Numerical analysis

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2022-2023

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Numerical analysis

Lecture 3

حل المعادلات غير الخطية
الطرق المفتوحة
(Solution of non linear equations)
open Method

Roots: Open Methods

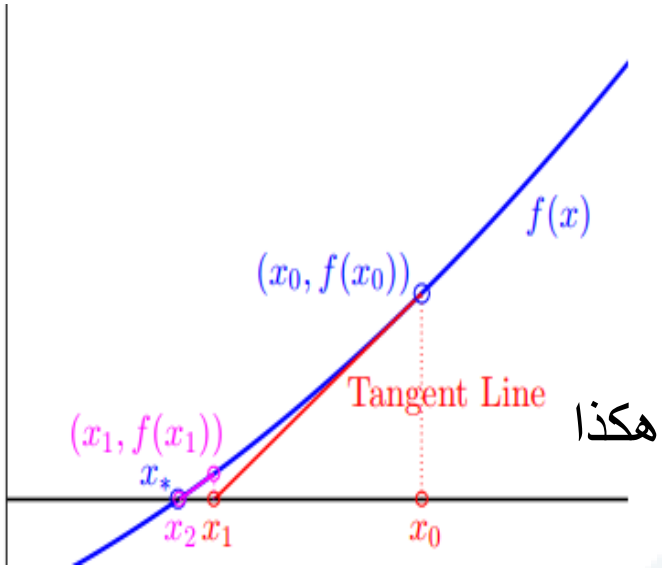
Newton's Method
Secant Method
Simple Fixed-point iteration

طريقة نيوتن (Open Methods-Newton's Method)

طريقة نيوتن (أو طريقة نيوتن-رافسون): هي واحدة من أقوى وأشهر الطرق العددية لحل **مسألة إيجاد الجذور**

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

نظراً لسرعة تقاربها وسهولة استخدامها.



<u>تعتمد طريقة نيوتن على:</u>

معرفة نقطة ابتدائية x_0 لجذر المعادلة (1)

إنشاء مماس عند النقطة التي فاصلتها x_0

تعيين النقطة x_1 التي هي فاصلة نقطة تقاطع المماس مع محور الفواصل كما في الشكل وهكذا

تستخدم هذه الطريقة تقنيات من حساب التفاضل ،

كما نجد من الشكل أن المتتالية تتقارب **تقاربًا سريعاً** إلى جذر المعادلة (1)،هل تتقارب المتتالية دائمًا؟

تفسيرات طريقة نيوتن (interpretation Newton method)

في الواقع ، إنها واحدة من أكثر الإجراءات أهمية في التحليل العددي، وتمتد قابليتها للتطبيق إلى المعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية. هنا يتم تطبيقه على إيجاد الجذور للمعادلة $f(x) = 0$. وكما ذكرنا سابقا نسعى إلى نقطة واحدة أو أكثر تكون فيها قيمة الدالة f صفرًا.

في طريقة نيوتن ، يُفترض أن **التابع f قابل للاشتقاق**. هذا يعني أن لخطه البياني ميل عند كل نقطة وبالتالي مماس.

الآن دعنا نتابع الفكرة البسيطة التالية:

عند **نقطة ابتدائية** $(x_o, f(x_o))$ من الخط البياني للتابع f، يوجد مماس ميله $f'(x_o)$، يعطى بالعلاقة التالية:

$$y=f(x0)+f'(x0)(x-x0)$$

تفسيرات طريقة نيوتن (interpretation Newton method)

وتكون فاصلة نقطة تقاطع المماس مع محور الفواصل بوضع $y = 0$ و $x = x1$, فنجد أن:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

وبالتالي بدءًا **من النقطة xo**، ننتقل إلى النقطة الجديدة x1، التي تم الحصول عليها من الصيغة السابقة.، يمكن تكرار هذه العملية فنحصل على متتالية من النقاط :

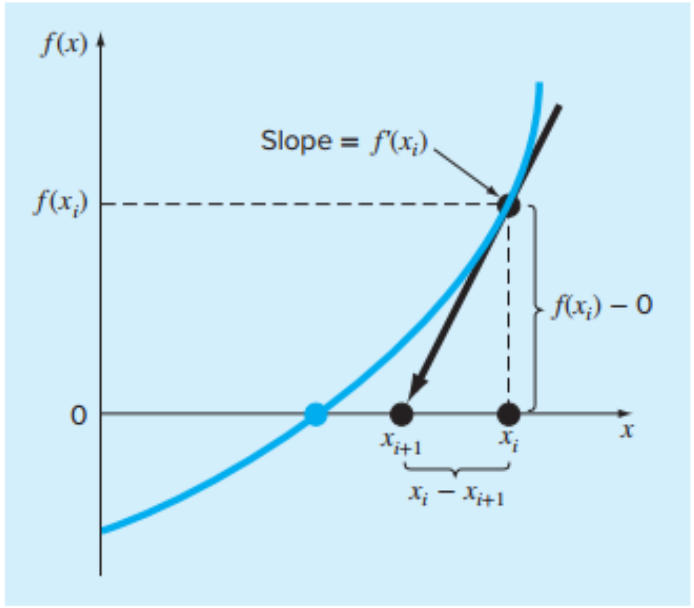
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad ، \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \text{ .....}$$

وهكذا ..... تقترب متتالية من صفر f. بشرط $f'(x_i) \neq 0$

تفسيرات طريقة نيوتن (interpretation Newton method)

طريقة نيوتن: هي طريقة تبدأ من نقطة ابتدائية x_0 تولد متتالية $(x_i)_{i\geq 0}$ تعطى بالعلاقة:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad ; \quad f'(x_i) \neq 0$$



خوارزمية نيوتن (Newton's Algorithm)

Step 1 Set $i = 1$.

Step 2 While $i \leq N_0$ do Steps 3–6.

Step 3 Set $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$. (*Compute* p_i.)

Step 4 If $|p - p_0| < TOL$ then
OUTPUT (p); (*The procedure was successful.*)
STOP.

Step 5 Set $i = i + 1$.

Step 6 Set $p_0 = p$. (*Update* p_0.)

Step 7 OUTPUT ('The method failed after N_0 iterations, N_0 =', N_0);
(*The procedure was unsuccessful.*)
STOP.

لإيجاد حل للمعادلة f(x)=0 مع تقريب ابتدائي x0:

المخلات: قيمة ابتدائية p0 ، الخطأ المسموح به Tol ، أكبر عدد التكرارات N0

المخرجات: حل تقريبي P أو عبارة "فشل"

طريقة نيوتن (Newton's Method)

مثال: أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $x^3 - 4x + 1 = 0$ بطريقة نيوتن رافسون من أجل تقريب ابتدائي $x_0 = 2$ متخذا $\varepsilon = 0.005$ شرط التوقف

الحل:

نجد أن: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{8} = 1.875$. ويكون:

$$|x1-x0|=|1.875-2|=0.125>\varepsilon$$

، لذلك نوجد x_2 فيكون: $x_2=1.861$. ويكون:

$$|x2-x1|=1.875-1.861|=0.014<\varepsilon$$

لذلك يكون $x_2=1.861$ هو الجذر التقريبي.

طريقة نيوتن (Newton's Method)

مثال: احسب $\sqrt[3]{5}$ وذلك بحل المعادلة $x^3 - 5 = 0$ بطريقة نيوتن رافسون مستخدماً $x_0 = 5$ كتقريب أولي للجذر بدقة $\varepsilon = 10^{-7}$

الحل:

$$f(x) = x^3 - 5 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad ; \quad f'(x_i) \neq 0$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{{x_i}^3 - 5}{3{x_i}^2}$$

الجدول التالي يبين خطوات الحل- التقريبات المتتالية للحل.

طريقة نيوتن (Newton's Method)

n	xi	|xi-xi-1|
1	5	-
2	3.4	1.6
3	2.41084198385	0.98915801615
4	1.89398315995	0.5168588239
5	1.72727396649	0.16670919346
6	1.71014860176	0.01712536473
7	1.70997596411	0.00017263765
8	1.70997594668	0.00000001743

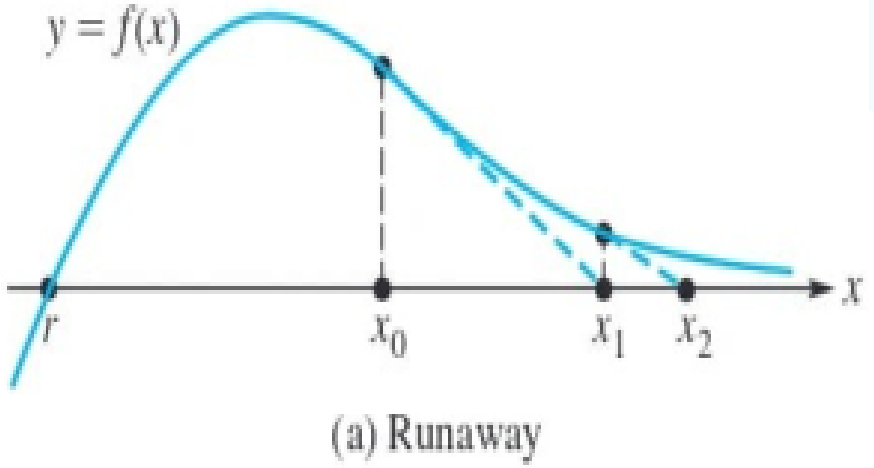
نجد أن $\left|x_8 - x_7\right| < 10^{-7}$

ومنه القيمة التقريبية لـ $\sqrt[3]{5}$ هي

1.70997594668

Discussion Newton method

على الرغم من أن طريقة نيوتن هي حقًا اختراع رائع ، إلا أن المتتالية المولدة بهذه الطريقة **قد تتقارب أو تتباعد** كما هو مبين بالشكل:

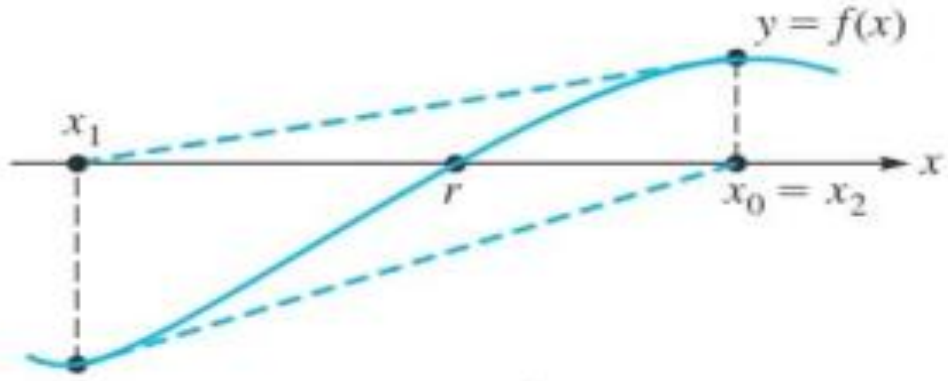


(a) Runaway

المماس للخط البياني للدالة f عند x يتقاطع مع المحور x عند نقطة بعيدة عن الجذر r، وتتراجع النقاط المتتالية في تكرار نيوتن من r بدلاً من التقارب إلى r.

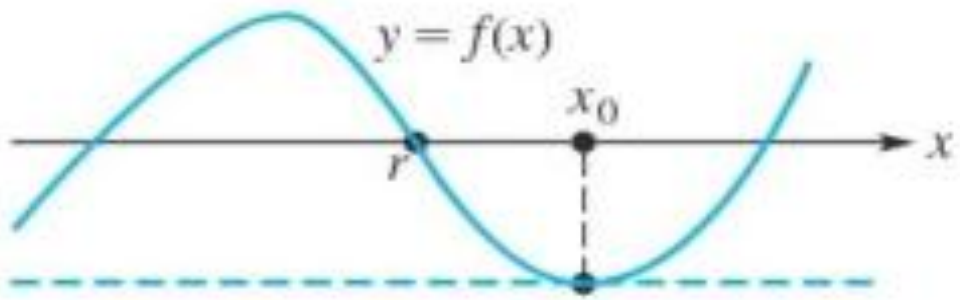
(يمكن أن تُعزى الصعوبة إلى الاختيار السيئ للنقطة الأولية xo؛ انها ليست قريبة بما فيه الكفاية من r)

Discussion Newton method



(c) Cycle

قيم التكرار لأن xo = x2.



(b) Flat spot

يكون **المماس** للخط البياني **موازيًا لمحور الفواصل**
أي قيمة المشتق صفر $f'(x_0)=0$(لن يتقاطع مع
محور الفواصل ولن نستطيع إيجاد الجذر التقريبي)

Discussion Newton method

عيوب طريقة نيوتن

-اختيار قيمة ابتدائية (مثلا بجوار نقطة الانعطاف) اختيار سيء قد يؤدي إلى تباعد القيم التكرارية .

- يجب أن لا يكون $f'(x_0)=0$ وإلا نحصل على مماس يوازي محور الفواصل ولا يقطعه.

وبالتالي إن فشل طريقة نيوتن في إيجاد الحل لا يعني أن الحل غير موجود وعندها يتم استخدام طريقة أخرى لإيجاد الجذر للمعادلة

Discussion Newton method

ملاحظات:

- عند استخدام طريقة نيوتن ، يجب مراعاة الاختيار الصحيح لنقطة البداية. غالبًا ما يتم استخدام عدة خطوات لطريقة التنصيف للحصول على نقطة انطلاق مناسبة ، بحيث تتقارب طريقة نيوتن بسرعة أكبر.

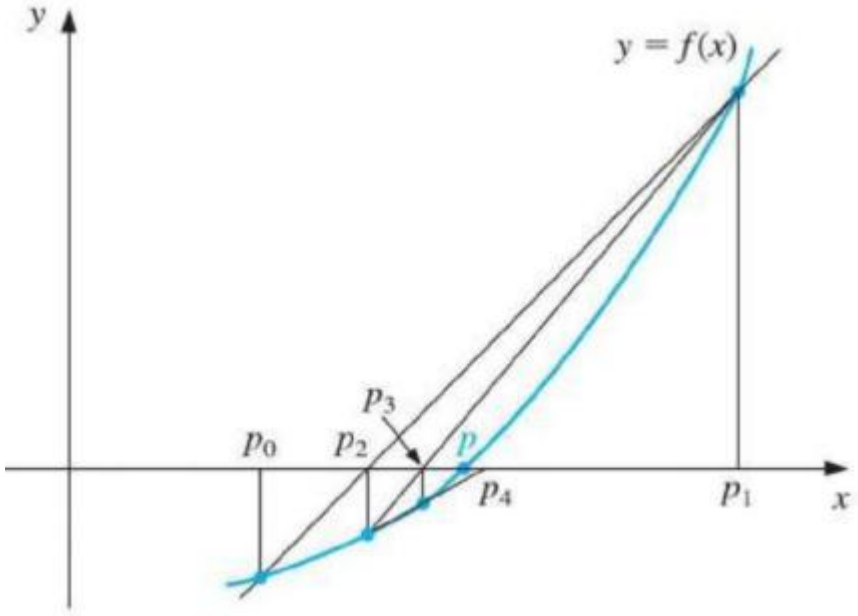
تقدير الخطأ لطريقة نيوتن **نطبق** :

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$$

طريقة القاطع (لاغرانج)(Open Methods-Secant Method)

طريقة القاطع : إن سرعة التقارب في صيغة نيوتن يقبلها الحاجة إلى إيجاد قيمة ليس للتابع فقط وإنما مشتقها عند كل تكرار جديد وهذا يعني مضاعفة العمل ، كما أنه يمكن أن يكون المشتق صفرا مما يؤدي إلى إيقاف الطريقة كاملا. لهذه الأسباب سنتعرف على طريقة القاطع

سنرمز لـ $f_i = f(x_i)$



تعتمد طريقة القاطع على:

معرفة نقطتين ابتدائيتين $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$

إنشاء القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$

تعيين النقطة x_2 التي هي نقطة تقاطع القطعة المستقيمة مع محور الفواصل

كما في الشكل وهكذا

طريقة القاطع (لاغرانج)(Open Methods-Secant Method)

الآن دعنا نتابع الفكرة البسيطة التالية:

انطلاقاً من معرفة **نقطتين ابتدائيتين** $(x_0, f(x_0))$ **و** $(x_1, f(x_1))$ فإنّ ميل المستقيم الواصل بين النقطتين

$$\mathrm{m} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

ومعادلة القاطع :

$$y = f_1 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

طريقة القاطع (لاغرانج)(Open Methods-Secant Method)

وتكون فاصلة نقطة تقاطع القاطع مع محور الفواصل بوضع $y = 0$ و $x = x2$, فنجد أن:

$$x_2 = x_1 - \left[\frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0}\right] f_1$$

وبالتالي بدءًا **من النقطتين الابتدائيتين xo و x1**، ننتقل إلى النقطة الجديدة x2، التي تم الحصول عليها من الصيغة السابقة.، يمكن تكرار هذه العملية فنحصل على متتالية من النقاط :

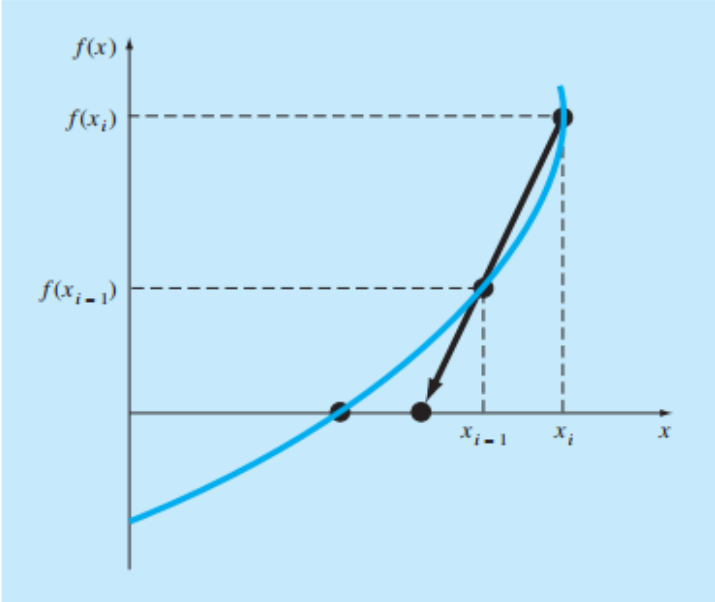
$$x_3 = x_2 - \left[\frac{x_2 - x_1}{f_2 - f_1}\right] f_2 \text{ ، } x_4 = x_3 - \left[\frac{x_3 - x_2}{f_3 - f_2}\right] f_3 \text{ .....}$$

وهكذا ..... تقترب متتالية من صفر f.

طريقة القاطع (لاغرانج)(Open Methods-Secant Method)

طريقة القاطع: هي طريقة تكرارية تبدأ من نقطتين ابتدائيتين x_0, x_1 تولد متتالية $(x_i)_{i\geq 0}$ تعطى بالعلاقة:

$$x_{i+1} = x_i - \left[\frac{x_i - x_{i-1}}{f_i - f_{i-1}}\right] f_i$$



خوارزمية القاطع (Secant Algorithm)

Step 1 Set $i = 2$;
$q_0 = f(p_0)$;
$q_1 = f(p_1)$.

Step 2 While $i \leq N_0$ do Steps 3–6.

Step 3 Set $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)/(q_1 - q_0)$. (*Compute p_i.*)

Step 4 If $|p - p_1| < TOL$ then
OUTPUT (p); (*The procedure was successful.*)
STOP.

Step 5 Set $i = i + 1$.

Step 6 Set $p_0 = p_1$; (*Update p_0, q_0, p_1, q_1.*)
$q_0 = q_1$;
$p_1 = p$;
$q_1 = f(p)$.

Step 7 OUTPUT ('The method failed after N_0 iterations, N_0 =', N_0);
(*The procedure was unsuccessful.*)
STOP.

لإيجاد حل للمعادلة f(x)=0 مع تقريبين ابتدائيين p0 و p1:

المخلات: قيمتين ابتدائيتين p0 و p1 ، الخطأ المسموح به Tol ، أكبر عدد التكرارات N0

المخرجات: حل تقريبي P أو عبارة "فشل"

طريقة القاطع (لاغرانج)-(Secant Method)

مثال: أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $x^6 - x - 1 = 0$ بطريقة القاطع حيث $x_0 = 1$ و $x_1 = 2$ متخذا شرط التوقف $\varepsilon = 10^{-5}$

الحل:

$$x_{i+1} = x_i - \left[\frac{x_i - x_{i-1}}{f_i - f_{i-1}}\right] f_i$$

طريقة القاطع (لاغرانج)(Open Methods-Secant Method)

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	1	-1	
1	2	61	
2	1,016129032	$-0{,}9153677138$	0,983870968
3	1,030674754	$-0{,}831921416$	0,014545722
4	1,175688948	0,4652272149	0,145014194
5	1,123679064	$-0{,}1106328915$	0,052009884
6	1,133671081	$-0{,}01080592224$	$9{,}992017.10^{-3}$
7	1,134752682	$2{,}936671289.10^{-4}$	$1{,}081601.10^{-3}$
8	1,134724065	$-7{,}5725931.10^{-7}$	$2{,}8617.10^{-5}$
9	1,134724139	$2{,}068379.10^{-9}$	$7{,}4.10^{-8}$
10	1,134724139	$4{,}083223.10^{-9}$	0

طريقة القاطع (لاغرانج)-(Secant Method)

مثال: أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $x^5 + x^3 + 3 = 0$ بطريقة القاطع حيث $x_0 = -1$ و $x_1 = 1$ بعد ثمان تكرارات

الحل:

$$x_{i+1} = x_1 + \frac{x_i - x_{i-1}}{f_i - f_{i-1}} f_{i-1}$$

n	x_n	$p(x_n)$
0	-1.0	1.0
1	1.0	5.0
2	-1.5	-7.97
3	-1.05575	0.512
4	-1.11416	-9.991×10^{-2}
5	-1.10462	7.593×10^{-3}
6	-1.10529	1.011×10^{-4}
7	-1.10530	2.990×10^{-7}
8	-1.10530	2.990×10^{-7}

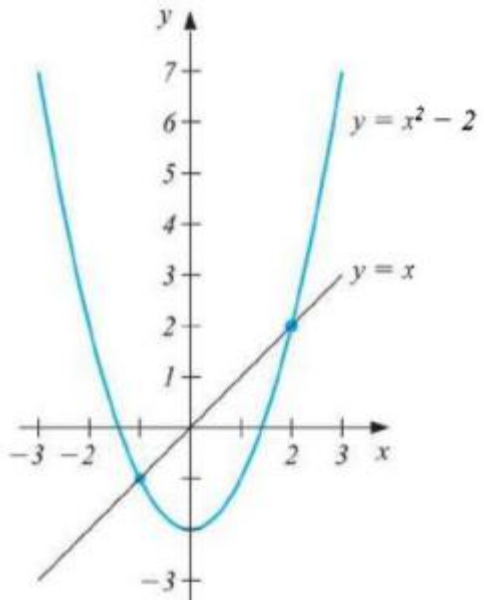
طريقة النقطة الثابتة (Fixed point Method)

تعتمد العديد من طرق البحث عن الجذر على ما يسمى بطريقة النقطة الثابتة (التكرارية)

تعريف:

يقال عن النقطة p إنها نقطة ثابتة للتابع g(x) إذا وفقط إذا كان:

$$p=g(p)$$



مثال:

للدالّة $g(x) = x^2 - 2$ لكل $-2 \le x \le 3$ نقاط ثابتة عند $x = -1$ و $x = 2$ بما أن

$$g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1 \quad \text{و} \quad g(2) = 2^2 - 2 = 2$$

طريقة النقطة الثابتة (Fixed point Method)

على سبيل المثال ، نريد حل مشكلة إيجاد الجذر للتابع f(x) أي نبحث عن p التي تحقق f (p) = 0

نعرف التابع g (x) = x – f (x)

ولاحظ أنه إذا كانت pنقطة ثابتة لـ g (x) ، أي g (p) = p - f (p) = p فإن pهو جذر لـ(f (x).

تعتمد طريقة النقطة الثابتة لايجاد جذور المعادلة f(x)=0 على:

-إعادة كتابة التابع f بالشكل g(x)=x (يوجد عدة صيغ للتابع g كما سنرى في المثال)

- توليد متتالية تكرارية من نقطة ابتدائية x0 وتعطى بالعلاقة $x_{i+1} = g(x_i)$

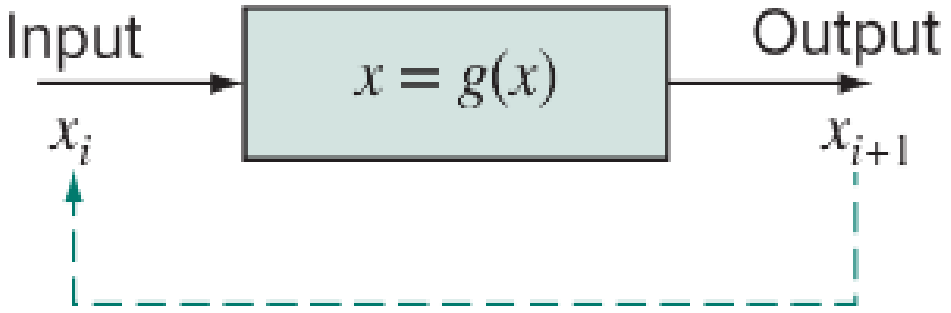
مثلاً لدينا $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ فيمكن إعادة صياغة f وتصبح المعادلة بـ

$x = \sqrt{2x-3}$ أو $x = \frac{x^2-3}{2}$ أو $x^2 = 2x + 3 \quad \Rightarrow x = 2 + \frac{3}{x}$

طريقة النقطة الثابتة (Fixed point Method)

طريقة النقطة الثابتة: هي طريقة تكرارية تبدأ من نقطة ابتدائية x_0 تولد متتالية $(x_i)_{i\geq 0}$ تعطى بالعلاقة:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$



خوارزمية النقطة الثابتة (Fixed point Algorithm)

Step 1 Set $i = 1$.

Step 2 While $i \leq N_0$ do Steps 3–6.

Step 3 Set $p = g(p_0)$. (*Compute* p_i.)

Step 4 If $|p - p_0| < TOL$ then
OUTPUT (p); (*The procedure was successful.*)
STOP.

Step 5 Set $i = i + 1$.

Step 6 Set $p_0 = p$. (*Update* p_0.)

Step 7 OUTPUT ('The method failed after N_0 iterations, N_0 =', N_0);
(*The procedure was unsuccessful.*)
STOP.

لإيجاد حل للمعادلة g(p)=p مع تقريب ابتدائي p0

المخلات: تقريب ابتدائي p0 ، الخطأ المسموح به Tol ، أكبر عدد التكرارات N0

المخرجات: حل تقريبي P أو عبارة "فشل"

طريقة النقطة الثابتة (Fixed point Method)

مثال: أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $f(x) = e^{-x} - x = 0$ بطريقة النقطة الثابتة من أجل تقريب ابتدائي $x_0 = 0$ متخذا عشر تكرارات واحسب الخطأ المئوي النسبي في كل تكرار ε_a

الحل: بإعادة صياغة المعادلة نحصل على:

$$f(x) = e^{-x} - x = 0$$

$$e^{-x} = x \quad : g(x) = e^{-x}$$

ومنه العلاقة التكرارية

$$x_{i+1} = e^{-x_i} \qquad : x_{0=0}$$

طريقة النقطة الثابتة (Fixed point Method)

ويعطى ε_a بالعلاقة:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\%$$

i	x_i	$\lvert\varepsilon_a\rvert$, %
0	0.0000	
1	1.0000	100.000
2	0.3679	171.828
3	0.6922	46.854
4	0.5005	38.309
5	0.6062	17.447
6	0.5454	11.157
7	0.5796	5.903
8	0.5601	3.481
9	0.5711	1.931
10	0.5649	1.109

طريقة النقطة الثابتة (Fixed point Method)

مثال: أوجد القيمة التقريبية للعدد $\sqrt{5}$ وذلك بحل المعادلة $f(x) = x^2 - 5 = 0$ بطريقة النقطة الثابتة من أجل متخذا تقريب ابتدائي $x_0 = 2.5$

الحل:

نفرض أربع طرائق تكرارية لحل هذه المعادلة ، لنفرض أن الشكل الأول :

I_1: $x_{n+1} = 5 + x_n - x_n^2$ ضربنا بـ (-١) ونضيف (x_n) للطرفين

I_2: $x_{n+1} = \frac{5}{x_n}$ نقسم على (x_n)

I_3: $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{5}x_n^2$ نضرب الطرفين بـ $(-\frac{1}{5})$ ونضيف (x_n)

I_4: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$ نضيف (x_n^2) للطرفين وبعدها نقسم على (x_n) وامثالها

طريقة النقطة الثابتة (Fixed point Method)

n	$x_n: I_1$	$x_n: I_2$	$x_n: I_3$	$x_n: I_4$
0	2.5	2.5	2.5	2.5
1	1.25	2	2.25	2.25
2	4.6875	2.5	2.2375	2.2361111
3	−12.285156	2	2.236288	2.236068
	(متباعدة)	(متناوبة فهي متباعدة)	(متقاربة)	(متقاربة)

تمارين

لتكن الدّالة $f(x) = x - \cos(x)$ استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حل بدقة $\varepsilon_x = 10^{-4}$ على $[0, \frac{\pi}{2}]$ على المجال $x_0 = 0.5$ من اجل

استخدم طريقة النقطة الثّابتة لإيجاد جذر تقريبي للدالة:

$f(x) = x^3 - \sin(x)$ علماً أنّ: $x_0 = 1$ على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$ حيث :

تمارين

أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $f(x) = e^{-x} - x = 0$ بطريقة القاطع من أجل تقريبين ابتدائيين $x_0 = 0, x_1 =$ متخذا أربع تكرارات واحسب الخطأ المئوي النسبي في كل تكرار ε_a

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Thank you for your attention