رياضيات الأعمال- المحاضرة الخامسة

Mathematics For Business

Dr. Fadi KHALIL

Doctor lecturer in statistics and programing department

في هذه المحاضرة سيتم التطرق للمواضيع الآتية:

- مفهوم المتواليات Sequences.
- إيجاد الحد العام للمتوالية Finding the general term of a seuqnece.
- المتواليات الحسابية والهندسية Arithmetic and geometric sequences.
- مجموع حدود متوالية حسابية منتهية Sum formulas for finite arithmetic sequence.
- مجموع حدود متوالية هندسية منتهية Sum formulas for finite geometric seuqence.
- مجموع حدود متوالية هندسية غير منتهية Sum formulas for infinite geometric sequence.

1-6- المتواليات Sequences:

إذا قام أحد الأشخاص بكتابة مربع جميع الأرقام الطبيعية، ستكون كالآتي:

1, 4, 9, 16, 25, 36, ….

ولكن قد يكون من المستحيل كتابة جميع المربعات للأرقام الطبيعية (natural numbers) لأنّ سيكون هناك عدد غير منتهي. ولكن درجت العادة في الأدبيات الرياضية التعبير عن هذه الأرقام بعدة طرق، وأكثرها شيوعاً:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots \dots n^2 \qquad n \in N$$

بحيث N تعبر عن مجموعة الأعداد الطبيعية، وتدعى هذه القائمة من الأرقام السابقة بالمتوالية (*sequence*).

ولتكن الدالة الآتية[1]:

$$\mathrm{f(n) = 2n + 1}$$

بحيث تمثل n أي عدد طبيعي (*natural*)، بالتالي بالتعويض:

$$\mathrm{f(1) = 3, \qquad f(2) = 5, \quad f(3) = 7, \dots \dots}$$

إنّ الدالة السابقة $\mathrm{f(n)}$ هي مثال عن متوالية (sequence) والتي يرمز لها في الأدبيات الرياضية برمز خاص بها وهو a_n، بالتالي تكتب الدالة السابقة :

$$\mathrm{a}_n = 2\mathrm{n} + 1$$

وإذا كانت n ترمز لأي عدد طبيعي فإنّه وبالتعويض بقيم n ينتج المقادير a_1، والذي يدعى بالحد الأول للمتوالية (*the first term of sequence*)، و a_2 والذي يدعى بالحد الثاني للمتوالية (*the second term of sequence*)، و a_n والذي يدعى بالحد العام للمتوالية (*nth term or the general term*).

$$\mathrm{a}_1 = 2(1) + 1 = 3 \qquad \text{First term}$$

$$\mathrm{a}_2 = 2(2) + 1 = 5 \qquad \text{Second term}$$

$$\mathrm{a}_3 = 2(3) + 1 = 7 \qquad \text{Third term}$$

.
.
.

[1] التابع أو الدالة هو عبار عن توافق (*correspondence*) بين مجموعتين من العناصر بحيث أي عنصر من المجموعة الأولى (تدعى مجال أو المنطلق *domain*) يتوافق مع عنصر وفقط عنصر واحد من المجموعة الثانية (تدعى المستقر *range*). مثلاً في مبحث المعادلات الخطية يمكن التعبير عن المعادلة الخطية $y = mx + b$ بأنّها دالّة تستخدم لكتابة y بدلالة x أو يمكن التعبير عنها $y = f(x)$ بحيث من أجل كل قيمة لـ x (المنطلق *domain*) يوجد قيمة وحيدة لـ y (المستقر *range*).

$$a_n = 2(n) + 1 \qquad \text{General term}$$

أو بشكل آخر يمكن كتابة حدود المتوالية بالترتيب:

$$3, 5, 7, \ldots\ldots, 2n + 1, \ldots.$$

ملاحظة 1: يمكن أيضاً التعبير عن المتوالية ضمن قوسين *{ }* مثلاً المتوالية السابقة $\{a_n\}$.

ملاحظة 2: إذا كان لـ n مجال منتهي (*finite domain*) يطلق على المتوالية بالمتوالية المنتهية (*finite sequence*)، بالمقابل إذا كان لـ n مجال منتهي (*infinite domain*) يطلق على المتوالية بالمتوالية غير المنتهية (*infinite sequence*). مثلاً المتوالية المذكورة سابقاً $\{a_n = 2n + 1\}$ هي متوالية غير منتهية لأنّه لم يذكر نهاية لمجال n.

ملاحظة 3: دائما تعبر n عن أعداد طبيعية (*natural number*) ما لم يذكر خلاف ذلك.

مثال 1:

لكتابة الحدود الأربعة الأولى لكل من المتواليتين الآتيتين:

$A)\ a_n = 3n - 2$ $\qquad\qquad$ $B)\ \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

الحل:

بالتعويض قيم n كأعداد طبيعية 1، 2، 3، .....

$A)\ 1, 4, 7, 10$ $\qquad\qquad$ $B) -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}$

1-6-1- إيجاد الحد العام للمتوالية Finding the general term of a seuqnece:

يلاحظ مما سبق أنّه تمّ استخدام الحد العام للمتوالية *general term* لإيجاد الحدود الأولى منها، ولكن في بعض الأحيان قد تكون الحالة معاكسة حيث يوجد عدد من حدود المتوالية الأولى ولكن الحد العام يكون غير معلوم، وهذا لا يعتبر كافٍ لتعريف المتوالية. فهل يمكن استخدام الحدود المبدئية لمتوالية ما لإيجاد حدها العام؟

الجواب هو نعم وذلك إذا أمكن إيجاد نموذج بسيط من حدود المتوالية المبدئية، وبالتالي يمكن بناء حد عام والذي يتوافق مع هذا النموذج، والمثال الآتي يوضح هذا الأمر:

مثال 2:

لإيجاد الحد العام لمجموعة من حدود المتوالية:

$A)\ 3, 4, 5, 6$ $\qquad\qquad$ $B)\ 5, -25, 125, -625$

المتوالية الأولى A:

يلاحظ أنّ كل حد ينتج عن الحد الذي يسبقه بإضافة العدد 1 وذلك ابتداءً من العدد 3. بالتالي يمكن كتابة الحد العام بطريقتين:

$$a_n = n, \qquad n \geq 3$$

أو يمكن كتابته بطريقة أخرى:

$$a_n = n + 2$$

المتوالية الثانية B:

يلاحظ أنّ كل حدود المتوالية هي عبارة عن العدد 5 مرفوعاً للأس n بشكل تدريجي، ولكن لمراعاة إشارة الحدود سيتم الضرب بـ (1-) مرفوعاً للأس (n-1)، أي:

$$a_n = (-1)^{n-1} 5^n$$

مثلاً الحد الأول، عندما $n = 1$

$$a_1 = (-1)^{1-1} 5^1 = 5$$
$$a_2 = (-1)^{2-1} 5^2 = -25$$
$$a_3 = (-1)^{3-1} 5^3 = 125$$
$$a_4 = (-1)^{4-1} 5^4 = -625$$

مثال 3:

أوجد الحد العام لكل من المتوالتين الآتيتين:

$A)\ 3, 6, 9, 12, \ldots \qquad\qquad B)\ 1, -2, 4, -8, \ldots$

فيما يتعلق بالمتوالية A:

يلاحظ أنّ كل حد ينتج عن الحد الذي يسبقه بإضافة العدد 3، أي يمكن صياغة الحد العام:

$$a_n = 3n \qquad n \in N$$
$$a_1 = 3(1) = 3$$
$$a_2 = 3(2) = 6$$
$$a_3 = 3(3) = 9$$
$$a_4 = 3(4) = 12$$

فيما يتعلق بالمتوالية B:

$$B)\ 1, -2, 4, -8, \dots$$

يلاحظ أنّ كل الحد ينتج عن الحد الذي يسبقه برفع العدد الصحيح (-2) على $n-1$، باعتبار n هو عدد طبيعي ، وبالتالي يكون الحد العام

$$a_n = (-2)^{n-1}$$
$$a_1 = (-2)^{1-1} = 1$$
$$a_2 = (-2)^{2-1} = -2$$
$$a_3 = (-2)^{3-1} = 4$$
$$a_4 = (-2)^{4-1} = -8$$

1-6-2- المتواليات الحسابية والهندسية Arithmetic and geometric sequences:

في كثير من الأحيان يكون من الصعب إيجاد صيغة جبرية تساعد في جمع عدد معين من حدود المتوالية (*series summation*) وبالتالي يكون الحل الوحيد هو تطبيق عملية الجمع للحدود بشكل إفرادي. ولكن هناك بعض المتواليات الخاصة والتي تتمتع ببعض الخصائص والتي تؤدي إلى صيغة مفيدة لإجراء عملية جمع حدود المتوالية. ومن هذه المتواليات يذكر المتوالية الحسابية *arithmetic sequence* والمتوالية الهندسية *geometric sequence*.

مثلاً في المتوالية *5, 7, 9, 11, 13, ...* كل حد فيها بعد الحد الأول ينتج عن الحد الذي يسبقه بإضافة 2، أي انّ الحد العام لهذه المتوالية:

$$5 + 2(n-1)$$

هذه المتوالية هي مثال عن المتوالية الحسابية *arithmetic sequence*.

وكذلك في المتوالية *5, 10, 20, 40, 80, ...* حيث كل حد ينتج عن ضرب الحد الذي يسبقه بالعدد 2. أي أنّ الحد العام هو:

$$5(2)^{n-1}$$

هذه المتوالية هي مثال عن المتوالية الهندسية geometric sequence.

- **تعريف المتوالية الحسابية Definition of arithmetic sequence:**

ليكن متوالية من الأعداد

$$a_1, a_2, a_3, \dots\dots, a_n$$

تُسمّى متوالية حسابية إذا وجد عدد ثابت d يسمّى الفرق المشترك (أو أساس المتوالية)، بحيث :

$$a_n - a_{n-1} = d$$

ويكون كذلك من أجل $n > 1$

$$a_n = a_{n-1} + d$$

- **تعريف المتوالية الهندسية Definition of geometric sequence:**

ليكن متوالية من الأعداد

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$$

تُسمّى متوالية هندسية إذا وجد عدد ثابت r يسمّى النسبة المشتركة (أو أساس المتوالية)، بحيث:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

ويكون كذلك من أجل $n > 1$

$$a_n = r * a_{n-1}$$

مثال 4:

أي من المتواليات الآتية هو متوالية حسابية أو هندسية:

$A)\ 1, 2, 3, 5, \ldots$ $\qquad$ $B)\ -1, 3, -9, 27, \ldots.$

$C)\ 3, 3, 3, 3, \ldots.$ $\qquad$ $D)\ 10, 8.5, 7, 5.5, \ldots.$

الحل:

$A)\ 1, 2, 3, 5, \ldots$

في هذه المتوالية $3 - 5 \neq 1 - 2$ وهذا يشير إلى عدم وجود فرق مشترك (أساس)، وبالتالي لا تعتبر متوالية حسابية. كذلك $\frac{3}{5} \neq \frac{1}{2}$ وهذا يشير إلى عدم وجود نسبة مشتركة (أساس)، وبالتالي لا تعتبر متوالية هندسية.

$B)\ -1, 3, -9, 27, \ldots$

في هذه المتوالية $(-9) - 27 \neq (-1) - 3$ وهذا يشير إلى عدم وجود فرق مشترك (أساس)، وبالتالي لا تعتبر متوالية حسابية. كذلك $\frac{27}{-9} \neq \frac{3}{-1}$ وهذا يشير إلى وجود نسبة مشتركة أو أساس 3-، وبالتالي تعتبر هذه المتوالية متوالية هندسية.

$C)\ 3, 3, 3, 3, \dots$

في هذه المتوالية يلاحظ وجود فرق مشترك (أساس) وهو الصفر، وبالتالي تعتبر هذه المتوالية متوالية حسابية. كذلك يلاحظ وجود نسبة مشتركة (أساس) وهي $1 = \frac{3}{3}$، وبالتالي تعتبر هذه المتوالية متوالية هندسية أيضاً.

$D)\ 10, 8.5, 7, 5.5, \dots.$

في هذه المتوالية يلاحظ $10 - 8.5 \neq 7 - 5.5$ وجود فرق مشترك (أساس) وهو 1.5، وبالتالي تعتبر هذه المتوالية متوالية حسابية. كذلك لا يلاحظ وجود نسبة مشتركة (أساس) لأنّ $\frac{2}{8.5} \neq \frac{8.5}{10}$، وبالتالي لا تعتبر هذه المتوالية متوالية هندسية أيضاً.

- إيجاد الحد العام للمتوالية الحسابية *nth-term formulas*:

إذا كانت $\{a_n\}$ متوالية حسابية مع أساس d:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

تبعاً لما سبق يمكن صياغة الحد العام للمتوالية:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad for\ all\ \ n > 1$$

- إيجاد الحد العام للمتوالية الهندسية *nth-term formulas*:

إذا كانت $\{a_n\}$ متوالية هندسية مع أساس r:

$$a_2 = a_1 * r$$

$$a_3 = a_2 * r = a_1 * r^2$$

$$a_4 = a_3 * r = a_1 * r^3$$

تبعاً لما سبق يمكن صياغة الحد العام للمتوالية:

$$a_n = a_1 r^{(n-1)} \qquad for\ all\ \ n > 1$$

مثال 5:

إذا كان الحد الأول في متوالية حسابية هو 3 والحد العاشر في هذه المتوالية هو 30، فما هو الحد الأربعون في هذه المتوالية.

وفقاً للمعطيات : $a_1 = 3 \quad , a_{10} = 30$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

وفقاً للحد العام للمتوالية فإنّ الحد العاشر يُعطى كالعلاقة:

$$a_{10} = a_1 + (10-1)d$$

وبالتالي يجب إيجاد أساس المتوالية d وذلك بتعويض $a_1 = 3 \; , a_{10} = 30$

$$30 = 3 + (10-1)d$$

$$30 = 3 + 9d$$

$$d = 3$$

لإيجاد الحد الأربعين من المتوالية a_{40}

$$a_{40} = a_1 + (40-1)d$$

$$a_{40} = 3 + (40-1)3 = 120$$

مثال 6:

إذا كان الحد الأول لمتوالية هندسية هو 3، والحد العاشر لهذه المتوالية هو 30 فما هو الحد الأربعون.

الحل:

يجب بداية إيجاد أساس المتوالية وذلك بتعويض $a_1 = 3 \; , a_{10} = 30$ بالحد العام للمتوالية الهندسية:

$$a_n = a_1 r^{(n-1)}$$

$$a_{10} = a_1 r^{(10-1)}$$

$$30 = 3r^{(10-1)}$$

$$r^9 = 10$$

$$r = 10^{1/9}$$

لإيجاد الحد الأربعون a_{40} نعوض القيم السابقة في الحد العام:

$$a_{40} = a_1 r^{(40-1)}$$

$$a_{40} = 3(10^{1/9})^{39} = 3\left(10^{\frac{39}{9}}\right) = 64633.041$$

1-6-3- مجموع حدود متوالية حسابية منتهية sum formulas for finite arithmetic sequence:

يُعطى مجموع حدود متوالية حسابية منتهية بإحدى العلاقتين الآتيتين:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

أو بصيغة أخرى بالتعويض بقيمة $a_n = a_1 + (n-1)d$ يمكن صياغة القانون الآتي:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

مثال 7:

لإيجاد مجموع أول 30 حد في متوالية حسابية:

$$3, 8, 13, 18, \dots$$

يلاحظ أنّ الحد الأول $a_1 = 3$ ، والأساس هو $d = 5$ لأنّ كل حد هو عبار ة عن الحد الذي يسبقه مضافاً إليه العددا 5، وبالتعويض في الصيغة $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$$S_{30} = \frac{30}{2}[2 * 3 + (30-1) * 5] = 2265$$

مثال 8:

لإيجاد مجموع أول 40 حد في متوالية حسابية:

$$15, 13, 11, 9, \dots$$

يلاحظ أنّ الحد الأول $a_1 = 15$ ، والأساس هو $d = -2$ لأنّ كل حد هو عبارة عن الحد الذي يسبقه مضافاً إليه العدد *2-* (أو مطروحاً منه العدد 2)، وبالتعويض في الصيغة

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{40} = \frac{40}{2}[2 * 15 + (40-1) * -2] = -960$$

مثال 9: أوجد مجموع الأعداد الزوجية بين 87 و 31

إن الأعداد الزوجية بين الرقمين المذكورين هي متوالية حسابية حدها الأول 32، وحدها الأخير هو 86 ، وأساسها $d = 2$ لأنّ كل حد ينتج عن سابقه بإضافة العدد 2. بالتالي باستخدام الصيغة السابقة لمجموع حدود متوالية حسابية

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

يلاحظ أنّ عدد الحدود n غير معلوم ولإيجاده يتم استخدام صيغة الحد العام:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

بالتعويض

$$86 = 32 + (n-1)2$$

$$54 = (n-1)2$$

$$27 = (n-1) \Rightarrow n = 28$$

بعد إيجاد n يتم التعويض بالصيغة السابقة :

$$S_n = \frac{28}{2}[2 * 32 + (28-1)2] = 1652$$

أو يمكن استخدام الصيغة الأولى لمجموع حدود متوالية حسابية:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{28}{2}(32 + 86) =$$

تمرين غير محلول

أوجد مجموع الأعداد الفردية بين العددين 24 و 208

4-6-1- مجموع حدود متوالية هندسية منتهية Sum formulas for finite geometric seuqence:

يُعطى مجموع حدود متوالية هندسية منتهية بإحدى العلاقتين الآتيتين:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \qquad r \neq 1$$

أو

$$S_n = \frac{ra_n - a_1}{r - 1} \qquad r \neq 1$$

مثال 10:

لإيجاد مجموع أول 10 حدود لمتوالية هندسية:

$$1, 1.05, 1.05^2$$

يلاحظ أنّ الحد الأول في المتوالية الهندسية هو1، وأساسها هو $d = 1.05$ وأنّ كل حد (بعد الحد الأول) ناتج عن ضرب الحد الذي يسبقه بـ 1.05. بالتالي لإيجاد المجموع للحد 10 أي $n = 10$ نطبق الصيغة

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{1 * (1.05^{10} - 1)}{1.05 - 1} \approx \frac{0.6289}{0.05} = 12.58$$

مثال:

أوجد مجموع أول 7 حدود لمتوالية هندسية:

3 -9 27 -81 ....

بما إنّ عدد الحدود معروف وهو 7 ، يمك استخدام القانون:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

الأساس يساوي $r = -3$ ، وعدد الحدود $n = 7$

$$S_n = \frac{3(-3^7 - 1)}{-3 - 1} = 1641$$

مثال:

لتكن المتوالية الهندسة الآتية :

5 25 125 78125

المطلوب:

1- أوجد مجموع حدود هذه المتوالية
2- أوجد عدد حدود هذه المتوالية،

بما إنّ عدد الحدود الإجمالي n غير معلوم، فإنّ من الضروري استخدام القانون الآتي:

$$S_n = \frac{ra_n - a_1}{r - 1}$$

$$r = 5 \ ،a_1 = 5 \ ، \ a_n = 78125$$

$$S_n = \frac{5 * 78125 - 5}{5 - 1} = 97655$$

2- لإيجاد عدد الحدود سيتم استخدام القانون الآتي:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

بالتطبيق والإستفادة من الطلب السابق:

$$97655 = \frac{5(5^n - 1)}{5 - 1} = \frac{5^{n+1} - 5}{4}$$

$$390620 = 5^{n+1} - 5 \Rightarrow 390625 = 5^{n+1}$$

باستخدام اللوغاريتم:

$$\log(390625) = \log(5^{n+1}) \Longrightarrow \log(390625) = (n+1) * \log(5)$$

$$(n+1) = \frac{\log(390625)}{\log(5)} = 8 \Longrightarrow n = 7$$

أي أنّ عدد الحدود يساوي 7.

1-6-5- مجموع حدود متوالية هندسية غير منتهية Sum formulas for infinite geometric sequence:

بالعودة إلى علاقة مجموع حدود متوالية هندسية منتهية:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1 r^n}{r - 1} - \frac{a_1}{r - 1}$$

يلاحظ من الصيغة الأخيرة أنّه في حال $-1 < r < +1$، فإنّ الحد الأول $\frac{a_1 r^n}{r-1}$ يقترب من الصفر كلما ازداد n.
مثلاً، المقدار $0.2^5 = 0.00032$ يقترب من الصفر عندما يزداد الأس مثلاً إلى 10 أي $0.2^5 =$ 0.0000001024. وبالتالي يصبح المجموع S_n:

$$S_n = -\frac{a_1}{r - 1}$$

أو

$$S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

بالتالي يمكن القول إنّ مجموع حدود متوالية هندسية غير منتهية (عدد حدودها n غير منتهي) يعطى بالعلاقة الآتية:

$$S_{n\to\infty} = \frac{a_1}{1-r}$$

وذلك بشرط أن يكون أساس المتوالية الهندسية $-1 < r < +1$.

1-6-6- حالات تطبيقية:

– **حالة تطبيقية 1: تسديد القروض *loan repayement*:**

إذا قام شخص باقتراض مبلغ 3600 دولار، ووافق على أن يسدد القرض على شكل دفعات شهرية خلال 3 سنوات. حيث كان الاتفاق هو أن يسدد 100 دولار شهرياً كقسط قرض، وأن يدفع فائدة شهرية بمعدل 1% من المبلغ المتبقي (غير المسدد من القرض في نهاية كل شهر). **المطلوب:** ما هو إجمالي مبلغ تكلفة القرض (*Total cost*) المدفوع من قبل هذا الشخص في نهاية 3 سنوات؟

الحل:

سيتم إنشاء الجدول المساعد الآتي:

المدة	رصيد أول المدة	تكلفة المبلغ غير المدفوع من القرض (الفائدة)	القسط الشهري	المتبقي من القرض آخر المدة
0	3600	36=0.01*3600	100	3500
1	3500	35=0.01*3500	100	3400
2	3400	34=0.01*3400	100	3300
3	3300	33=0.01*3300	100	3200

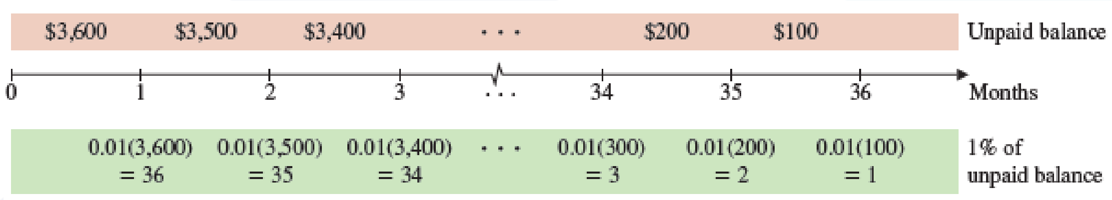
.

.

200	100	3=0.01*300	300	34
100	100	2=0.01*200	200	35
000	100	1=0.01*100	100	36

بما إنّه تمّ الاتفاق على تسديد القرض بدفعات شهرية على مدى 3 سنوات، بالتالي سيتم تسديد 3*12=36 دفعة بمعدل 100 دولار في الدفعة الواحدة.

يمكن تمثيل المبالغ المدفوعة شهرياً بالمخطط الآتي:



يلاحظ من مبالغ الفائدة المدفوعة في كل شهر (العمود الثاني):

$$1,2,3,\dots\dots,33,34,35,36$$

أنّها تتبع متوالية حسابية بأساس $d = 1$، وحدها الأول هو 1 والأخير 36، بالتالي فإنّ مجموع حدود هذه المتوالية يمثل مجموع الفوائد المدفوعة خلال 36 شهر $n = 36$.

ويُعطى مجموع متوالية حسابية بالعلاقة الآتية:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{36} = \frac{36}{2}[2*1 + (36-1)*1] = 666$$

بالتالي مجموع ما سيسدده الشخص في نهاية 3 سنوات هو قيمة القرض + الفائدة= 3600+666=4266.

- **حالة تطبيقية 2: تحفيز حالة الاقتصاد *economy stimulation*:**

بفرض أنّ الحكومة قررت تطبيق برنامج تخفيض ضريبي (*tax rebate program*) بهدف تحفيز الاقتصاد (منحة على شكل تخفيض ضريبي). فإذا كان شخص يستقبل 1200 دولار ويصرف 80% من هذه المنحة إلى أشخاص آخرين، والذين يصرفون أيضاً 80% من دخلهم، وهكذا تستمر هذه العملية من شخص إلى آخر لأجل غير محدود. المطلوب: ما هو إجمالي المبلغ الذي يتم إنفاقه على مستوى الاقتصاد ككل من جرّاء هذه المنحة 1200 دولار لكل مواطن؟

من المعطيات السابقة يتضح أن إجمالي المبلغ المنفق يتبع متوالية هندسية غير منتهية بأساس $r = 0.8$، وحدها الأول $a_1 = 1200 * 0.8 = 960$، بالتالي المجموع:

$$S_{n\to\infty} = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S_{n\to\infty} = \frac{960}{1-0.8} = 4800$$

أي وفقاً للمعطيات السابقة فإنّ تقديم منحة بمقدار 1200 دولار لكل شخص تولد وفقاً لنظرية المضاعف (*multiplier pricipale*) مجموع إنفاق يعادل 4800 دولار على مستوى الاقتصاد ككل.