Numerical analysis

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2022-2023

جـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

Numerical analysis

Lecture 2

(ERRORS)

مقدمة

يجد المهندسون والعلماء أنفسهم باستمرار مضطرين لتحقيق الأهداف واتخاذ القرارات بناءً على معلومات غير مؤكدة.
على الرغم من أن الكمال هدف جدير بالثناء، إلا أنه نادرًا ما يتم تحقيقه.
على سبيل المثال، على الرغم من أن النموذج الذي تم تطويره من قانون نيوتن الثاني
قانون نيوتن الثاني: F=ma (القوة =الكتلة x السرعة)
هو تقدير تقريبي ممتاز، إلا أنه لن يتنبأ مطلقًا من الناحية العملية بسقوط القفز بالحبال. قد تؤدي مجموعة متنوعة من العوامل، مثل الرياح والاختلافات الطفيفة في مقاومة الهواء ، إلى انحرافات عن التنبؤ.

التحليل العددي هو علم التقريب حيث يتم استخدام الطرق العددية لحل المسائل المعقدة التي لا يمكن حلها بالطرق التحليلية. وينشأ عن استخدام هذه الطرق العددية أخطاء يجب معرفتها عند الحصول على أي إجابة ، وذلك لكي نحكم على قبول هذه الإجابة أو رفضها.

يجب أن تكون الطرق العددية **دقيقة** و **غير متحيزة** بما يكفي لتلبية متطلبات مسألة معينة. كما يجب أن تكون دقيقة بما يكفي لتصميم مناسب. لذلك سنتطرق في هذه المحاضرة إلى **بعض أنواع الأخطاء** لتحديد مصادرها وطرائق حسابها لنتمكن من تقليل تضخمها في الموضوعات المدروسة.

تعريفات الأخطاء (Error Definitions)

تنشأ الأخطاء العددية من استخدام التقريب لتمثيل الأوصاف والعمليات الرياضية الدقيقة. بالنسبة لمثل هذه الأخطاء، يمكن صياغة العلاقة بين **النتيجة الدقيقة** أو الحقيقية و**التقريب** على أنها

القيمة الحقيقية = التقريب + الخطأ (١)

وبإعادة الترتيب نحصل على:

الخطأ =القيمة الحقيقية - التقريب (٢)

يستخدم لتحديد القيمة الدقيقة للخطأ.

إذا كان التقريب أكبر من القيمة الحقيقية، فسيكون الخطأ سالبًا بينما إذا كان أصغر من القيمة الحقيقية ، سيكون الخطأ موجباً، لذلك يتم التعبير عن الخطأ الحقيقي بشكل عام كقيمة مطلقة ويشار إليه **بالخطأ المطلق**.

تعريفات الأخطاء (Error Definitions)

الخطأ المطلق: (Absolute error) يعرف بأنه عبارة عن الفرق بين القيمة الحقيقية x والقيمة التقريبية x_1 ، ويرمز له بـ E_t ، ويعطى بالعلاقة:

$$E_t = \left| x - x_1 \right|$$

تم تضمين الرمز "t" للإشارة إلى أن هذا هو الخطأ "الحقيقي".

مثلاً لو قسنا طول غرفة وطول المسافة من اللاذقية إلى دمشق وكان الخطأ المطلق نفسه ، فأي القياسين أدق؟ طبعا المسافة من اللاذقية إلى دمشق أدق.

فمن عيوب هذا التعريف **(الخطأ المطلق)** أنه لا يأخذ في الحسبان **حجم القيمة** قيد الدراسة. أي لا يعطي فكرة حقيقية عن دقة القياس لذلك سنتطرق إلى تعريف **الخطأ النسبي** كما يلي:

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

تعريفات الأخطاء (Error Definitions)

الخطأ النسبي للقيمة الحقيقية (Relative error): وهو عبارة عن الخطأ المطلق مقسوماً على القيمة الحقيقية، ويرمز له بـ E_r،ويعطى بالعلاقة:

$$E_r = \frac{E_t}{|x|} = \frac{|x - x_1|}{|x|}$$

على الرغم من أن هذا المقياس مفيد إلا أنه عادةً يتم ضرب الخطأ الجزئي النسبي في ١٠٠٪ للتعبير عن الخطأ **كنسبة مئوية**. ويعرّف كالآتي:

تعريفات الأخطاء (Error Definitions)

الخطأ المئوي (Percentage error) : وهو عبارة عن الخطأ النسبي للقيمة الحقيقية مضروباً بـ 100 أي:

$$\varepsilon_t = E_r \times 100\% = \frac{|x - x_1|}{|x|} \times 100\%$$

ε_t هي النسبة المئوية للخطأ النسبي للقيمة **الحقيقية** .

مثال١ : بفرض أن لديك مهمة قياس أطوال جسر وبرشام وتوصل إلى ٩٩٩٩ و ٩ سم على التوالي. إذا كانت القيم الحقيقية ١٠٠٠٠ و ١٠ سم ، على التوالي . احسب الخطأ المطلق والنسبي والمئوي؟

تعريفات الأخطاء (Error Definitions)

الحل:

إن كلا القياسين لهما خطأ مطلق قدره ١ سم ومع ذلك أخطائهم النسبية 0.0001 و 0.1على التوالي، والخطأ المئوي 0.01٪ و 10٪ على التوالي.

نلاحظ إن الخطأ في كلتا الحالتين هو ١ سم لكن الخطأ النسبي للبرشام أكبر بكثير. نستنتج أننا قمنا بعمل مناسب لقياس الجسر.

بالنسبة لمثال البرشام والجسر ، تم تزويدنا بالقيمة الفعلية. ومع ذلك في المواقف نادرا ما تكون هذه المعلومات متاحة. بالنسبة للطرق العددية ، لن تُعرف القيمة الحقيقية إلا عندما نتعامل مع التوابع التي يمكن حلها تحليليًا.

أي في **تطبيقات العالم الحقيقي** ، من الواضح أننا لن نعرف الإجابة الصحيحة مسبقًا. بالنسبة لهذه الحالات ، يتمثل البديل كما في:

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

تعريفات الأخطاء (Error Definitions)

الخطأ المئوي للقيمة التقريبية : وهو عبارة عن الخطأ النسبي للقيمة التقريبية مضروباً بـ أي:

$$\varepsilon_a = \frac{|\text{خطأ التقريب}|}{|\text{قيمة التقريبية}|} \times 100\%$$

ε_a هي النسبة المئوية للخطأ النسبي للقيمة التقريبية . (حيث يشير الرمز a إلى أن الخطأ بالنسبة إلى قيمة تقريبية).

تتمثل إحدى تحديات الطرق العددية **لتطبيقات العالم الحقيقي** في تحديد تقديرات الخطأ في غياب المعرفة المتعلقة بالقيمة الحقيقية.

تعريفات الأخطاء (Error Definitions)

على سبيل المثال ، تستخدم بعض **الطرق العددية** التكرار. يتم تنفيذ هذه العملية بشكل متكرر ، لحساب التقريبات الأفضل. في مثل هذه الحالات ، **غالبًا ما يتم تقدير الخطأ على أنه الفرق بين التقديرات السابقة والحالية**. وبالتالي ، يتم تحديد النسبة المئوية للخطأ النسبي وفقًا لـ

الخطأ المئوي للقيمة التقريبية في الطرق التكرارية

$$\varepsilon_a = \frac{|\text{القيمة التقريبية الحالية} - \text{القيمة التقريبية السابقة}|}{|\text{القيمة التقريبية الحالية}|} \times 100\%$$

هناك طرق أخرى للتعبير عن الأخطاء.

(3)
ε_s

.

تعريفات الأخطاء (Error Definitions)

عند تنفيذ طريقة عددية تكرارية ، **يجب أن نفكر في وقت التوقف عن التكرار**. للقيام بذلك، يجب علينا تحديد قيمة مقبولة لنسبة الخطأ النسبي

$$\varepsilon_a < \varepsilon_s \qquad (3)$$

ε_s **هو النسبة المئوية للخطأ الأعظمي المرتكب.**

يشار إلى العلاقة (3) على أنها **معيار إيقاف**. إذا تم استيفائها ، فمن المفترض أن تكون نتيجتنا ضمن المستوى المقبول المحدد مسبقًا .

أنواع الأخطاء:

تنقسم الأخطاء إلى أربعة أنواع يمكن ترتيبها على النحو التالي:

النوع الأول: أخطاء الصيغ (Formulation Errors)

تنشأ هذه الأخطاء عن بعض الصيغ والعلاقات التي تصف الحوادث الفيزيائية والهندسية ما هي إلا علاقات تقريبية في معظم الحالات. أو إنها تحوي على ثوابت لا يمكن تعيينها بدقة نهائية كما في الثوابت الفيزيائية.

النوع الثاني: أخطاء الاقتطاع (Truncation Errors)

تنشأ هذه الأخطاء من القوانين الرياضية حيث أنه في معظم الأحيان نكتب التوابع بشكل متسلسلات غير منتهية ، وعند إجراء نكتفي بعدد منته من حدود تلك المتسلسلات وهذا ما يؤدي إلى أخطاء مرتكبة ، وكمثال على ذلك:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\frac{2}{3}$

أنواع الأخطاء:

النوع الثالث: أخطاء القياس (Measurement Errors)

تنشأ هذه الأخطاء عن قياس بعض المقادير ببعض أجهزة القياس المستخدمة كالحواسيب والميزان والساعة ومقياس الحرارة وغيرها فهي قابلة للخطأ مهما بلغت من الدقة، حيث إن دقة القياس تتبع لحساسية الأجهزة المستخدمة فهذه الأجهزة تتأثر بالظروف الجوية، أو الشخص الذي أجرى القياس.

النوع الرابع: أخطاء التدوير (Round off Errors)

تشتمل معظم الطرائق العددية على عدد كبير من الحسابات يتم إجراؤها على حاسوب أو آلة حاسبة، فهناك الكثير من الأعداد الحقيقية لا يمكن التعبير عنها إلا بعدد منته من الأرقام وبالتالي فإن أخطاء حسابية تحدث بالتأكيد في كل عملية حسابية تقريباً.

فمثلا أذا افترضنا أن الحاسب يستخدم عشرة أرقام حسابية ، فإنه سيخزن العدد $\frac{2}{3}$ على الصورة : 0.66666667

تدوير الأعداد : (Rounding off)

يسمى الفرق بين القيم المضبوطة والقيم المخزنة ، بأخطاء التدوير (rounding error) ، ويخضع التدوير للقواعد التالية:

ليكن العدد العشري

$$x = 0.a_1a_2\dots a_{n-1}a_n\dots .a_{n+l}$$

لتدويره (أي الاكتفاء بـ $n-1$ رقما بعد الفاصلة بدلاً من $n+l$) نحذف $l+1$ رقم متتالي، فإن العدد يكتب بالشكل

$$\tilde{x} = a_1a_2\dots a'_{n-1}$$

وفق ما يلي:

تدوير الأعداد : (Rounding off)

$$a'_{n-1}=\begin{cases} a_{n-1}+1, & a_n>5 \\ a_{n-1}\quad, & a_n<5 \end{cases}$$

وعندما $a_n=5$ نميز حالتين:

$$a'_{n-1}=\begin{cases} a_{n-1}\quad, & \text{زوجي} \quad : a_{n-1} \\ a_{n-1}+1\;, & \text{فردي} \quad : a_{n-1} \end{cases}$$

تدوير الأعداد : (Rounding off)

النسبة المئوية للخطأ الأعظمي المرتكب في تدوير الأرقام العشرية يعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$$

حيث n عدد المنازل العشرية التي تم التدوير إليها (الاحتفاظ بها)

مثال٢: دور العدد $x = 60.73721$ إلى منزلتين عشريتين؟

الحل: يصبح العدد بالتدوير $\tilde{x} = 60.74$.

مثال٣: دور العدد $x = 60.7542$ إلى منزلتين عشريتين؟

الحل: يصبح العدد بالتدوير $\tilde{x} = 60.75$.

تدوير الأعداد : (Rounding off)

مثال4: دور العدد $x = 6.635$ إلى منزلتين عشريتين؟

الحل: يصبح العدد بالتدوير $\tilde{x} = 6.64$.

مثال5: دور العدد $x = 23.145$ إلى منزلتين عشريتين؟

الحل: يصبح العدد بالتدوير $\tilde{x} = 23.14$.

مثال6: دور العدد $x = 2.34611$ إلى منزلتين عشريتين؟ ثمّ احسب الخطأ المرتكب نتيجة هذا التدوير؟

الحل: يصبح العدد بالتدوير $\tilde{x} = 2.35$. من قانون الخطأ المطلق نجد أنّ:

$$E_t = \left| x = 2.34611 - 2.35 \right| = 0.00389$$

تدوير الأعداد : (Rounding off)

من قانون الخطأ النسبي نجد أنّ:

$$E_r = \frac{E_t}{|x|} = \frac{0.00389}{2.34611} = 0.001658063$$

والخطأ المئوي:

$$\varepsilon_t = E_r \times 100\% = 0.001658063 \times 100\% = 0.1658063\%$$

والخطأ الأعظمي المرتكب

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-2})\% = 0.5\%$$

.

تقديرات الخطأ في الطرق التكرارية (Error Estimates in Iterative Methods)

في الرياضيات ، يمكن غالبًا تمثيل التوابع بمتسلسلة تايلور كما تعلمنا في مقرر تحليل ٢. على سبيل المثال، يمكن نشر التابع الأسي بمتسلسلة ماك لوران:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!} + \cdots$$

(مع إضافة المزيد من الحدود إلى المتسلسلة ، يصبح التقريب تقديرًا أفضل وأفضل للقيمة الحقيقية لـ e^x)

مثال٧: احسب القيمة التقريبية لـ e^x والخطأ المئوي ε_s للقيمة التقريبية بحيث لا يتجاوز الخطأ الأعظمي المرتكب الموافق لثلاثة منازل عشرية.

تقديرات الخطأ في الطرق التكرارية (Error Estimates in Iterative Methods)

الحل:

أولاً لنحسب الخطأ الأعظمي المرتكب الذي يضمن نتيجة صحيحة لثلاثة أرقام مهمة على الأقل:

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-3})\% = 0.05\%$$

وبالتالي، سنضيف حدودًا إلى المتسلسلة حتى

$$\varepsilon_a = \frac{|\text{القيمة التقريبية الحالية} - \text{القيمة التقريبية السابقة}|}{|\text{القيمة التقريبية الحالية}|} \times 100\%$$

يقع تحت $\varepsilon_s = 0.05\%$.

التقريب الأول هو ببساطة بحد واحد. وبالتالي، فإن التقريب الأول يساوي ١ .

تقديرات الخطأ في الطرق التكرارية (Error Estimates in Iterative Methods)

التقريب الثاني عن طريق إضافة الحد الثاني كما في

$$e^{x} = 1 + x$$

من أجل $x = 0.5$، يكون

$$e^{0.5} = 1 + 0.5 = 1.5$$

الخطأ المئوي للقيمة التقريبية هو

$$\varepsilon_a = \frac{|1.5 - 1|}{|1.5|} \times 100\% \cong 33{,}3\%$$

لأن ε_a ليست أصغر من ε_s ، سنواصل الحساب بإضافة حد آخر $x^2/2!$

وبتكرار حسابات الخطأ. نستمر حتى $\varepsilon_a < \varepsilon_s$. يمكن تلخيص الحساب كما يلي:

تقديرات الخطأ في الطرق التكرارية (Error Estimates in Iterative Methods)

Terms	Result	ε_a,%
1	1	
2	1.5	33.3
3	1.625	7.69
4	1.645833333	1.27
5	1.648437500	0.158
6	1.648697917	0.0158

وبالتالي، بعد تضمين ستة حدود، يقع الخطأ التقريبي أدناه $\varepsilon_s = 0.05\%$، ويتم إنهاء الحساب.

دقة الأعداد

إن الحساب الذي يتم باستخدام الحاسب او الآلة الحاسبة يختلف عن الحساب في الجبر والتفاضل ، حيث إننا نسمح في الرياضيات باستخدام أعداد ذات خانات غير منتهية، على سبيل المثال يعرف $\sqrt{3}$ على أنه ذلك العدد الموجب الوحيد الذي لو ضربته بنفسه لحصلنا على العدد 3. لكن في العالم الحاسوبي فأن كل عدد قابل للتمثيل بعدد منته وثابت من الأرقام (الخانات)، أي العدد يعطي تمثيلاً تقريبياً
يمكن أن نعبر عنه بالشكل 1.732 أو بالشكل 1.73205 كتقريب أفضل .

ملاحظة : لنميز بين العدد (number) والرقم (digit)

على سبيل المثال 23.451 **عدد** بينما 2,3,4,5,1 **هي أرقام**

الأرقام المعنوية (أو المميزة) (significant digit)

إنّ الأرقام المستخدمة للتعبير عن عدد تسمى الأرقام المعنوية (أو المميزة) **(significant digit)** **فمثلاً** كل الأعداد في العدد 1.73205 هي أرقام معنوية والأرقام المعنوية في العدد 0.00572 هي 5 و 7و 2 .

أي الأرقام غير الصفرية أرقام معنوية **والصفر** يمكن أن يكون معنويًا أو غير معنوياً **كما يلي:**

١- إذا ورد الصفر بين الأرقام غير الصفرية من ١ إلى ٩ يعتبر رقم معنوي (كل الأرقام في العدد هي أرقام معنوية).

٢- إذا ورد الصفر على يسار العدد لا يعتبر رقماً معنوية (الأرقام المعنوية في العدد هي ٥ و ٧و ٢).

٣- إذا ورد الصفر على يمين العدد نميز حالتين

a– إذا وجدت فاصلة للعدد يعتبر الصفر رقم معنوي(العدد يتكون من ٥ أرقام معنوية والعدد و يتكون من ٤ أرقام معنوية).

b - إذا لم توجد فاصلة للعدد لا يعتبر الصفر رقم معنوي (العدد يتكون من رقم معنوي واحد).

الأرقام المعنوية (أو المميزة) (significant digit)

مثال٨: ما عدد الأرقام المعنوية في القياسات التالية:

13.124نيوتن	220.00 فولت	0.8700 كغ
0.0008 سم	100.01 م	500000 غ

الحل:

13.124نيوتن	5 أرقام معنوية	220.00 فولت	5 أرقام معنوية
0.8700 كغ	4 أرقام معنوية	0.0008 سم	رقم معنوي واحد
100.01 م	5 أرقام معنوية	500000 غ	رقم معنوي واحد

تمثيل النقطة العائمة: (Floating point representation)

عادةً ما يتم تمثيل الأعداد ذات الكسور العشرية، والأرقام الموجودة على يمين الفاصلة العشرية ، في أجهزة الكمبيوتر بطريقة النقطة العائمة. إنّ مبدأ تمثيل بهذه الطريقة يعتمد على كتابة أي عدد حقيقي كـ

$$\pm s \times b^{e}$$

حيث s = الجزء العشري

B = أساس نظام الأرقام المستخدم

e = الأس.

فمثلاً يعرض العدد الحقيقي 0.005678 بالصورة 5.678×10^{-3} .

أخطاء اقتطاع (Truncation Errors)

أخطاء الاقتطاع هي تلك التي تنتج عن استخدام تقريب بدلاً من إجراء رياضي دقيق. تم إدخال خطأ اقتطاع في الحل العددي . ننتقل الآن إلى صياغة رياضية تُستخدم على نطاق واسع في الطرق العددية للتعبير عن التوابع بطريقة تقريبية - متسلسلة تايلور.

متسلسلة تايلور

متسلسلة تايلور ، ذات قيمة كبيرة في دراسة الطرق العددية. يمكن تحديدها بإيجاز لتابع بمتغير واحد بالشكل التالي:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

أخطاء اقتطاع (Truncation Errors)

أي

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''}{2!}(x-a)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + R_n$$

ونكتب

$$f(x) = p_n(x) + R_n$$

أخطاء اقتطاع (Truncation Errors)

حيث $p_n(x)$ كثير حدود تايلور من الدرجة n ويعطى بالعلاقة:

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

R_n هو الباقي (الجزء المقتطع من المتسلسلة).

في الحالة الخاصة عندما **a=0** كثير حدود تايلور يسمى كثير حدود ماك لوران.

أخطاء اقتطاع (Truncation Errors)

مثال٩: استخدم متسلسلة تايلور بدءاً من n=0 إلى n=6 لحساب القيمة التقريبية لـ $f(\frac{\pi}{3})$ عند $x=\frac{\pi}{4}$ للتابع $f(x)=\cos x$ واحسب ε_a لكل تكرار

الحل:

لاحظ أن هذا يعني

$$x-a=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

تتيح لنا معرفتنا الدالة الحقيقية تحديد القيمة الصحيحة

$$f(\frac{\pi}{3}) \cong \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7071067811865476$$ (الدقة الكاملة من python)

أخطاء اقتطاع (Truncation Errors)

والخطأ المئوي للقيمة الحقيقية

$$\varepsilon_t = \left|\frac{0.5 - 0.7071067811865476}{0.5}\right| \times 100\% \cong 41.4\%$$

لتقريب الدرجة الأولى ، نضيف حد المشتق الأول ، حيث $f'(x) = -\sin(x)$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right) \cong 0.5219866587632823$$

حيث $\varepsilon_t \cong 4.40\%.$

للتقريب من الدرجة الثانية ، نضيف حد المشتق الثاني ، حيث $f''(x) = -\cos(x)$:

أخطاء اقتطاع (Truncation Errors)

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right) - \frac{\cos(\pi/4)}{2}\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \cong 0.4977544914034251$$

حيث $\varepsilon_t \cong 0.449\%.$

وبالتالي ، فإن إدراج حدود إضافية يؤدي إلى تحسين التقدير. هذه العملية يمكن أن تستمر ، والنتائج المدرجة في الجدول أدناه

أخطاء اقتطاع (Truncation Errors)

لاحظ أن كل حد إضافي يؤدي إلى بعض التحسن في التقدير. ومع ذلك ، لاحظ أيضًا أن معظم التحسينات تأتي مع إضافة حدود القليلة الأولى. في هذه الحالة ، بحلول الوقت الذي أضفنا فيه الحد **الترتيب الثالث** ، يتم تقليل الخطأ إلى ٠.٠٢٦٢٪ ، مما يعني أننا وصلنا إلى ٩٩.٩٧٤٪ من القيمة الحقيقية. وبالتالي ، على الرغم من أن إضافة المزيد من الحدود تقلل الخطأ أكثر ، فإن التحسين يصبح ضئيلًا.

Order (n)	$f^{(n)}(x)$	$f(\pi/3)$ Taylor	$\lvert\varepsilon_t\rvert$
0	cos(x)	0.707106781	41.4%
1	−sin(x)	0.521986659	4.40%
2	−cos(x)	0.497754491	0.449%
3	sin(x)	0.499869147	0.0262%
4	cos(x)	0.500007551	0.00151%
5	−sin(x)	0.500000304	0.0000608%
6	−cos(x)	0.499999988	0.0000244%

Thank you for your attention