Numerical analysis

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2022-2023

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Numerical analysis

Lecture 5

استيفاء كثيرات الحدود
(Polynomial Interpolation)

Polynomial Interpolation

- INTRODUCTION TO INTERPOLATION

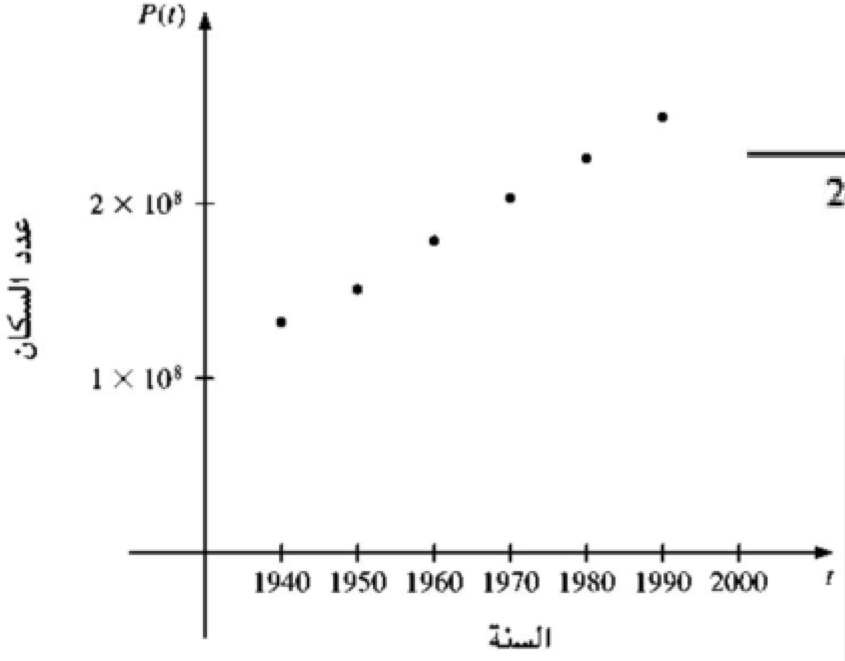
- NEWTON INTERPOLATING POLYNOMIAL

- LAGRANGE INTERPOLATING POLYNOMIAL

استيفاء كثيرات الحدود (Polynomial Interpolation)

مقدمة: في الكثير من المواضيع العلمية والعملية نعتمد على التجربة في تحقيق هدفنا،على سبيل المثال يجري تعداد السكان كل عشر سنوات، ويبين الجدول الآتي عد السكان (بالآلاف) مابين ١٩٤٠ و ١٩٩٠

السنة	1940	1950	1960	1970	1980	1990
عدد السكان بالآلاف	132,165	151,326	179,323	203,302	226,542	249,633



وقد نتساءل عند دراسة هذه البيانات ما إذا كان يمكن استخدامها لإعطاء تقريب مناسب لعدد السكان عام ١٩٦٥ مثلاً أو حتى سنة ٢٠٢٣ مثلاً.

يمكن إيجاد تنبؤات من هذا النوع مستخدمين تابع يتناسب مع البيانات، وتسمى هذه العملية **بالاستيفاء** (Interpolation)

استيفاء كثيرات الحدود (Polynomial Interpolation)

إن **كثيرات الحدود** هي أبسط التوابع التي يمكن أن تسعفنا بالاستيفاء لأنها مستمرة –قابلة للاشتقاق والمكاملة –ويمكن تعامل معا بواسطة الحاسوب بسهولة

في الحقيقة إن كثيرات الحدود لا تستخدم فقط عندما يكون التابع غير معلومة بل في كثير من الأحيان يكون التابع معلوم ولكن بسبب تعقيده يتم استبدالها بكثيرات حدود تقريبية لها .

الاستيفاء (Interpolation):

إنّ مسألة الاستيفاء هي مسألة إيجاد كثير حدود من الدرجة n يمر بـ $n+1$ من النقاط المختلفة.

أي هي عملية استبدال تابع (معلوم تحليلياً $y=f(x)$ أو معلوم فقط عدد محدد من النقاط) بكثير حدود.

استيفاء كثيرات الحدود (Polynomial Interpolation)

مسألة الاستيفاء:

ليكن لدينا **n+1** من النقاط $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots\ldots y_n = f(x_n)$

اوجد كثير حدود $p(x) = p_n(x)$ من الدرجة **n** ، بحيث تكون قيم كثير الحدود في النقاط x_i هي نفس قيم التابع $y = f(x)$ في هذه النقاط أي $p(x_i) = y_i$.

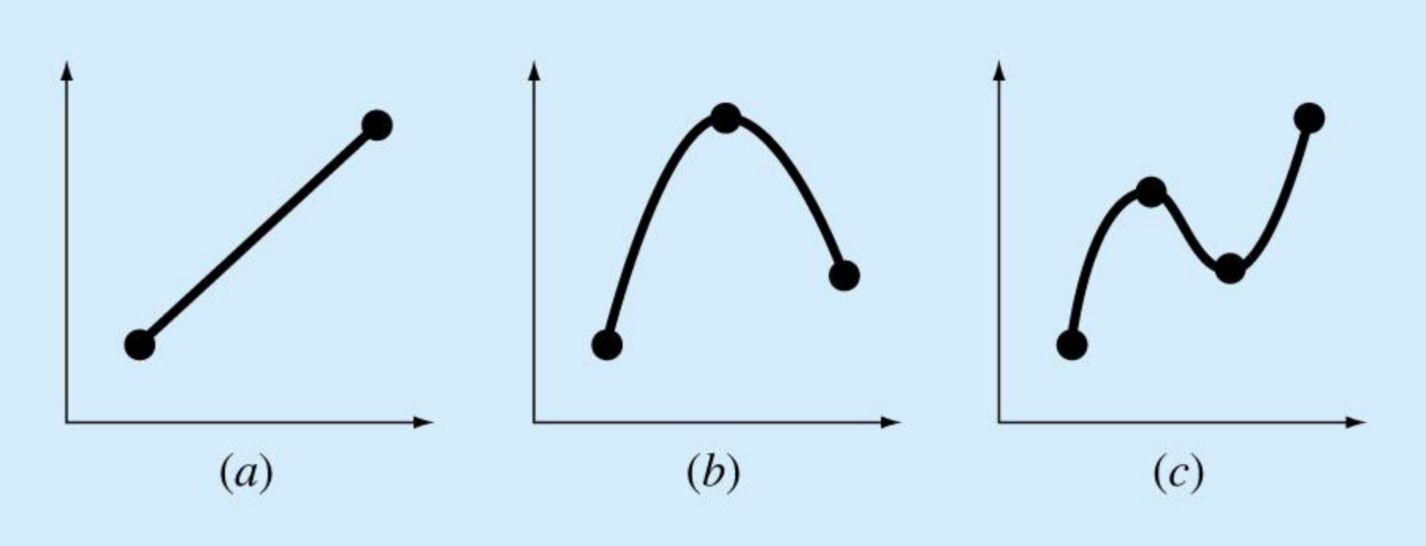
- هذه العملية تسمح لنا باستبدال تابع معقد التركيب تحليلياً بكثير حدود أبسط منها، وأكثر سهولة في التعامل تدعى **القيم** $(i = 0,1\ldots.n)x_i$ **بنقاط (عقد) الاستيفاء** مع ملاحظة أن التابع **f** قد يكون معلوم تحليلياً **y=f(x)** أو معلوم فقط في عدد محدد من النقاط.

إنَ مسألة استيفاء كثير حدود لتابع تعدُ من المسائل الهامة في التحليل العددي، وذلك لكثرة تطبيقاتها ولكونها أساساً لكثير من الطرائق العددية في حل المعادلات الجبرية والتفاضلية.

استيفاء كثيرات الحدود (Polynomial Interpolation)

ملاحظة: يوجد كثير حدود **وحيد** من الدرجة n يمر من n+1 من النقاط.

فعلى سبيل المثال يوجد مستقيم وحيد(وهو كثير حدود من الدرجة الأولى) يمر بنقطتين ، ويوجد قطع مكافئ (خطه البياني كثير حدود من الدرجة الثانية)وحيد يمر بثلاث نقط ، انظر الشكل الآتي:



استيفاء كثيرات الحدود (Polynomial Interpolation)

متى نحتاج الاستيفاء؟

- الحاجة للحصول على تقديرات للتابع
- حساب القيم في نقاط أخرى
- الحاجة إلى تمثيل تابع كأساس للتقنيات العددية الأخرى

- سنتعرف الآن على طريقتي نيوتن ولاغرانج

طريقة الفروق المقسومة لنيوتن (NEWTON'S DIVIDED-DIFFERENCE INTERPOLATING)

تعريف:

ليكن لدينا النقاط $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots\ldots y_n = f(x_n)$ وسنرمز بـ $f_k = f(x_k)$

نعرف الفروق المقسومة من المرتبة الأولى: $f[x_k, x_{k-1}] = \dfrac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$ حيث $k = 1, 2, \ldots\ldots n$

مثلاً $f[x_2, x_1] = \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$ ، $f[x_1, x_0] = \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$

الفروق المقسومة من المرتبة الثانية: $f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}] = \dfrac{f[x_k, x_{k-1}] - f[x_{k-1}, x_{k-2}]}{x_k - x_{k-2}}$ حيث $k = 2, \ldots\ldots n$

طريقة نيوتن (NEWTON'S DIVIDED-DIFFERENCE INTERPOLATING)

مثلاً:

$$f[x_3,x_2,x_1]=\frac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1}$$

،

$$f[x_2,x_1,x_0]=\frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}$$

الفروق المقسومة من المرتبة الثالثة:

$$f[x_k,x_{k-1},x_{k-2},x_{k-3}]=\frac{f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]-f[x_{k-1},x_{k-2},x_{k-3}]}{x_k-x_{k-3}}$$

حيث $k=3,\ldots.n$

الفروق المقسومة من المرتبة n:

$$f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0]=\frac{f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_1]-f[x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_0]}{x_n-x_0}$$

طريقة نيوتن (NEWTON'S DIVIDED-DIFFERENCE INTERPOLATING)

ويمكن كتابة جدول يسهل إيجاد الفروق المقسومة كما يلي

x	y	المرتبة ١	المرتبة ٢	المرتبة٣	المرتبة٤
x0	y0				
		f[x1,x0]			
x1	y1		f[x2,x1,x0]		
		f[x2,x1]		f[x3,x2,x1,x0]	
x2	y2		f[x3,x2,x1]		f[x4,x3,x2,x1,x0]
		f[x3,x2]		f[x4,x3,x2,x1]	
x3	y3		f[x4,x3,x2]		
		f[x4,x3]			
x4	y4				

طريقة نيوتن (NEWTON’S DIVIDED-DIFFERENCE INTERPOLATING)

مثال: شكل الفروق المقسومة للتابع المعطى بالعلاقة التالية:

x	0	0.2	0.3	0.4	0.7	0.9
y	132.651	148.877	157.464	166.375	195.112	216.000

الحل:

x	y	المرتبة 1	المرتبة 2	المرتبة 3	المرتبة 4
0	132.651				
		81.13			
0.2	140.877		15.8		
		85.87		1	
0.3	157.464		16.2		0
		89.1		1	
0.4	166.375		16.7		0
		95.79		1	
0.7	195.112		17.3		
		104.44			
0.9	216.000				

علاقة نيوتن للاستيفاء بدلالة الفروق المقسومة

كثير حدود الاستيفاء لنيوتن من أجل الفروق المقسومة:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

حيث

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ a_1 &= f[x_1, x_0] \\ a_2 &= f[x_2, x_1, x_0] \\ &\vdots \\ a_n &= f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0] \end{aligned}$$

مثال: أوجد كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة نيوتن ثمَ احسب بشكل تقريبي قيمة كثير الحدود عند x=1.5

x_i	0	1	2	3
y_i	0	1	8	27

الحل:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	0	0 a_0			
			$\frac{1-0}{1-0}=1$ a_1		
1	1	1		$\frac{7-1}{2-0}=\frac{6}{2}=3$ a_2	
			$\frac{8-1}{2-1}=7$		$\frac{6-3}{3-0}=1$ a_3
2	2	8		$\frac{19-7}{3-1}=\frac{12}{2}=6$	
			$\frac{27-8}{3-2}=19$		
3	3	27			

طريقة نيوتن (NEWTON’S DIVIDED-DIFFERENCE INTERPOLATING)

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$\dots\dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots\dots(x - x_{n-1})$$

$$p_3(x) = 0 + 1(x - 0) + 3(x - 0)(x - 1) + 1(x - 0)(x - 1)(x - 2)$$
$$= x + 3x(x - 1) + x(x - 1)(x - 2)$$

$$f(1,5) = p_3(1,5) \cong 3,375$$

طريقة لاغرانج (LAGRANGE INTERPOLATING POLYNOMIAL)

تعد طريقة لاغرانج لاستيفاء تابع بكثير حدود من الطرائق الهامة وما تزال شائعة الاستخدام حتى الآن وهي ببساطة إعادة صياغة لكثير حدود نيوتن التي تتجنب حساب الفروق المقسومة

طريقة لاغرانج:

ليكن لدينا النقاط $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots\ldots\ldots, y_n = f(x_n)$

فإنّ كثير حدود الاستيفاء لاغرانج يعطى بالعلاقة:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) = $$
$$= L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + \ldots\ldots L_n(x) f(x_n)$$

حيث

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

طريقة لاغرانج (LAGRANGE INTERPOLATING POLYNOMIAL)

حيث $L_j(x)$ تسمى مضاريب لاغرانج لكثيرة الحدود ويكون $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ أي

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\dots(x_0 - x_n)}$$

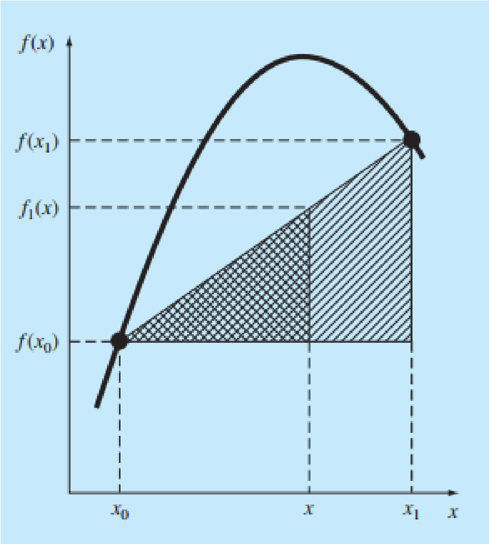
$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_n)}$$

$$L_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})}$$

طريقة لاغرانج (LAGRANGE INTERPOLATING POLYNOMIAL)

Linear Interpolation(الاستيفاء الخطي بطريقة لاغرانج)

نفرض أنه لدينا النقطتين y1=f(x1) ، y0=f(x0) هدفنا استيفاء النقطتين بكثير حدود من الدرجة الأولى



P(x)=L0(x)f(x0)+L1(x)f(x1)

حيث

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

طريقة لاغرانج (LAGRANGE INTERPOLATING POLYNOMIAL)

استيفاء كثير حدود من الدرجة الثانية بطريقة لاغرانج:

بفرض لدينا ثلاث نقط $y0=f(x0)$, $y1=f(x1)$, $y2=f(x2)$ هدفنا استيفاء النقاط بكثير حدود من الدرجة الثانية

$$p(x) = L_0(\mathrm{x})f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

حيث

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

طريقة لاغرانج (LAGRANGE INTERPOLATING POLYNOMIAL)

مثال: أوجد باستخدام طريقة لاغرانج كثير الحدود الموافق للتابع $y=f(x)$ المعطاة بالجدول الآتي

x	0	1	2	3
f(x)	1	2	9	28

الحل:

$$p(x)=y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+\dots\dots\dots+y_nL_n(x)$$

$$p(x)=L_0(x)+2L_1(x)+9L_2(x)+28L_3(x)$$

طريقة لاغرانج(LAGRANGE INTERPOLATING POLYNOMIAL)

$$L_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}=\frac{x^3-6x^2+11x-6}{-6}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}=\frac{x^3-5x^2+6x}{2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}=\frac{x^3-4x^2+3x}{-2}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{6}$$

وبالتعويض في العلاقة p(x) نحصل على:

$$p(x)=x^3+1$$

تمارين

لتكن لدينا مجموعة البيانات الآتية أوجد كثير حدود الاستيفاء بطريقة نيوتن واحسب قيمة تقريبية لكثير الحدود عند x=0.5

x_i	1	$\frac{3}{2}$	0	2
$f(x_i)$	3	$\frac{13}{4}$	3	$\frac{5}{3}$

تمرين: بفرض لدينا $f(x) = Sin(0.2x + 4)$ و لدينا $x_0 = 1.1, x_1 = 2.3, x_2 = 4.1$

أوجد كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة لاغرانج ثم أوجد القيمة التقريبية ل $Sin(4.24)$

لتكن لدينا النقاط $(1,0), (-2,3), (3,2)$ أوجد حدودية لاغرانج و استنتج قيمةالحدودية عند $x^* = 2.5$

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

Thank you for your attention