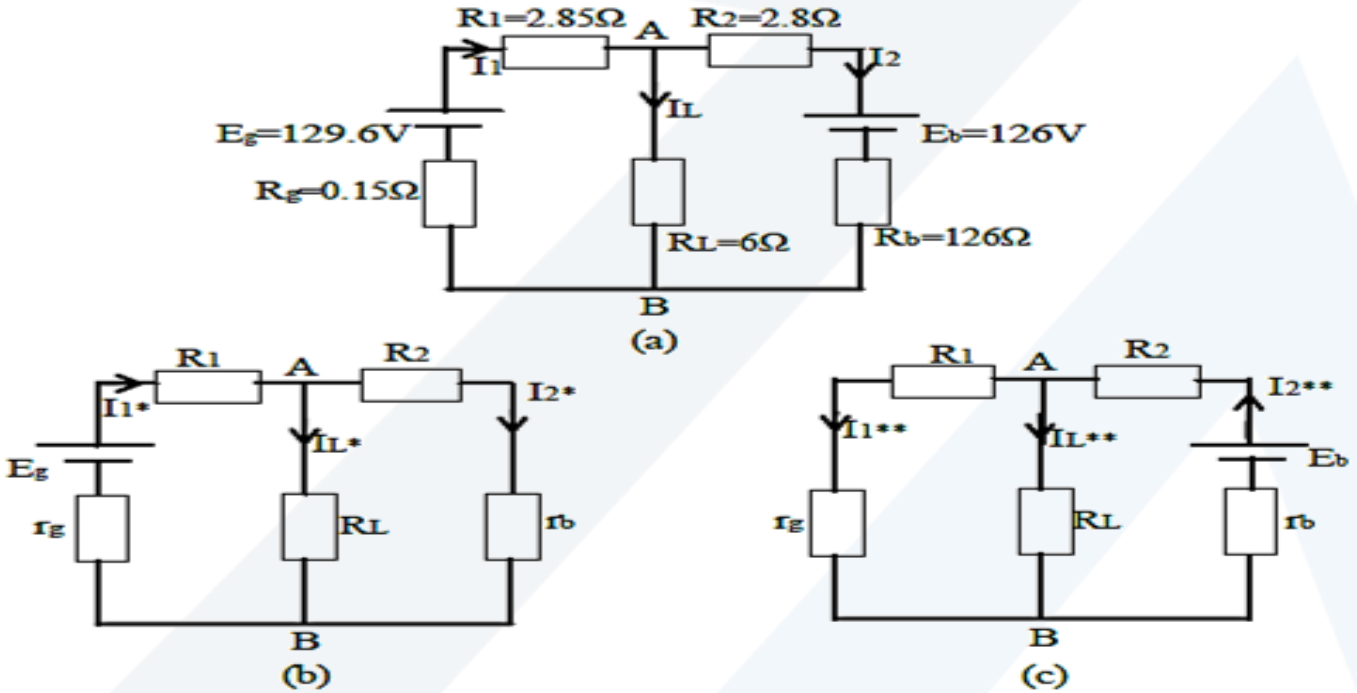
الخطوات المتبعة لحل دارات التيار المستمر وفق هذه النظرية هي :

1. اختيار منبع للجهد أو منبع للتيار في الدارة المعطاة
2. حذف بقية منابع الجهد والتيار و الاستعاضة عن منابع الجهد بمقاوماتها الداخلية (عندما تكون المقاومة الداخلية لمنبع الجهد معدومة نعوض عن المنبع بسلك)، أما بالنسبة إلى منابع التيار فيتم فتحها.
3. حساب التيارات (الجهود) لكل فرع من فروع الدارة مع تحديد اتجاه التيارات و قطبية الجهود.
4. تكرار الخطوات السابقة من أجل كل منبع جهد أو تيار
5. التيار في أحد فروع الدارة يساوي المجموع الجبري للتيارات المارة في ذلك الفرع (المجموع الجبري لهبوطات الجهد في ذلك الفرع) عندما يؤثر كل منبع وحده وحذف بقية المنابع.

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

مثـــــال 2 – 3

احسب التيارات المارة في فروع الدارة باستخدام نظرة التنضد



الشكل (2 – 4)

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

الحـــل

1- نحذف المدخرة B ونستعيض عنها بمقاومتها الداخلية r_b مع إبقاء E_g كما هو مبين في الشكل $(b4-2)$ ونحسب التيارات I_{1*}, I_{2*}, I_{L*} ويتم ذلك وفق التالي:

$$I_{1*} = \frac{E_g}{R_1 + r_g + \dfrac{R_L(R_2 + r_b)}{R_L + (R_2 + r_b)}} = 24A$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

باستخدام مقسم التيار نكتب :

$$I_{2*} = I_{1*}\frac{R_L}{R_L + (R_2 + r_b)} = 14.4A$$

حسب قانون كيرشوف الأول في العقدة A نكتب التالي:

$$I_{L*} = I_{1*} - I_{2*} = 24 - 14.4 = 9.6A$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

2- نحذف المدخرة g ونستعيض عنها بالمقاومة الداخلية r_g مع المحافظة على المنبع E_b من ثم نحسب التيارات $I_{1**}, I_{2**}, I_{L**}$ كما هو مبين الشكل: $(c4-2)$

$$I_{1**} = \frac{E_b}{R_2 + r_b + \frac{R_L(R_1 + r_g)}{R_L + (R_1 + r_g)}} = 21A$$

باستخدام مجزئ التيار نكتب ما يلي:

$$I_{L**} = I_{2**} \frac{R_1 + r_g}{R_L + (R_1 + r_g)} = 7A$$

حسب قانون كيرشوف الأول

$$I_{1**} = I_{2**} - I_{L**} = 14A$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

3- نطبق نظرية التنضد وفق مايلي الشكل $((a4-2))$:

$$I_1 = I_{1*} - I_{1**} = 24 - 14 = 10A$$

$$I_2 = I_{2*} - I_{2**} = 14.4 - 21 = -6.6A$$

$$I_L = I_{L*} + I_{L**} = 9.6 + 7 = 16.6A$$

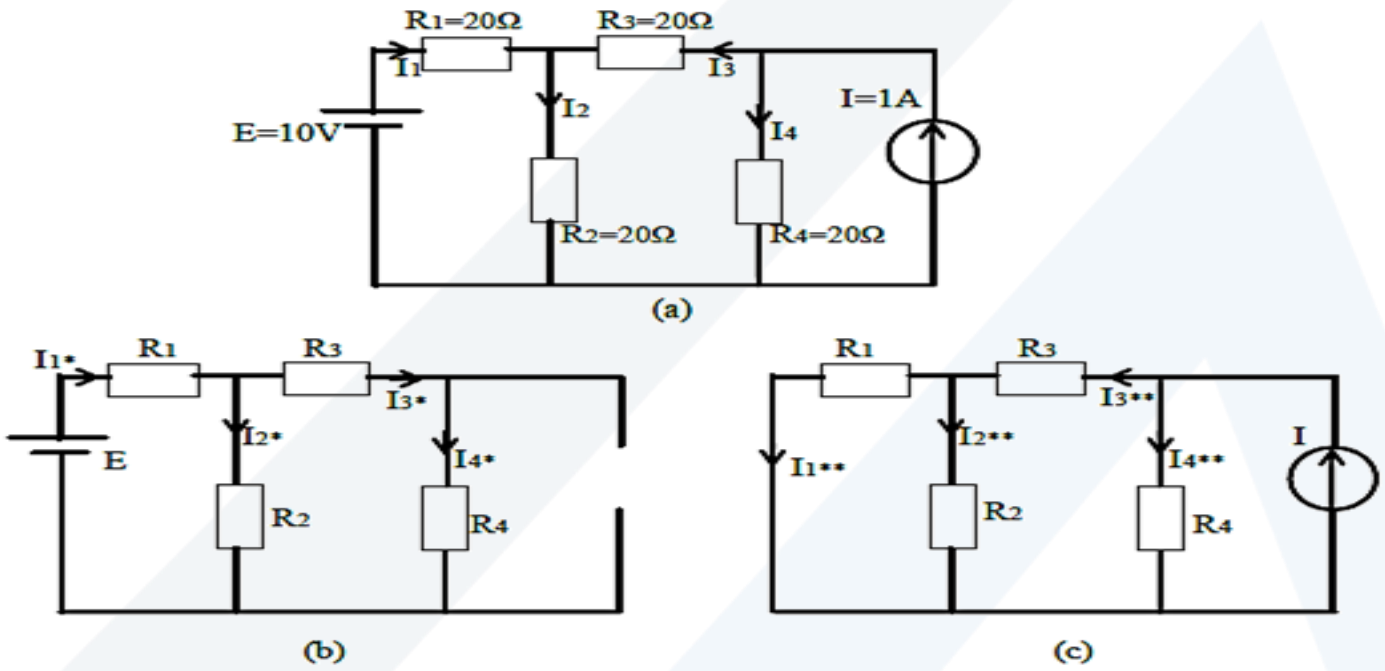
الحد I_{2**} إشارته سالبة لأنه معاكس لاتجاه التيار I_2 .

اتجاه التيار I_2 خاطئ والاتجاه الصحيح هو عكس ما هو مفروض وذلك بسبب إشارته السالبة.

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

مثـــال 2 – 4

احسب قيم التيارات في فروع الدارة الكهربائية المعطاة في الشكل (2 – 5) باستخدام نظرية التنضد.



الشكل (2 – 5)

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

الحـــــل

1- التيارات في فروع الدارة نتيجة تأثير منبع الجهد E الشكل $(b5-2)$:

$$I_{1*} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+(R_3+R_4)}} = \frac{10}{10 + \frac{10\times(10+10)}{10+(10+10)}} = 0.6A$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

باستخدام مجزئ التيار نوجد قيمة التيار I_{2*}

$$I_{2*} = I_{1*}\frac{R_3 + R_4}{R_2 + (R_3 + R_4)} = 0.6\frac{10+10}{10+10+10} = 0.4A$$

باستخدام قانون كيرشوف الأول نوجد قيمة التيار I_{3*} و التيار I_{4*}

$$I_{3*} = I_{4*} = I_{1*} - I_{2*} = 0.6 - 0.4 = 0.2A$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

2- التيارات في فروع الدارة نتيجة تأثير منبع التيار I بمفرده الشكل $(c5-2)$

$$I_{3**} = I\frac{R_4}{R_4 + R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} = 1\times\frac{10}{10+10+\frac{10\times10}{(10+10)}} = 0.4A$$

باستخدام قانون كيرشوف الأول نوجد قيمة التيار I_{4**}

$$I_{4**} = I - I_{3**} = 1 - 0.4 = 0.6A$$

باستخدام قانون مجزئ التيار نوجد ما يلي:

$$I_{1**} = I_{3**}\frac{R_2}{R_1+R_2} = 0.4\times\frac{10}{10+10} = 0.2A$$

باستخدام قانون كيرشوف الأول نوجد قيمة التيار I_{2**}

$$I_{2**} = I_{3**} - I_{1**} = 0.4 - 0.2 = 0.2A$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

3- تطبيق نظرية التنضد لإيجاد التيارات نتيجة تأثير كل من منبع الجهد E ومنبع التيار I الشكل $(a5-2)$.

$$I_1 = I_{1*} - I_{1**} = 0.6 - 0.2 = 0.4A$$

$$I_2 = I_{2*} + I_{2**} = 0.4 + 0.2 = 0.6A$$

$$I_3 = I_{3*} - I_{3**} = 0.4 - 0.2 = 0.2A$$

$$I_4 = I_{4*} + I_{4**} = 0.2 + 0.6 = 0.8A$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

4-2 نظرية ثيفنين

تعد نظرية ثيفنين من أهم النظريات، فهي تشكل القاعدة التي يرتكز عليها المنطق المستخدم في إيجاد الشبكة الكهربائية المكافئة لنظام فيزيائي.

بفرض شبكة كهربائية تحتوي على مجموعة من المقاومات الكهربائية ومصادر للقوى المحركة الكهربائية كما هو مبين بالشكل $(2-6)$ وذات النهايتين A, B في هذه الحالة : العلاقة التي تربط بين التوتر والتيار المار هي علاقة خطية.

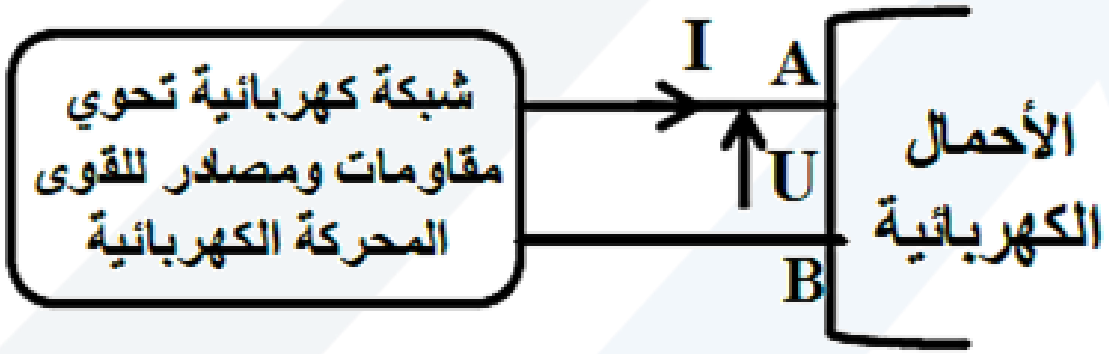
$$U = K_1 - K_2 I \qquad (4-2)$$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

حيث أن :

K_1 : ثابت، تعتمد قيمته على مصادر القوى المحركة الكهربائية للشبكة الكهربائية بين النقطتين A, B

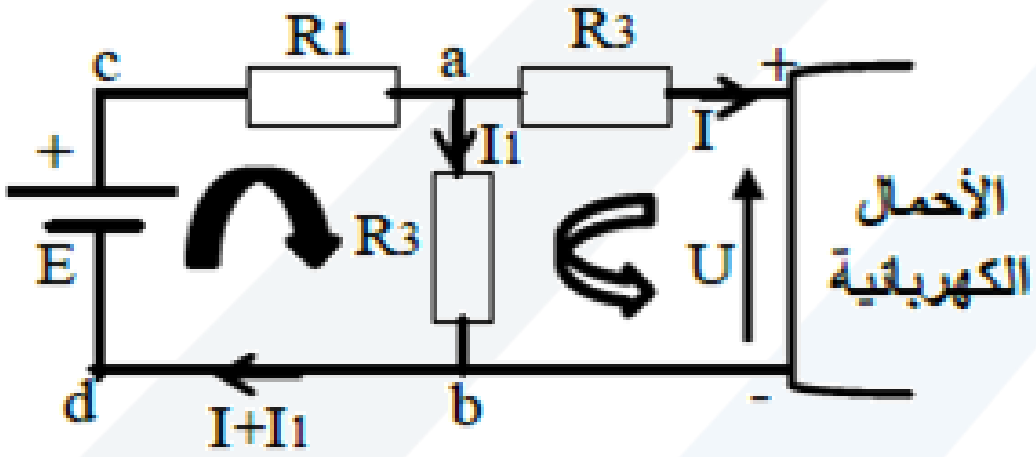
K_2 : ثابت، تتعلق قيمته بالمقاومات الكهربائية المكونة للشبكة المعطاة والمراد دراستها.



الشكل $(6-2)$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

بتطبيق قانون كيرشوف الثاني (قانون الحلقات) في الحلقة abdca من الدارة الكهربائية التالية والموضحة بالشكل (2 – 7) نحصل على :



الشكل (2 – 7)

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

$$E = R_1(I + I_1) + R_2 I_1 \qquad (5-2)$$

بتطبيق قانون كيرشوف الثاني في الحلقة الحاوية على الأحمال الكهربائية نحصل على :

$$U = I_1 R_2 - R_3 I \qquad (6-2)$$

من العلاقة $(5-2)$ نحصل على :

$$I_1 = \frac{E - R_1 I}{R_1 + R_2} \qquad (7-2)$$

بتعويض قيمة I_1 من العلاقة $(7-2)$ في المعادلة $(6-2)$ نحصل على :

$$E = \left(\frac{E - R_1 I}{R_1 + R_2}\right).R_2 - R_3 I = \frac{E R_2}{R_1 + R_2} - \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3\right).I \qquad (8-2)$$

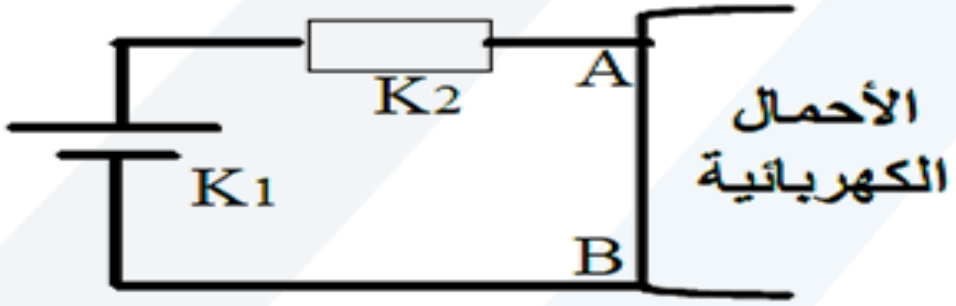
طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

بالمقارنة ما بين العلاقتين $(2-4)$ و $(2-8)$ اللتين لهما نفس الشكل نجد ما يلي:

$$K_1 = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} \qquad (9-2)$$

$$K_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \qquad (10-2)$$

اعتماداً على ذلك، يمكن استبدال الدارة المعطاة بالشكل $(2-8)$ بالدارة التالية المبينة بالشكل $(2-8)$:



الشكل $(2-8)$

طرق حل دارات التيار المستمر الخطية

بالمقارنة أيضاً بين الشكل $(2-7)$ والشكل $(2-8)$، نجد أن :

- K_1 : هو التوتر بين النقطتين A, B وذلك عندما يكون $I=0$، أي أن $K_1 = E_0$ حيث أن E_0 هو التوتر بين النقطتين A, B عندما تكون الدارة مفتوحة.

- K_2 : هو المقاومة المكافئة بعد فتح منابع التيار وقصر منابع الجهد (التوتر) حيث عندئذ الدارة لا تحوي إلا المقاومات الكهربائية فقط ويعبر عن ذلك من خلال :

$$K_2 = R_{eq} = R_{th}$$