Numerical analysis

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2022-2023

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Numerical analysis

Lecture 6
الاشتقاق العددي

(Numerical Differentiation)

مقدمة

من المعلوم أن التفاضل جزء لا يتجزأ من حياتنا، فالعديد من تطبيقات الرياضيات في الفيزياء والعلوم الأخرى يتطلب دوماً معرفة تفاضل وتكامل تابع على مجال معين.
يمكن إعطاء العديد من الأمثلة المحددة لمثل هذه التطبيقات في جميع مجالات الهندسة والعلوم.

فالاشتقاق أمر شائع في الهندسة والعلوم لأن الكثير من عملنا ينطوي على وصف التغيرات في المتغيرات في كل من الزمان والمكان على سبيل المثال قانون نيوتن الثاني

الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

فمثلاً، ليكن لدينا جسم وزنه خمسة كيلوغرامات تمَ إلقاؤه من ارتفاع ألفين وأربعمائة متر فوق سطح الأرض وأنه تم تسجيل بعده عن سطح الأرض في أوقات مختلفة كما هو موضح بالجدول الآتي

الوقت (بالثانية) :	0	1	2	3	4	5
المسافة (بالمتر):	2400	2250	1950	1853	1738	1624

ولنفترض أننا نريد إيجاد سرعة سقوط هذا الجسم عند وقت معين، وليكن عند الثانية الرابعة للسقوط . إن حل هذه المسألة يتم باستخدام الاشتقاق العددي وذلك لعدم معرفتنا لشكل التابع الذي يحدد بعد الجسم عن سطح الأرض.

إذن عند الحساب تواجهنا أحياناً بعض الصعوبات كأن يكون **التابع معرف بقيم منفصلة**. أو أنّ **التابع المشتق لتابع ما معقداً** بحيث إن استخدام قيم تقريبية لهذا المشتق أكثر فعالية من حساب القيم الدقيقة له.

سوف ندرس في هذه المحاضرة بعض طرائق العددية لحساب الاشتقاق العددي

الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

يعرف مشتق تابع f عند نقطة x_0 بـ

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ومنه

$$f'(x_0)\approx\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

سنميز حالتين ١- النقاط منتظمة التوزيع ٢- النقاط غير منتظمة التوزيع

هناك ثلاث طرق أساسية لحساب المشتق العددي: **(النقاط منتظمة التوزيع)**

- طريقة الفروق التقدمية (Forward finite divided difference)
- طريقة الفروق التراجعية(Backward finite divided difference)
- طريقة الفروق المركزية (Center finite divided difference)

كل الطرق السابقة تعتمد على متسلسلة تايلور.

الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

متسلسلة تايلور عند x_i تعطى بالعلاقة:

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \ldots\ldots\ldots (1)$$

بفرض $x = x_{i+1}$ فيكون $x - x_i = x_{i+1} - x_i = h$ بالتعويض بـ (١) نحصل على

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 \ldots\ldots\ldots (2)$$

الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

بفرض $x = x_{i-1}$ فيكون $x - x_i = x_i - x_{i-1} = -h$ بالتعويض بـ (١) نحصل على

$$f\left(x_{i-1}\right) = f\left(x_i\right) - f'\left(x_i\right)h + \frac{f''\left(x_i\right)}{2!}h^2 - \frac{f'''\left(x_i\right)}{3!}h^3 \ldots\ldots\ldots (3)$$

بفرض $x = x_{i+2}$ فيكون $x - x_i = x_{i+2} - x_i = 2h$ بالتعويض بـ (١) نحصل على

$$f\left(x_{i+2}\right) = f\left(x_i\right) + f'\left(x_i\right)2h + \frac{f''\left(x_i\right)}{2!}4h^2 + \ldots\ldots\ldots (4)$$

سنحصل على عدة صيغ للمشتق

الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

من المعادلة (2) نحصل

$$f'(x_i)h = f(x_{i+1}) - f(x_i) - \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 \ldots\ldots\ldots$$

نقسم على h نحصل على

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \underbrace{\frac{f''(x_i)}{2!}h - \frac{f'''(x_i)}{3!}h^2 \ldots\ldots\ldots}_{O(h)}$$

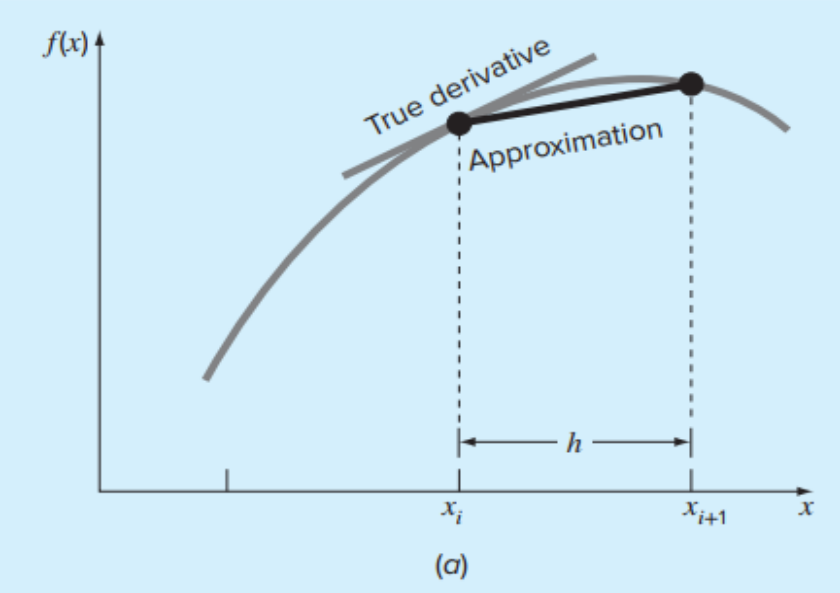
ويكون

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - O(h)$$

الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

أي

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$



صيغة الفروق التقدمية للاشتقاق العددي تعطى بالعلاقة:

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

من المعادلة (3) نجد

$$f'(x_i)h = f(x_i) - f(x_{i-1}) + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 \ldots\ldots\ldots$$

نقسم الطرفين على h فنحصل على:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \underbrace{\frac{f''(x_i)}{2!}h - \frac{f'''(x_i)}{3!}h^2 \ldots\ldots\ldots}_{O(h)}$$

ويكون

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

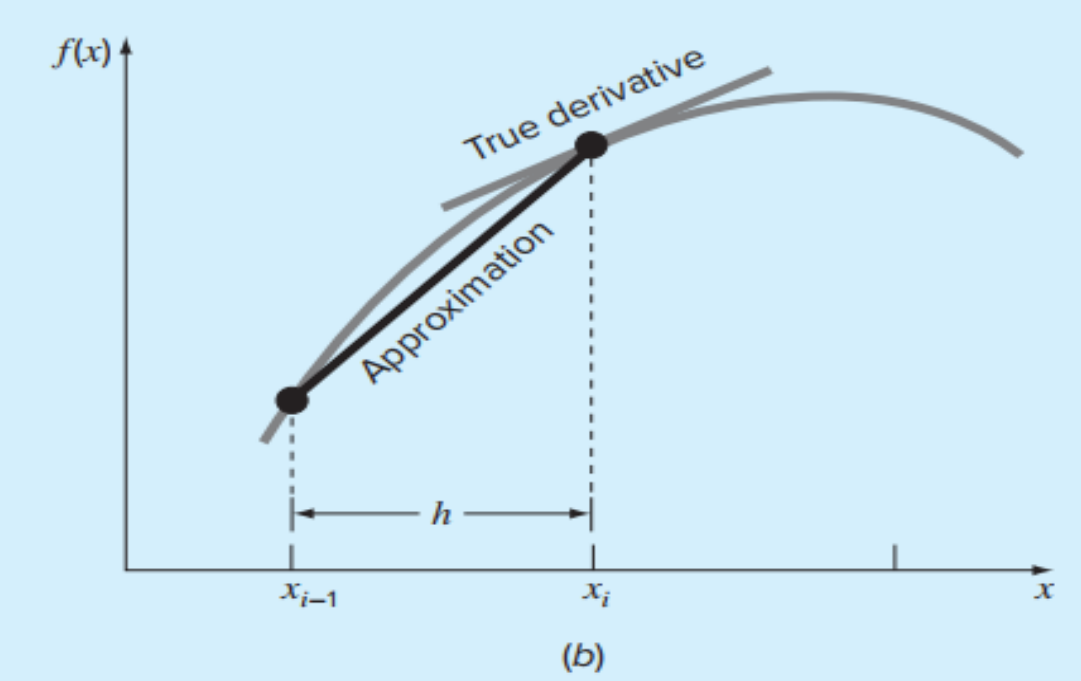
الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

أي

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

صيغة الفروق التراجعية للاشتقاق العددي تعطى بالعلاقة:

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$



الاشتقاق العددي (Numerical Differentiation)

$$f\left(x_{i+1}\right)=f\left(x_i\right)+f'\left(x_i\right)h+\frac{f''\left(x_i\right)}{2!}h^2+\frac{f'''\left(x_i\right)}{3!}h^3\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$f\left(x_{i-1}\right)=f\left(x_i\right)-f'\left(x_i\right)h+\frac{f''\left(x_i\right)}{2!}h^2-\frac{f'''\left(x_i\right)}{3!}h^3\ldots\ldots\ldots(3)$$

بطرح المعادلة (٣) من المعادلة (٢) نحصل

$$f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_{i-1}\right)=2f'\left(x_i\right)h+2\frac{f'''\left(x_i\right)}{3!}h^3+2\frac{f^{(5)}\left(x_i\right)}{5!}h^5\ldots\ldots\ldots$$

نقسم الطرفين على $2h$ فنحصل على:

$$f'\left(x_i\right)=\frac{f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_{i-1}\right)}{2h}-\frac{f'''\left(x_i\right)}{3!}h^2-\frac{f^{(5)}\left(x_i\right)}{5!}h^4\ldots\ldots\ldots$$

الاشتقاق العددي (Numerical Differentiation)

ومنه

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \underbrace{- \frac{f'''(x_i)}{3!}h^2 - \frac{f^{(5)}(x_i)}{5!}h^4 .....}_{O(h^2)}$$

أي

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2)$$

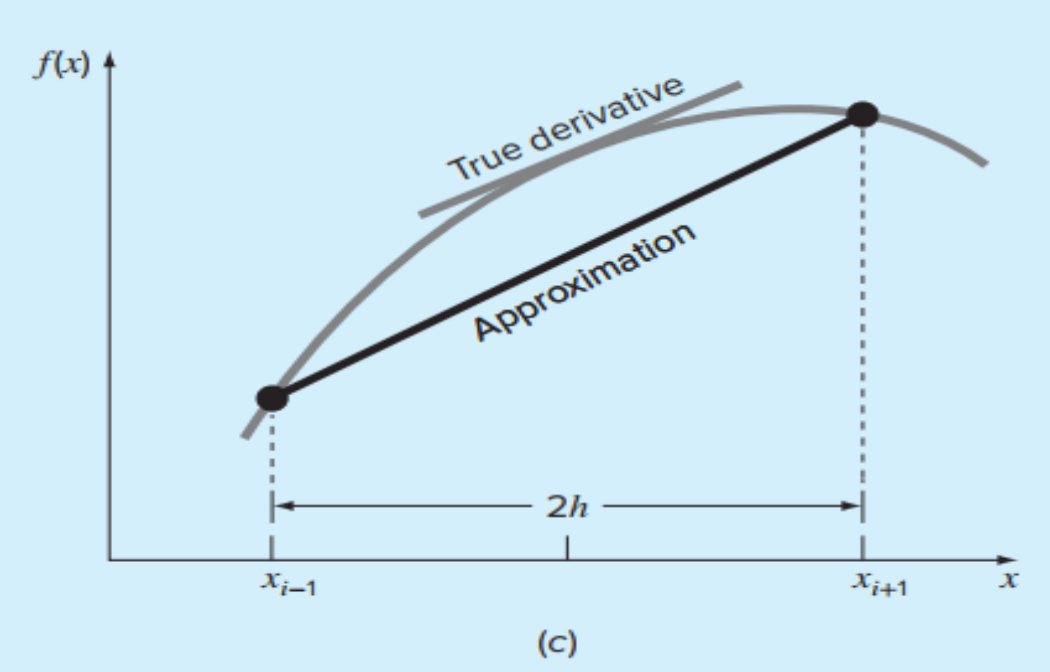
الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

أي

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

صيغة الفروق المركزية للاشتقاق العددي تعطى بالعلاقة:

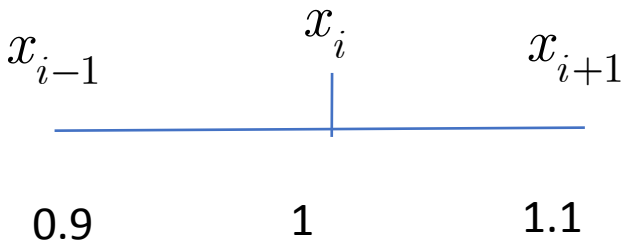
$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$



الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

مثال: ليكن $f(x)=x^2$ أوجد قيمة تقريبية لـ $f'(1)$ بطريقة الفروق التقدمية وبطريقة الفروق المركزية واحسب الخطأ المئوي النسبي لكل طريقة مع العلم قياس الخطوة 0.1 .

الحل:



القيمة الحقيقية

$$f(x)=x^2$$
$$f'(x)=2x$$
$$f'(1)=2$$

طريقة الفروق المركزية

$$f'(x_i)\simeq \frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}=\frac{f(1.1)-f(0.9)}{0.2}$$
$$f'(x_i)\simeq \frac{1.21-0.81}{0.2}$$
$$f'(x_i)\simeq 2$$
$$\varepsilon_a=\frac{|2-2|}{2}\times 100\%=0$$

الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

طريقة الفروق التقدمية:

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{f(1.1) - f(1)}{0.1}$$

$$f'(x_i) \simeq \frac{1.21 - 1}{0.1}$$

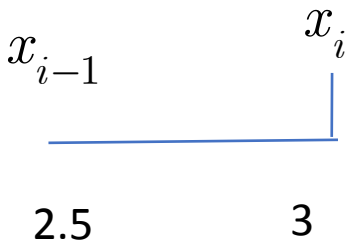
$$f'(x_i) \simeq 2.1$$

$$\varepsilon_a = \frac{|2.1 - 2|}{2} \times 100\% = \frac{0.1}{2} \times 100\% = 5\%$$

الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

مثال: ليكن $f(3)=5$, $f(2.5)=4$ أوجد قيمة تقريبية لـ $f'(3)$ باستخدام صيغة فروق مناسبة .

الحل:



طريقة الفروق التراجعية

$$h = 3 - 2.5 = 0.5$$

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{f(3) - f(2.5)}{0.5}$$

$$f'(x_i) \simeq \frac{5-4}{0.5}$$

$$f'(x_i) \simeq 2$$

الاشتقاق العددي من المرتبة الثانية (Numerical Differentiation)

لدينا

$$f\left(x_{i+1}\right)=f\left(x_i\right)+f'\left(x_i\right)h+\frac{f''\left(x_i\right)}{2!}h^2+\frac{f'''\left(x_i\right)}{3!}h^3\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$f\left(x_{i-1}\right)=f\left(x_i\right)-f'\left(x_i\right)h+\frac{f''\left(x_i\right)}{2!}h^2-\frac{f'''\left(x_i\right)}{3!}h^3\ldots\ldots\ldots (3)$$

بجمع المعادلتين (٣) و(٢) نحصل

$$f\left(x_{i-1}\right)+f\left(x_{i+1}\right)=2f\left(x_i\right)+2\frac{f''\left(x_i\right)}{2!}h^2+2\frac{f^{(4)}\left(x_i\right)}{4!}h^4\ldots\ldots\ldots$$

بإعادة الترتيب فنحصل على:

$$f''\left(x_i\right)=\frac{f\left(x_{i+1}\right)-2f\left(x_i\right)+f\left(x_{i-1}\right)}{h^2}-\underbrace{2\frac{f^{(4)}\left(x_i\right)}{4!}h^2\ldots\ldots\ldots}_{O(h^2)}$$

الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

$$f''(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

وبنفس الطريقة نحصل على قوانين المشتق من المرتبة الثانية

الاشتقاق العددي (Numerical Differentiation)

صيغة الفروق المركزية للاشتقاق العددي من المرتبة الثانية تعطى بالعلاقة:

$$f''(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

صيغة الفروق التقدمية للاشتقاق العددي من المرتبة الثانية تعطى بالعلاقة:

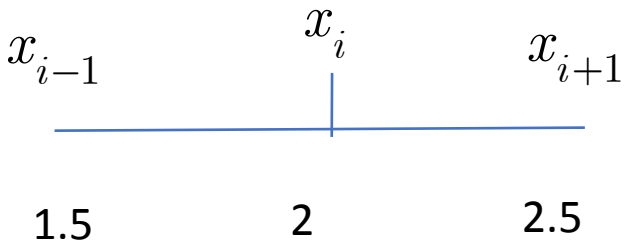
$$f''(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

صيغة الفروق التراجعية للاشتقاق العددي من المرتبة الثانية تعطى بالعلاقة:

$$f''(x_i) \simeq \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$$

الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

مثال: ليكن $f(x)=x^3$ أوجد قيمة تقريبية لـ $f''(2)$ بطريقة الفروق المركزية واحسب الخطأ المئوي النسبي مع العلم قياس الخطوة 0.5 .



الحل:

طريقة الفروق المركزية

$$f''(x_i)\simeq \frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2}$$

$$f''(2)\simeq \frac{f(2.5)-2f(2)+f(1.5)}{h^2}$$

$$f''(2)=\frac{15.625-2(8)+3.375}{0.5^2}$$

$$f''(2)\simeq 12$$

$$\varepsilon_a=\frac{|12-12|}{12}\times 100\%=0$$

القيمة الحقيقية

$$f(x)=x^3$$

$$f'(x)=3x^2$$

$$f''(x)=6x$$

$$f''(2)=12$$

الاشتقاق العددي (طريقة الفروق التقدمية)

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

عدد النقاط	المشتق	الخطأ
2	المشتق الأول $f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}$	$O(h)$
3	المشتق الأول $f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
3	المشتق الثاني $f''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
4	المشتق الثاني $f''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+4f(x_{i+2})-5f(x_{i+1})+2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$

الاشتقاق العددي(طريقة الفروق التراجعية)

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

عدد النقاط	المشتق		الخطأ
2	المشتق الأول	$f'(x_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
3	المشتق الأول	$f'(x_i)=\frac{3f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
3	المشتق الثاني	$f''(x_i)=\frac{f(x_i)-2f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h)$
4	المشتق الثاني	$f''(x_i)=\frac{2f(x_i)-5f(x_{i-1})+4f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^2}$	$O(h^2)$

الاشتقاق العددي (طريقة الفروق المركزية)

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

عدد النقاط	المشتق	الخطأ
3	المشتق الأول $f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
5	المشتق الأول $f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+8f(x_{i+1})-8f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{12h}$	$O(h^4)$
3	المشتق الثاني $f''(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2}$	$O(h^2)$
5	المشتق الثاني $f''(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+16f(x_{i+1})-30f(x_i)+16f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{12h^2}$	$O(h^4)$

الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

مثال: استخدم ثلاث نقاط لإيجاد أفضل الصيغ لإتمام الجدول الآتي

x_i	0.1	0.2	0.3
y_i	2.11	3.56	1.02
y_i'			

الحل: نلاحظ أن النقاط متساوية البعد و $h = 0.1$

لحساب قيمة المشتق عند 0.1 نستخدم الصيغة التقدمية لثلاث نقط

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$

$$f'(x_i) = \frac{-1.02 + 4(3.65) - 3(2.11)}{0.2} = 34.45$$

الاشتقاق العددي(Numerical Differentiation)

لحساب قيمة المشتق عند 0.2 نستخدم الصيغة المركزية لثلاث نقط

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}=\frac{1.02-2.11}{0.2}=-5.45$$

لحساب قيمة المشتق عند 0.3 نستخدم الصيغة التراجعية لثلاث نقط

$$f'(x_i)=\frac{3f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{2h}$$

$$f'(x_i)=\frac{3(1.02)-4(3.65)+2.11}{0.2}=-45.35$$

الاشتقاق العددي لنقاط غير منتظمة التوزيع (لاغرانج)

لدينا مجموعة من **البيانات غير منتظمة التوزيع** لإيجاد المشتق نقوم باستيفاء البيانات بكثير حدود لاغرانج ثمَ نحسب قيمة المشتق التقريبية للتابع عند النقطة المطلوبة

كثير حدود لاغرانج يعطى بالعلاقة:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) = \\ = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + ...L_n(x)f(x_n)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

الاشتقاق العددي لنقاط غير منتظمة التوزيع (لاغرانج)

صيغة لاغرانج من أجل نقطتين

نفرض أنه لدينا النقطتين y1=f(x1) ، y0=f(x0) كما وجدنا في المحاضرة السابقة كثير حدود لاغرانج من الدرجة الأولى

P(x)=L0(x)f(x0)+L1(x)f(x1)

حيث $L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

ومنه $$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

الاشتقاق العددي لنقاط غير منتظمة التوزيع (لاغرانج)

بالاشتقاق نحصل على

$$P(x) = \frac{-1}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{1}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$P'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

صيغة لاغرانج من أجل نقطتين للاشتقاق العددي تعطى بالعلاقة:

$$P'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

نلاحظ إن هذه الصيغة نفسها صيغة الفرق تقدمية عندما h>0 وصيغة الفرق التراجعية عندما h<0

الاشتقاق العددي لنقاط غير منتظمة التوزيع (لاغرانج)

صيغة لاغرانج من أجل ثلاث نقاط

بفرض لدينا ثلاث نقط y2=f(x2), y1=f(x1), y0=f(x0) كثير حدود لاغرانج يعطى بالعلاقة

$$p(x) = L_0(\mathrm{x})f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

حيث

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

الاشتقاق العددي لنقاط غير منتظمة التوزيع (لاغرانج)

أي

$$p(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

بالاشتقاق

$$p'(x)=\frac{(2x-x_1-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(2x-x_0-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(2x-x_0-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

أذا كانت النقاط متساوية المسافة فيما بينها نستطيع أن نستنتج نفس قوانين الفروق التراجعية والتقدمية

الاشتقاق العددي لنقاط غير منتظمة التوزيع (لاغرانج)

مثال

جد القيمة التقريبية لـ $f'(3)$ باستخدام النقاط المبينة في الجدول التالي:

x	1	2	4
$f(x)$	-2	8	112

الحل: نلاحظ أن النقاط غير منتظمة التوزيع

الاشتقاق العددي (لاغرانج)

نطبق صيغة لاكرانج نحصل على حدودية من الدرجة الثانية

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{2} f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$= -2\frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} + 8\frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} + 112\frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$$

يمكن ان نجد المشتقة عند هذه المرحلة فتكون

$$P_2'(x) = -2\frac{(x-2)+(x-4)}{3} + 8\frac{(x-1)+(x-4)}{-2}$$
$$+ 112\frac{(x-1)+(x-2)}{6}$$

وعند $x = 3$ فان

$$P_2'(x)\Big|_{x=3} = \frac{-2}{3}(1-1) + \frac{8}{-2}(2-1) + \frac{112}{6}(2+1)$$

$$= -4 + 56 = 52$$

الاشتقاق العددي لنقاط غير منتظمة التوزيع (لاغرانج)

مقارنة مع القيمة الحقيقية حيث ان البيانات في جدول تمثل الدالة

$$f(x) = 2x^3 - 4x$$

و

$$f'(x) = 6x^2 - 4$$

وعند $x = 3$

$$f'(x)\Big|_{x=3} = 50$$

والخطأ المطلق هو 2 والخطأ النسبي هو 0.04 لا بأس به

تمارين

أوجد مشتق الدّالة $f(x) = e^{-x} . sin\, x$ عند النقطة: $x = 1.0$ من أجل: $h = 0.5$

باستخدام ثلاث نقاط بالصّيغة التقدّميّة والمركزيّة والتراجعيّة

أوجد المشتق من المرتبة الثانية للدّالة: $f(x) = e^{-x} sinx$ المعطاة عند نقطة

$x_0 = 1.0$

علماً أنَّ: $h = 0.5$

تمارين

احسب مشتق التابع عند x=0.5 بطريقة الفروق التقدمية والتراجعية من أجل نقطتين وطريقة الفرق المركزية من أجل ثلاث نقط واحسب الخطأ المئوي النسبي لكل طريقة حيث حجم الخطوة h=0.5

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

احسب مشتق التابع عند x=0.5 بطريقة الفروق التقدمية والتراجعية من أجل نقطتين ثم ثلاث نقط وطريقة الفرق المركزية من أجل ثلاث نقط وخمس نقاط واحسب الخطأ المئوي النسبي لكل طريقة حيث حجم الخطوة h=0.25

الحل

Solution. For $h = 0.5$, the function can be employed to determine

$$x_{i-1} = 0 \qquad f(x_{i-1}) = 1.2$$

$$x_i = 0.5 \qquad f(x_i) = 0.925$$

$$x_{i+1} = 1.0 \qquad f(x_{i+1}) = 0.2$$

These values can be used to compute the forward difference [Eq. (4.21)],

$$f'(0.5) \cong \frac{0.2 - 0.925}{0.5} = -1.45 \qquad |\varepsilon_t| = 58.9\%$$

the backward difference [Eq. (4.23)],

$$f'(0.5) \cong \frac{0.925 - 1.2}{0.5} = -0.55 \qquad |\varepsilon_t| = 39.7\%$$

and the centered difference [Eq. (4.25)],

$$f'(0.5) \cong \frac{0.2 - 1.2}{1.0} = -1.0 \qquad |\varepsilon_t| = 9.6\%$$

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - 1.0x - 0.25$$

and can be used to compute the true value as $f'(0.5) = -0.9125$.

For $h = 0.25$,

$$x_{i-1} = 0.25 \qquad f(x_{i-1}) = 1.10351563$$
$$x_i = 0.5 \qquad f(x_i) = 0.925$$
$$x_{i+1} = 0.75 \qquad f(x_{i+1}) = 0.63632813$$

which can be used to compute the forward difference,

$$f'(0.5) \cong \frac{0.63632813 - 0.925}{0.25} = -1.155 \qquad |\varepsilon_t| = 26.5\%$$

the backward difference,

$$f'(0.5) \cong \frac{0.925 - 1.10351563}{0.25} = -0.714 \qquad |\varepsilon_t| = 21.7\%$$

and the centered difference,

$$f'(0.5) \cong \frac{0.63632813 - 1.10351563}{0.5} = -0.934 \qquad |\varepsilon_t| = 2.4\%$$

السؤال الثاني من أجل ثلاث نقاط للطريقة التقدمية والتراجعية وخمس نقط للمركزية

Solution. The data needed for this example are

$$x_{i-2} = 0 \qquad f(x_{i-2}) = 1.2$$
$$x_{i-1} = 0.25 \qquad f(x_{i-1}) = 1.1035156$$
$$x_i = 0.5 \qquad f(x_i) = 0.925$$
$$x_{i+1} = 0.75 \qquad f(x_{i+1}) = 0.6363281$$
$$x_{i+2} = 1 \qquad f(x_{i+2}) = 0.2$$

The forward difference of accuracy $O(h^2)$ is computed as (Fig. 21.3)

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 4(0.6363281) - 3(0.925)}{2(0.25)} = -0.859375 \qquad \varepsilon_t = 5.82\%$$

The backward difference of accuracy $O(h^2)$ is computed as (Fig. 21.4)

$$f'(0.5) = \frac{3(0.925) - 4(1.1035156) + 1.2}{2(0.25)} = -0.878125 \qquad \varepsilon_t = 3.77\%$$

The centered difference of accuracy $O(h^4)$ is computed as (Fig. 21.5)

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 8(0.6363281) - 8(1.1035156) + 1.2}{12(0.25)} = -0.9125 \qquad \varepsilon_t = 0\%$$

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Thank you for your attention