Numerical analysis

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2022-2023

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Numerical analysis

Lecture 7

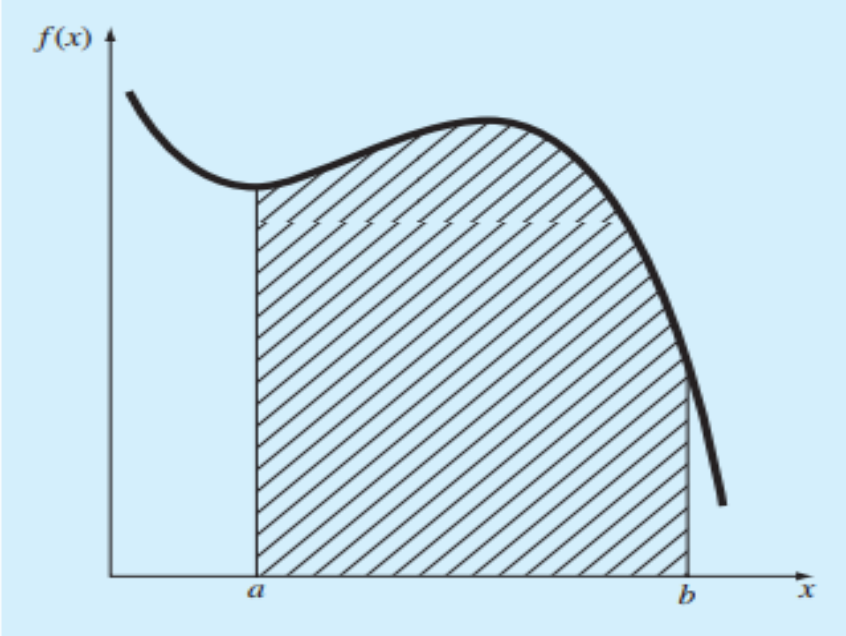
التكامل العددي

(Numerical Integration)

مقدمة

للتكامل العديد من التطبيقات الهندسية والعلمية ، هناك عدد من الأمثلة ذات الصلة مباشرة إلى فكرة التكامل باعتبارها المساحة الواقعة أسفل المنحنى.

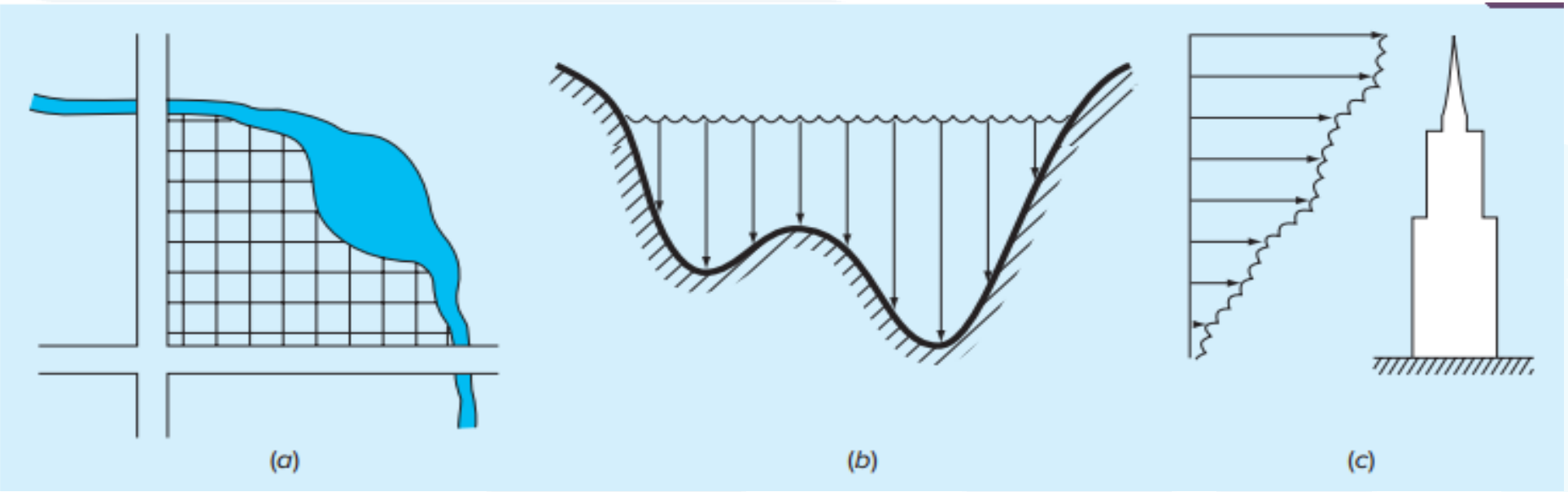
$$\int_a^b f(x)dx$$



.

مقدمة

أمثلة على كيفية استخدام التكامل لتقييم المجالات في التطبيقات الهندسية والعلمية.

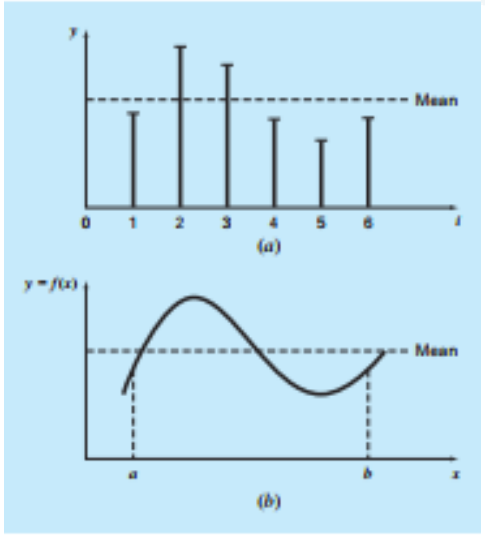


(a) قد يحتاج المساح الأراضي إلى معرفة مساحة حقل يحده جدول متعرج وطريقان

(b) قد يكون بحاجة إلى معرفة منطقة مقطع عرضي للنهر.

(c) قد يحتاج المهندس إلى تحديد القوة الكلية بسبب هبوب رياح غير منتظمة على جانب ناطحة سحاب

مقدمة



من الواضح جدا أهمية التكامل في الرياضيات التطبيقية ،ولكن الحاجة تكمن في معرفة كيفية إجراء التكامل

١- لتابع غير معلوم إلا عند عدد معين من النقاط (كما هو الحال غالبًا مع البيانات التجريبية)

٢- في حال التابع المكامل معقد بحيث لا يمكن إيجاد تكاملها بالطرق التحليلية التقليدية.

فمثلاً **التكامل المحدد** $\int_0^t e^{-x^2}\,dx$ يظهر في الكثير من مسائل الإحصاء وتوزيع الحرارة وتدفق سائل وغيرها من التطبيقات.

نلاحظ أن e^{-x^2} ليس له تابع أصلي وبالتالي لا نستطيع استخدام الطرائق المعروفة لحساب التكامل، ففي مثل هذه الأحوال نلجأ إلى الطرائق العددية لإيجاد قيمة تقريبية بالدقة المطلوبة لهذا التكامل.

و ليس عند ذلك فقط نلجأ إلى التكامل العددي بل حتى في حالات كون الدالة يمكن إيجاد تكاملها بسهولة فإننا نحتاج إلى إيجاد تكاملها بالطرق العددية لسرعة وسهولة العمل ودقة النتائج. هناك عدد كبير من الطرق المستخدمة لحساب التكاملات عددياً وسنذكر في هذه المحاضرة بعضاً من هذه الطرق.

التكامل العددي - مقدمة

تعتمد معظم طرائق حساب التكاملات العددية على تجزئة المجال التكامل [a,b] إلى n من **المجالات الجزئية المتساوية** ، طول كل منها h ، أي أنَ:

حيث

$$a = x_0 < x_1 \ldots\ldots < x_n = b$$

$$\Delta x = h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots\ldots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$$

ملاحظات:

طول الخطوة (step size) هو $h = \frac{b-a}{n}$

عدد القطع الجزئية هو n

عدد النقاط هو n+1

التكامل العددي - مقدمة

و تعطى xi بالعلاقة $x_i = a + ih$ حيث $i = 0,1,2,\ldots..n$

أي

$X0=a \quad ,x1=a+h , \quad x2+a+h , \ldots\ldots\ldots \quad xn=a+nh=b$

مثال : أوجد طول الخطوة من أجل تجزئة المجال [-1,3]إلى 4 خطوات متساوية.

الحل:

طول الخطوة هو $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3+1}{4} = 1$ ومنه أطراف المجالات الجزئية هي

$x_0 = -1, \; x_1 = 0 , \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3$

التكامل العددي - مقدمة

مثال : أوجد عدد نقاط تجزئة المجال [1,2] خطوات متساوية إذا علمت أن قياس الخطوة هو h=0.1.

الحل:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

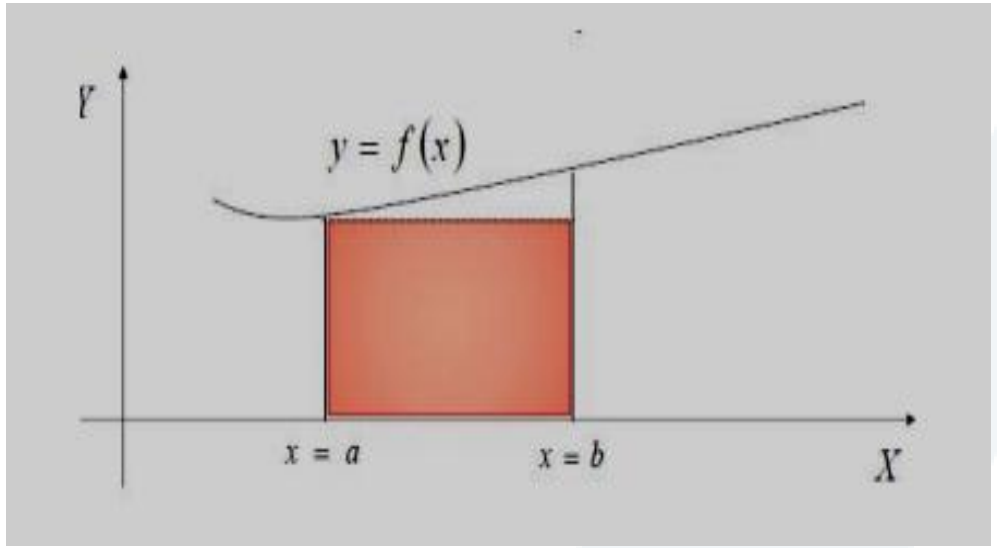
$$0.1 = \frac{2-1}{n} \Rightarrow n = 10$$

ومنه عدد عناصر التجزئة هو n+1=11

طريقة المستطيلات (Rectangular Rule Method)

ليكن لدينا التابع y=f(x) قابل للمكاملة على المجال [a,b] ، هدفنا إيجاد قيمة تقريبية لـ $S = \int_a^b f(x)dx$

إن قيمة التكامل s ما هي إلا المساحة السطح المحصور بين منحني التابع ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما x=a و x=b.

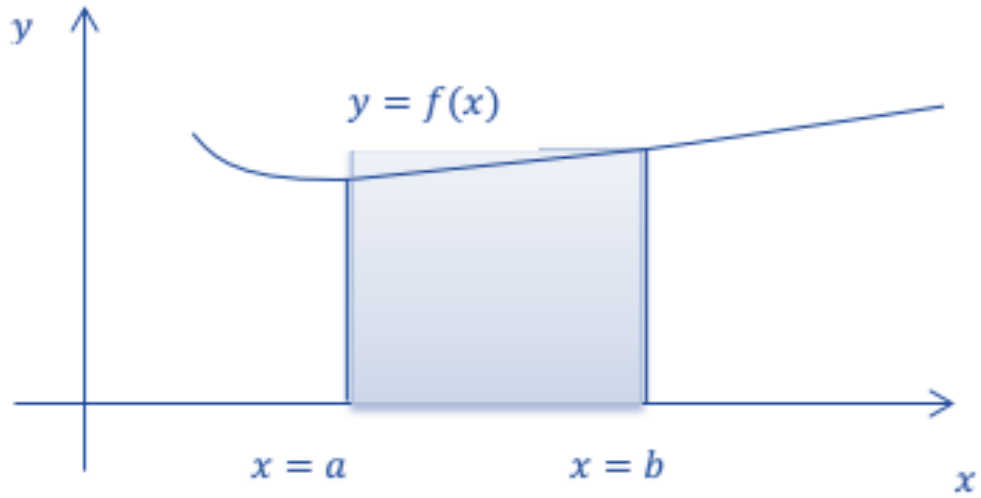


طريقة المستطيلات من أجل مجال جزئي واحد:

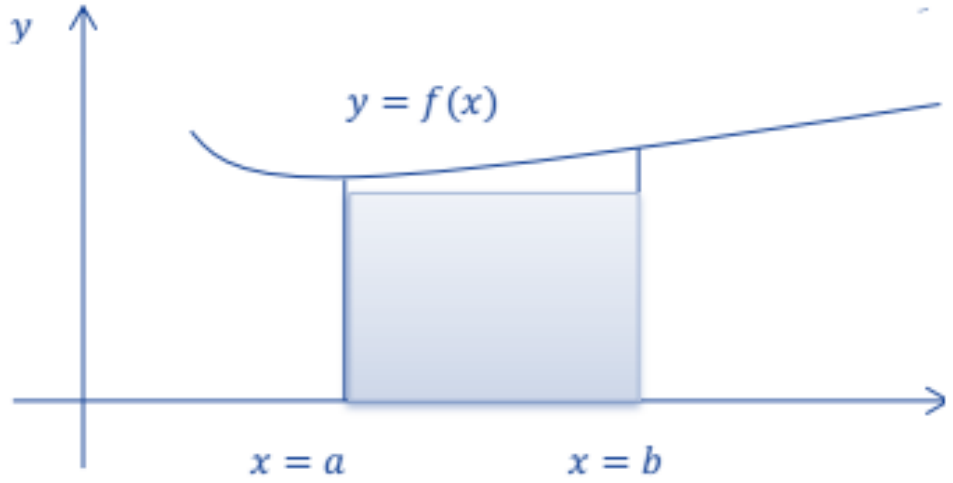
إنّ قيمة التكامل التقريبية هي مساحة المستطيل الذي طوله المجال [a,b] وعرضه f(a) ، أي أنَ القيمة التقريبية للتكامل هي

$$S = \int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f(a)$$

طريقة المستطيلات (Rectangular Rule Method)



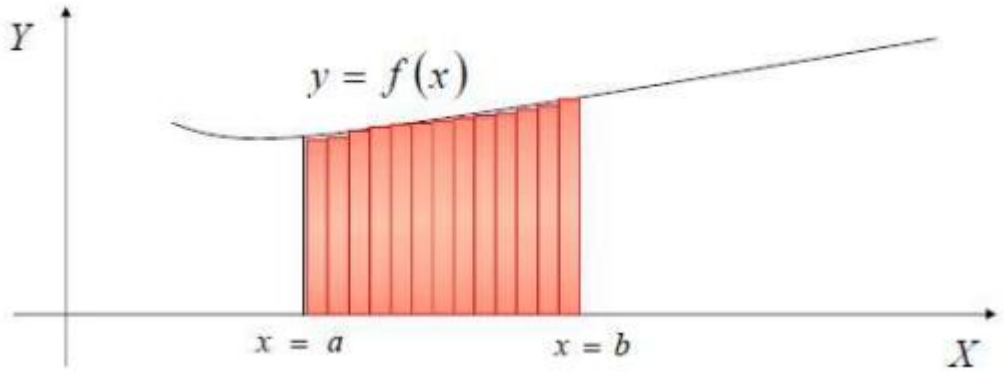
$$I = \int_a^b f(x).dx \cong (b-a).f(b)$$



$$I = \int_a^b f(x).dx \cong (b-a).f(a)$$

طريقة المستطيلات (Rectangular Rule Method)

نلاحظ أنه إذا كان طول المجال كبير فإنَّ خطأ القيمة التقريبية كبير وإذا كان طول المجال صغير فإن خطأ القيمة التقريبية صغير لذلك للحصول على قيمة تقريبية أكثر دقة وخطأ مرتكب أقل . نلجأ إلى تجزئة المجال إلى مجالات جزئية متساوية



طريقة المستطيلات من أجل n مجال جزئي متساو:

نقوم بتجزئة المجال [a,b] إلى n مجال جزئي متساو ويكون طول الخطوة هو $h = \frac{b-a}{n}$

أي أنَ القيمة التقريبية للتكامل هي

$$S = \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{(b-a)}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + \ldots . f(x_{n-1})\right]$$

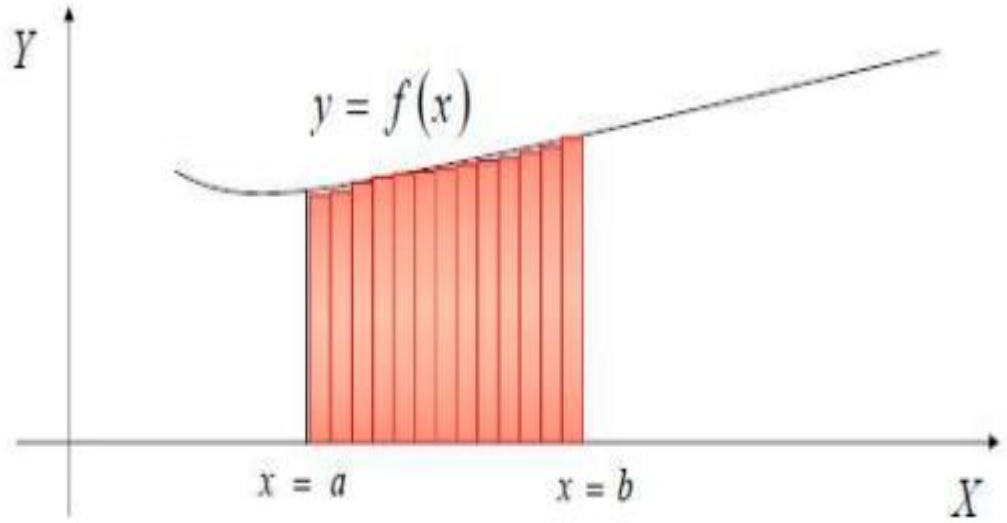
طريقة المستطيلات (Rectangular Rule Method)

طريقة المستطيلات

$$S = \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{(b-a)}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + \ldots . f(x_{n-1})\right]$$

أو تعطى بالعلاقة

$$S = \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{(b-a)}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \ldots . f(x_n)\right]$$



ملاحظة : إذا كانت n تسعى الى النهاية نحصل على القيمة الحقيقية للتكامل

طريقة المستطيلات (Rectangular Rule Method)

مثال: ليكن لدينا y=f(x) المعطاة بالجدول التالي

x	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	4.953	6.050	7.389	9.25	11.23	13.46

أوجد قيمة تقريبية للتكامل $I = \int_{1.6}^{2.6} f(x)dx$

الحل: طول الخطوة هو h=0.2

القيمة التقريبية للتكامل هي

$$I \cong h[f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4]$$

$$\cong 0.2[4.953 + 6.050 + 7.389 + 9.025 + 11.023]$$

$$\cong 0.2(38.44) = 7.688$$

طريقة المستطيلات (Rectangular Rule Method)

مثال : استخدم طريقة المستطيلات لحساب التكامل العددي:

$$\int_0^1 \cos(x+1)dx$$

من أجل $n=10$، ثم لحساب الخطأ المطلق

الحل: لدينا $a=0$; $b=1$، $h=\frac{1-0}{10}=0.1$ ، وبالتالي $x_i=ih$ من أجل $i=0,1,...,10$، و $f(x)=\cos(x+1)$، نطبق طريقة المستطيلات:

طريقة المستطيلات (Rectangular Rule Method)

$$S = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = 0.1\sum_{i=0}^{9} \cos(x_i + 1) =$$

$$=0.1[0.540302+0.453596+0.362358+0.267499+0.169967+$$
$$0.0707372+(-0.0291995)+(-0.128844)+(-0.227202)+$$
$$(-0.32329)]= 0.115592,$$

ولحساب الخطأ المطلق يجب حساب القيمة الفعلية للتكامل وهي:

$$\int_0^1 \cos(x+1)dx = Sin(2) - Sin(1),$$

وعندئذ يكون الخطأ المطلق: "الفرق بين القيمة الفعلية والقيمة التقريبية للتكامل":

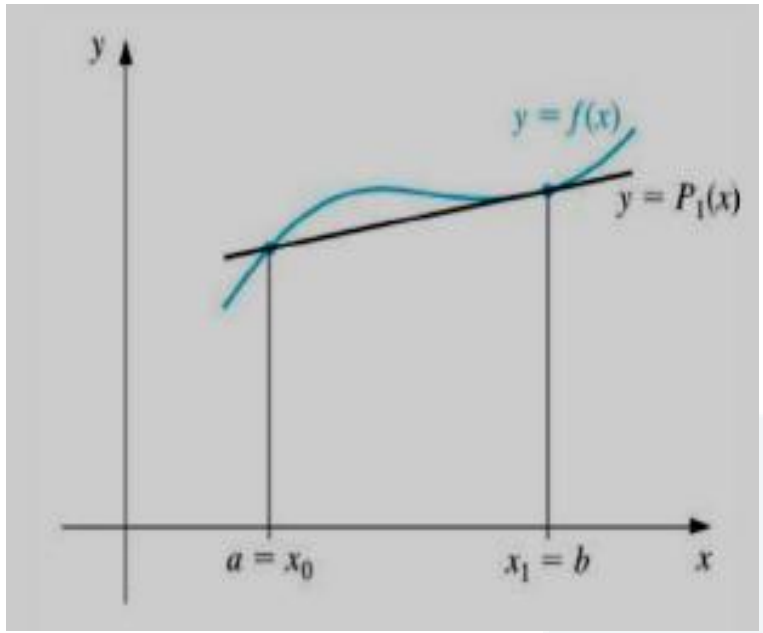
$$\delta = | S - (Sin(2) - Sin(1)) | = 4.77659E-2$$

قاعدة شبه المنحرف (Trapezoidal Rule)

إن الطريقة المستطيلات تحمل خطأ كبير في قيمة التكامل التقريبية ، وعلى الرغم من زيادة المجالات الجزئية إلا أن الخطأ ما يزال ملحوظاً . فبدلاً من إنشاء مستطيلات ،سنقوم بإنشاء شبه منحرف

لنتذكر

مساحة شبه منحرف هي جداء نصف مجموع القاعدتين بالارتفاع



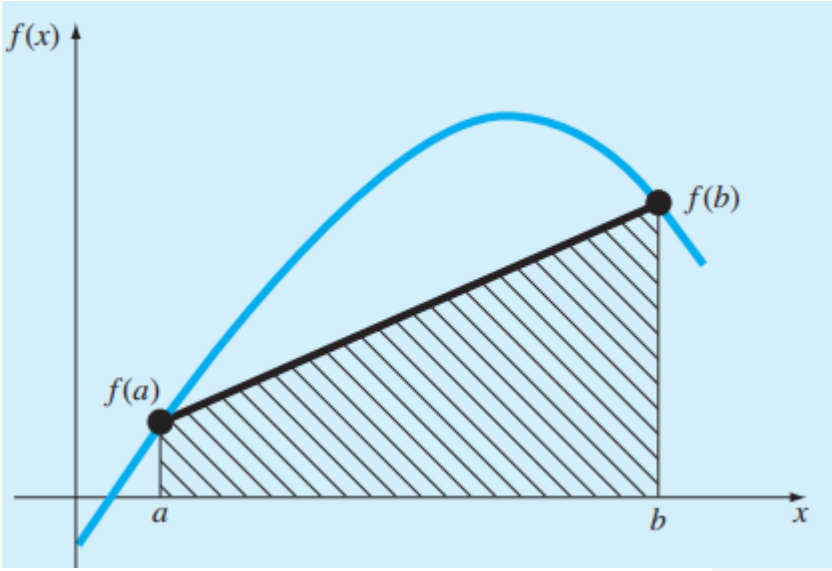
قاعدة شبه المنحرف من أجل مجال جزئي واحد:

إنّ قيمة التكامل التقريبية هي مساحة شبه المنحرف الذي ارتفاعه طوله المجال [a,b] وطول قاعدتيه f(a) و f(b) ، أي أنَ القيمة التقريبية للتكامل هي

$$S = \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{(b-a)}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

قاعدة شبه المنحرف (Trapezoidal Rule)

أي تمّ استيفاء الدالة المعطاة بالنقطتين بقطعة مستقيمة وتم َمكاملته وسميت هذه الطريقة بقاعدة شبه المنحرف لأن قيمة التكامل التقريبية تساوي مساحة شبه المنحرف



$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

ومنه

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

مثال: استخدم طريقة شبه المنحرف لحساب القيمة التقريبية للتكامل

$$I = \int_0^1 x^3 dx$$

واحسب الخطأ المئوي النسبي

قاعدة شبه المنحرف (Trapezoidal Rule)

الحل: القيمة التقريبية بقاعدة شبه المحرف هي

$$I = \int_0^1 x^3 dx \simeq \frac{1-0}{2}(\mathrm{f}((1) + \mathrm{f}(0))$$

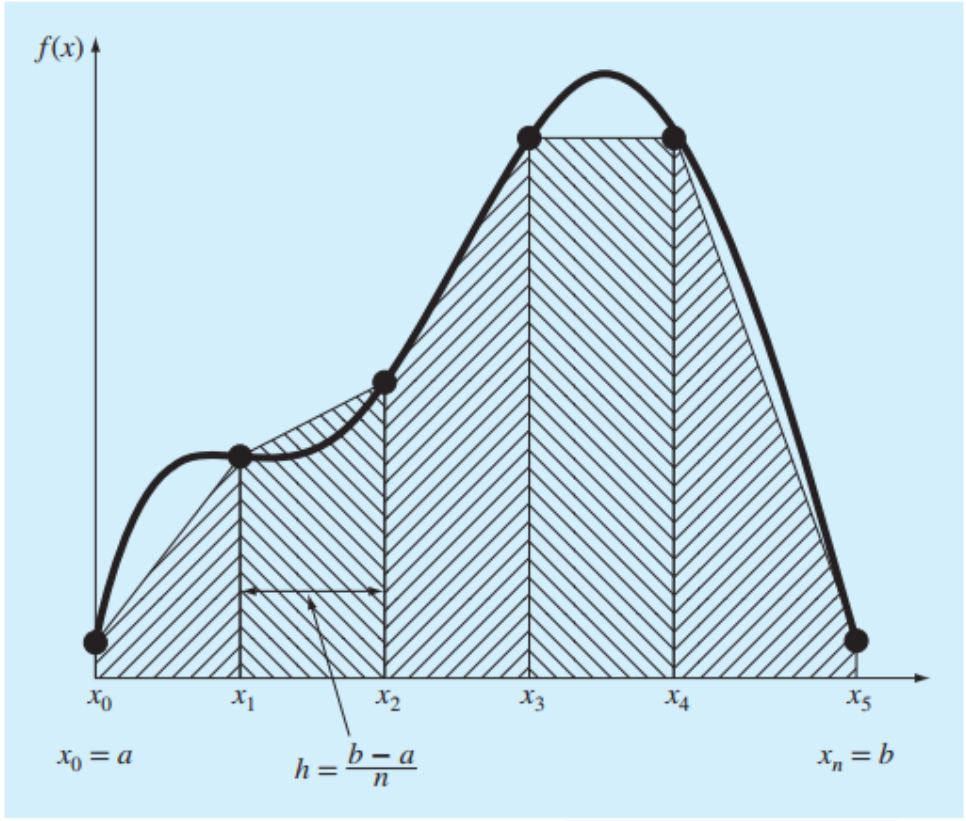
$$\simeq \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$$

القيمة الحقيقية هي: $$I = \int_0^1 x^3 dx \simeq \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

الخطأ المئوي النسبي هو

$$\varepsilon_t = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right|}{\frac{1}{4}} \times 100\% = 100\%$$

قاعدة شبه المنحرف المركبة (The Composite Trapezoidal Rule)



نقوم بتجزئة المجال [a,b] إلى n مجال جزئي متساو ويكون طول الخطوة هو $h = \frac{b-a}{n}$

أي أنَ القيمة التقريبية للتكامل هي

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots\ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

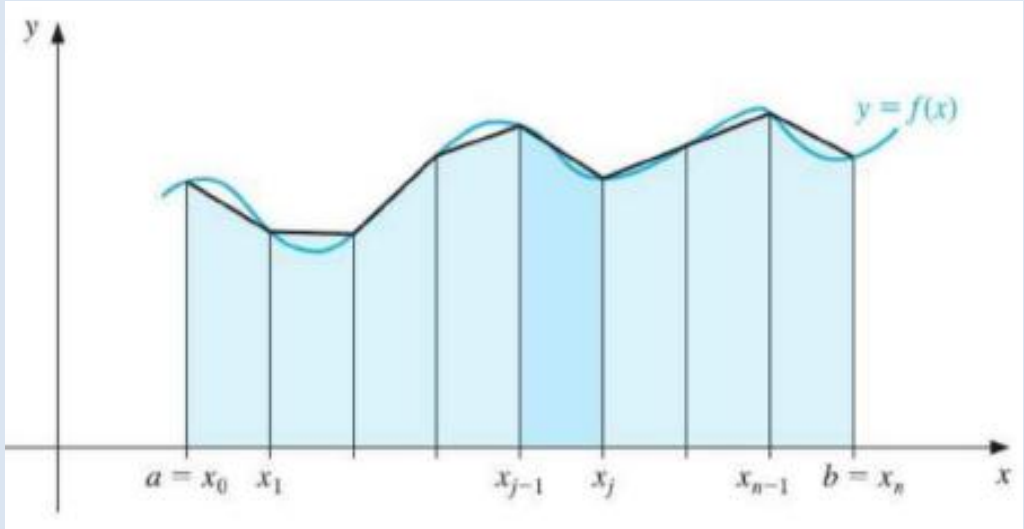
$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \ldots. + \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots\ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

قاعدة شبه المنحرف المركبة (The Composite Trapezoidal Rule)

قاعدة شبه المنحرف المركب

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots\ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$



حيث

$$h = \frac{b-a}{n}$$

قاعدة شبه المنحرف المركبة (The Composite Trapezoidal Rule)

مثال: استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة لحساب القيمة التقريبية للتكامل

$$I = \int_0^1 x^3 dx$$

وذلك بعد تجزئة المجال إلى أربع مجالات جزئية واحسب الخطأ المئوي النسبي.

الحل: طول الخطوة $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$ ومنه

$$x_0 = 0 \ , \ x_1 = 0.25 \ , \ x_2 = 0.5 \ , x_3 = 0.75 \ , x_4 = 1$$

قاعدة شبه المنحرف المركبة (The Composite Trapezoidal Rule)

$$I = \int_0^1 x^3 dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4) \right]$$

$$I \simeq \frac{0.25}{2}\left[0^3 + 2\left((0.25)^3 + (0.5)^3 + (0.75)^3 \right) + (1)^3 \right]$$

$$I \simeq 0.265625$$

وهي القيمة التقريبية

وكما وجدنا سابقاً القيمة الحقيقية هي 0.25

الخطأ المئوي النسبي هو

$$\varepsilon_t = \frac{\left| 0.25 - 0.265625 \right|}{0.25} \times 100\% = 6.25\%$$

قاعدة شبه المنحرف المركبة (The Composite Trapezoidal Rule)

مثال: استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة لحساب القيمة التقريبية للتكامل

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2 dx$$

متخذاً أربع نقاط ، واحسب الخطأ المئوي النسبي.

الحل: أي n+1=4 ومنه n=3 ويكون $f(x) = \sin x^2$ طول الخطوة ومنه $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{3} = \frac{\pi}{6}$

$$x_0 = 0 \ , \ x_1 = \frac{\pi}{6} \ , \ x_2 = \frac{\pi}{3} \ , x_3 = \frac{\pi}{2}$$

قاعدة شبه المنحرف المركبة (The Composite Trapezoidal Rule)

$$I = I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2 dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_3) \right]$$

$$I \simeq \frac{\frac{\pi}{6}}{2}\left[\sin\left(0\right)^2 + 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right]$$

$$I \simeq 1.542037743$$ وهي القيمة التقريبية

نوجد القيمة الحقيقية بالآلة الحاسبة
وهي 0.8281163288

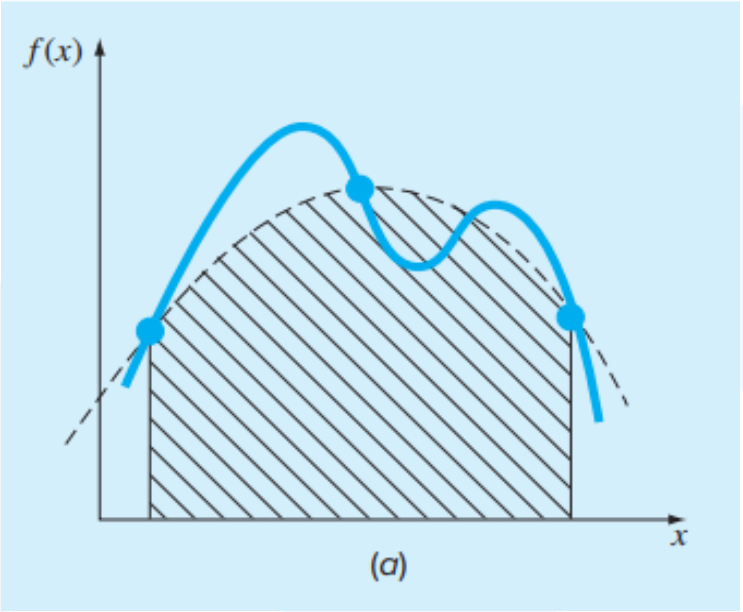
$$\varepsilon_t = \frac{\left|0.8281163288 - 1.542037743\right|}{0.8281163288} \times 100\%$$

الخطأ المئوي النسبي هو

قاعدة سيمبسون (Simpson’s Rule)

قاعدة 1/3 سيمبسون (Simpson’s 1/3 Rule)

تتوافق قاعدة 1\3سيمبسون مع الحالة التي يكون فيها كثير الحدود استيفاء من الدرجة الثانية ، في هذه الحالة القيمة التقريبية للتكامل هي مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للقطع المكافئ y =f(x) والمستقيمين اللذين معادلتهما y=a و y=b ومحور الفواصل



قاعدة 1/3 سيمبسون (Simpson's 1/3 Rule)

وتعطى كثير حدود استيفاء لاغرانج من الدرجة الثانية بالعلاقة:

$$p(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)})f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

وتكون القيمة التقريبية للتكامل

$$I = \int_a^b \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)})f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2 \right] dx$$

قاعدة 1/3 سيمبسون (Simpson's 1/3 Rule)

ويكون

$$I = (\mathrm{b}-\mathrm{a})\left[\frac{f_0 + 4f_1 + f_2}{6}\right]$$

حيث $h = \frac{b-a}{2}$ ومنه

$$I = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right)$$

وهي صيغة سيمبسون البسيطة

قاعدة 1/3 سيمبسون المركبة (The Composite Simpson's 1/3 Rule)

ومن أجل أكثر دقة نجزئ المجال [a,b} إلى عدد زوجي n=2m من المجالات الجزئية المتساوية الطول حيث $h = \frac{b-a}{2}$ ويكون

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

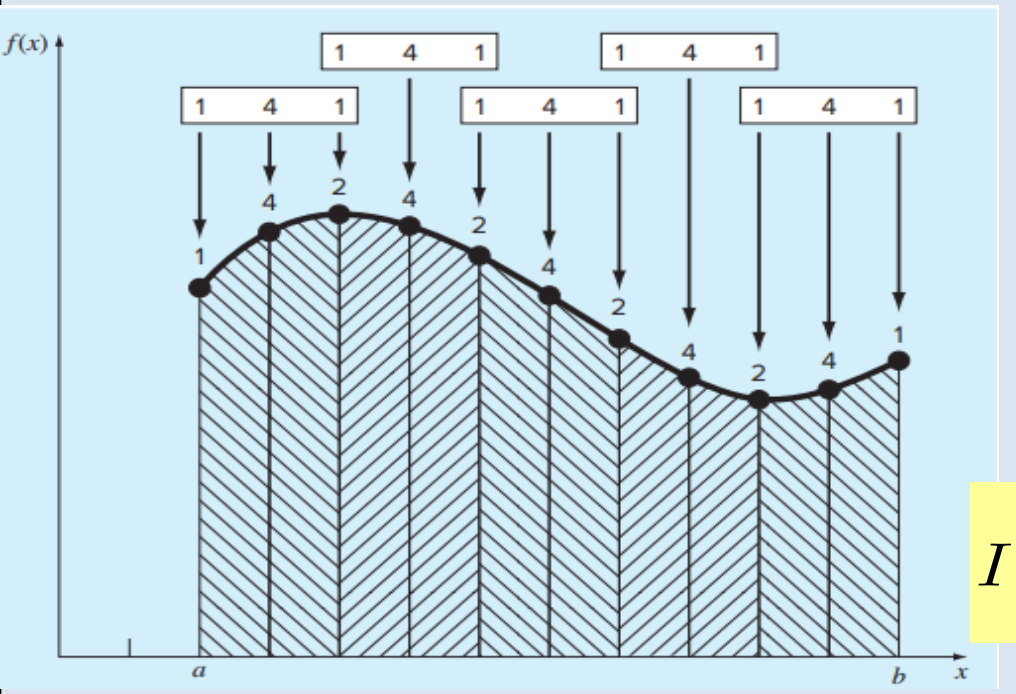
$$I = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right) + \frac{h}{3}\left(f_2 + 4f_3 + f_4\right) + ... + \frac{h}{3}\left(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right)$$

$$I = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + ... + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

قاعدة 1/3 سيمبسون (Simpson's 1/3 Rule)

قاعدة 1/3 سيمبسون (Simpson's 1/3 Rule)

البسيطة



$$I = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2 \right)$$

المركبة (The Composite Simpson's 1/3 Rule)

$$I = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \ldots\ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n \right]$$

قاعدة 1/3 سيمبسون (Simpson's 1/3 Rule)

مثال: استخدم قاعدة 1/3 سيمبسون المركبة لحساب القيمة التقريبية للتكامل

$$I = \int_0^3 x^2 dx$$

وذلك بعد تجزئة المجال إلى ست مجالات جزئية واحسب الخطأ المئوي النسبي.

الحل: $f(x) = x^2$ طول الخطوة $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = 0.5$ ومنه

$$x_0 = 0 \ , \ x_1 = 0.5 \ , \ x_2 = 1 \ , x_3 = 1.5 \ , x_4 = 2 \ , x_5 = 2.5 \ , x_6 = 3$$

قاعدة 1/3 سيمبسون (Simpson's 1/3 Rule)

الحل:

$$I = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6 \right]$$
$$= \frac{0.5}{3}\left[(0) + 4(0.25) + 2(1) + 4(2.25) + 2(4) + 4(6.25) + (9) \right]$$
$$= 9$$

والقيمة الحقيقية

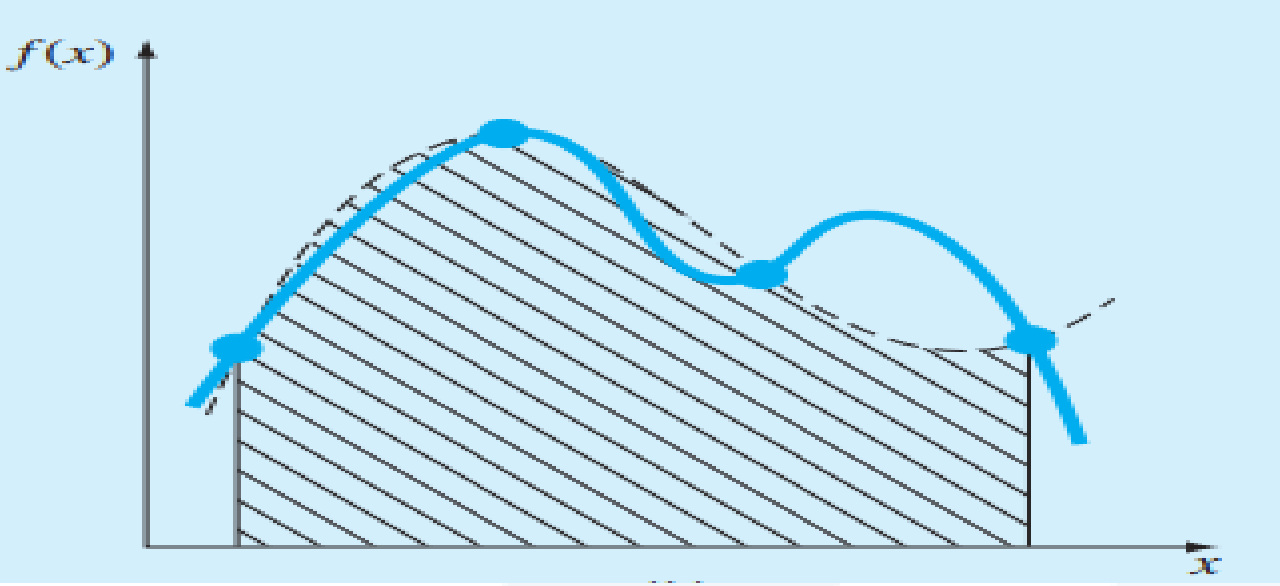
$$I = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9$$

قاعدة سيمبسون (Simpson’s Rule)

قاعدة 3/8 سيمبسون (Simpson’s 3/8 Rule)

تتوافق قاعدة 3\8سيمبسون مع الحالة التي يكون فيها كثير الحدود استيفاء من الدرجة **الثالثة** ، في هذه الحالة القيمة التقريبية للتكامل هي مساحة السطح المحصور بين الخط والمستقيمين اللذين معادلتهما y=a و y=b ومحور الفواصل

وتكون القيمة التقريبية للتكامل:

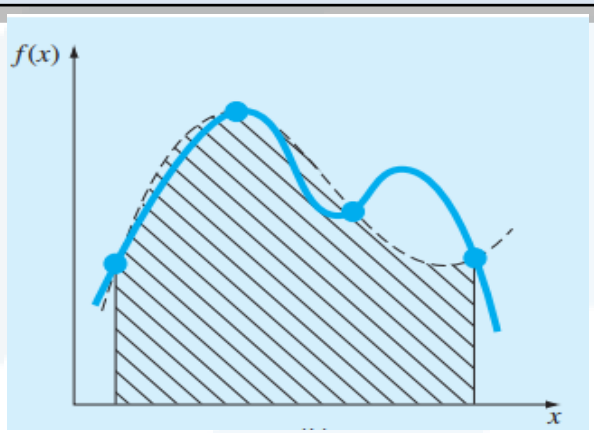


$$I = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

قاعدة 3/8 سيمبسون (Simpson's 3/8 Rule)

قاعدة 3\8سيمبسون (Simpson's 1/3 Rule)

$$I = \frac{3h}{8}\left[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3 \right]$$



قاعدة 3/8 سيمبسون (Simpson's 3/8 Rule)

مثال:

أولا: استخدم قاعدة 3/8 سيمبسون لإيجاد قيمة تقريبه للتكامل $I = \int_0^{0.8} f(x)dx$ حيث

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

ثانياً : ادمج قاعدة 1/3 سيمبسون جنبًا إلى جنب مع قاعدة 3/8 سيمبسون لإيجاد التكامل لنفس التابع السابق لخمسة مجالات جزئية.

قاعدة 3/8 سيمبسون (Simpson's 3/8 Rule)

الحل: أولاً: طول الخطوة ومنه $h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8}{3} = 0.667$

$$x_0 = 0 \ , \ x_1 = 0.667 \ , \ x_2 = 0.5333 \ , x_3 = 0.8$$

$f(0) = 0.2$ $f(0.2667) = 1.432724$

$f(0.5333) = 3.487177$ $f(0.8) = 0.232$

$$I = 0.8\,\frac{0.2 + 3(1.432724 + 3.487177) + 0.232}{8} = 1.51917$$

قاعدة 3/8 سيمبسون (Simpson's 3/8 Rule)

ثانيا:

(b) The data needed for a five-segment application ($h = 0.16$) are

$$f(0) = 0.2 \qquad f(0.16) = 1.296919$$

$$f(0.32) = 1.743393 \qquad f(0.48) = 3.186015$$

$$f(0.64) = 3.181929 \qquad f(0.80) = 0.232$$

The integral for the first two segments is obtained using Simpson's 1/3 rule:

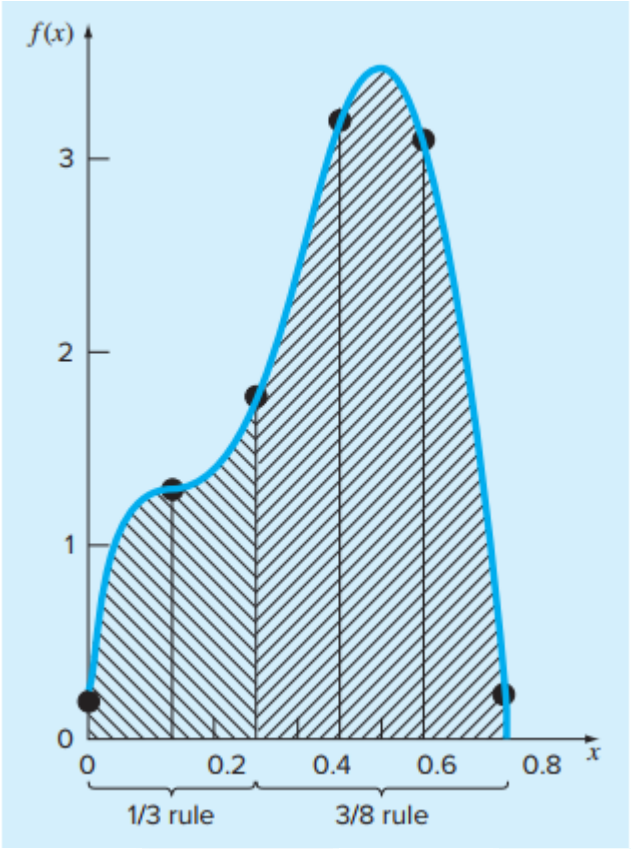
$$I = 0.32\,\frac{0.2 + 4(1.296919) + 1.743393}{6} = 0.3803237$$

For the last three segments, the 3/8 rule can be used to obtain

$$I = 0.48\,\frac{1.743393 + 3(3.186015 + 3.181929) + 0.232}{8} = 1.264754$$

The total integral is computed by summing the two results:

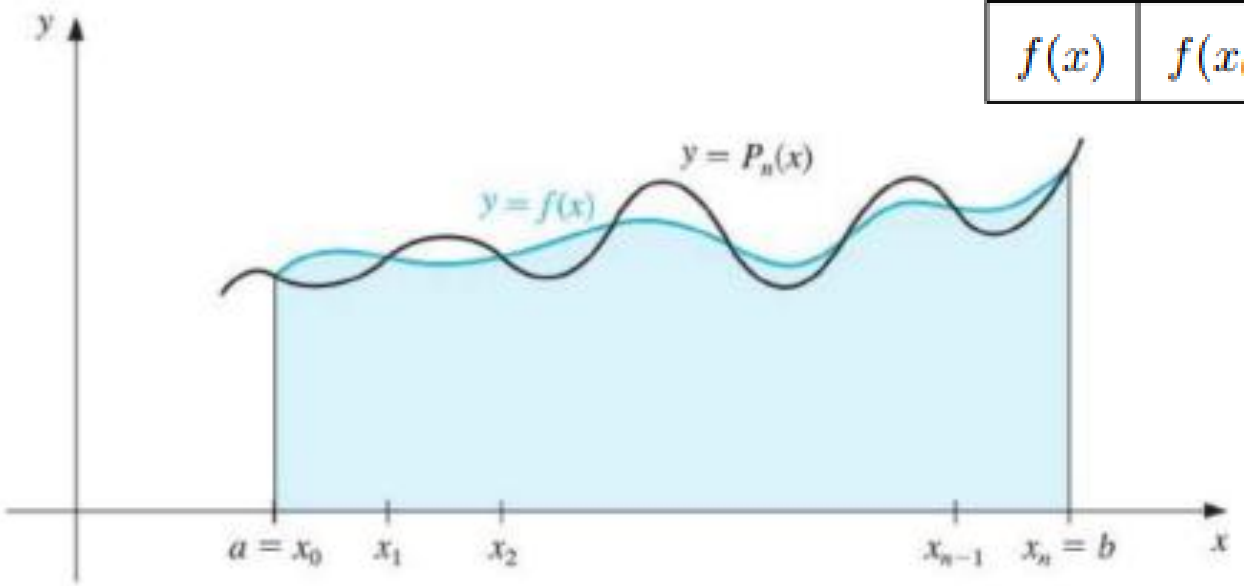
$$I = 0.3803237 + 1.264754 = 1.645077$$



طريقة نيوتن-كوتس (Newton-Cotes Methods)

لإيجاد التكامل العددي نقوم باستيفاء التابع المكامل بكثير حدود لاغرانج

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_3)$	...	$f(x_n)$



طريقة نيوتن-كوتس (Newton-Cotes Methods)

الفكرة هي استبدال التابع المكامل بكثير حدود لاغرانج ومكاملته

Replace f by $p_n(x)$ and evaluate $\int_a^b p_n(x)dx$

That is,

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x_i)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

Where $A_i = \int_a^b l_i(x)dx$ called weights.

طريقة نيوتن-كوتس (Newton-Cotes Methods)

بعض صيغ نيوتن-كوتس الشائعة

- Trapezoidal Rule (Two pint formula)
- Simpson's $1/3$ Rule (Three Point formula)
- Simpson's $3/8$ Rule (Four point formula)

$n = 1$: قاعدة شبه المنحرف **Trapezoidal rule**

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

حيث $x_0 < \xi < x_1$.

$n = 2$: قاعدة سمبسون **Simpson's rule**

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

حيث $x_0 < \xi < x_2$.

$n = 3$: قاعدة الثلاثة أثمان لسمبسون **Simpson's Three-Eighths rule**

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$$

حيث $x_0 < \xi < x_4$.

استخدام كثير حدود لاغرانج(Using Lagrange Polynomials)

عندما تكون النقاط المعطاة في الجدول **غير منتظمة التوزيع**، ما علينا إلا أن نجد كثير حدود لاغرانج ونكامله كما في المثال الآتي

مثال:

نفرض لدينا الجدول

x	0	1	3
f(x)	-2	7	49

مطلوب إيجاد التكامل على الدالة f(x) من x = 0 إلى x = 3.

استخدام كثير حدود لاغرانج (Using Lagrange Polynomials)

الحل

بما أن النقاط غير موزعة بانتظام فإننا نستخدم حدودية لكرانج.

$$P_2(x) = -2\frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} + 7\frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} + 49\frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}$$

$$= 4x^2 + 5x - 2 \qquad \therefore$$

$$\int_0^3 P_2(x)dx = \int_0^3 (4x^2 + 5x - 2)dx$$

$$\int_0^3 P_2(x)dx = 52.5$$

إذا علمت أن الدالة في الجدول هي بالحقيقة.

$$f(x) = x^3 + 8x - 2$$

فإن

$$\int_0^3 f(x)dx = 57$$

وأن الخطأ النسبي في القيمة التقريبية للتكامل هي

$$\delta = 0.08$$

تمارين

التمرين الأول:

لتكن لدينا الدالــة $f(x) = 2 + Sin(2\sqrt{x})$ ، والمطلــوب: اســتخدام طريقة المستطيلات بحساب 11 قيمة للدالة، لإيجاد تقريب لتكامــل الدالــة $f(x)$ فوق المجال $[1, 6]$، ثم حساب الخطأ المطلق

التمرين الثاني:

استخدم طريقة المستطيلات لحساب القيمة التقريبية للتكامل التالي:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

حيث h=0.1

التمرين الثالث:

: استخدم طريقة أشباه المنحرفات لحساب التكامل العددي:

$$\int_1^2 x e^x dx$$

من أجل $n=10$، ثم احسب الخطأ المطلق ،

التمرين الرابع:

باستخدام قاعدة شبه المنحرف اوجد القيمة التقريبية للتكامل

$$\int_0^2 e^x \, dx$$

باستخدام 1, 2, 4, 8 من الفترات الجزئية

التمرين الخامس:

باستخدام قاعدة سيمبسون

$$\int_0^2 e^x \, dx$$

باستخدام 8 ,4 ,2 من الفترات الجزئية، اي باستخدام $n = 1, 2, 4$.

حل التمرين الأول

الحل: لدينا $a=1$; $b=6$، وبالتالي نستخدم $n=10$ لضمان 11 قيمة للتجزئة،

إذن $h=\frac{6-1}{10}=0.5$ ؛ $x_i=1+ih$; ، $i=0,1,...,10$

$$S=h\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)=0.5\sum_{i=0}^{9}[2+\sin(2\sqrt{x_i})]=$$

$$=0.5(2.9092974+2.6381576+2.30807174+1.97931648+$$

$$1.68305285+1.435304101+1.243197505+1.108317745+$$

$$1.0287222+1.00024140)=8.6668395105$$

ولحساب الخطأ المطلق يجب حساب القيمة الفعلية للتكامل وهي:

$$\int_1^6 2+Sin\left(2\sqrt{x}\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(20+2\,\mathrm{Cos}[2]-2\sqrt{6}\,\mathrm{Cos}\left[2\sqrt{6}\right]-\mathrm{Sin}[2]+\mathrm{Sin}\left[2\sqrt{6}\right]\right)$$

$$=8.18347920766067$$

وعندئذ يكون الخطأ المطلق في التكامل:

$$\delta=|8.6668395105-8.18347920766|=4.8336030E-1$$

حل التمرين الثاني

الحل:

نقوم بتجزئة المجال $[0,1]$ إلى عشرة أقسام متساوية فنحصل على الجدول التالي الذي يعطي قيم الدالة $f(x)=\frac{1}{1+x}$ عند نقاط التقسيم :

X	F(x)	X	F(x)
0	1	0.6	0.625
0.1	0.909090909	0.7	0.588235294
0.2	0.833333333	0.8	0.555555555
0.3	0.769230769	0.9	0.526315789
0.4	0.714285714	1	0.5
0.5	0.666666666		

حل التمرين الثاني

باستخدام طريقة المستطيلات لحساب القيمة التقريبية للتكامل نكتب:

$$I \cong h[f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_9]$$

$$I \cong 0.1[1 + 0.909090909 + 0.833333333 + 0.769230769 + 0.714285714 + 0.666666666 + 0.625 + 0.588235294 + 0.555555555 + 0.526315789]$$

$$\cong 0.718771402$$

حل التمرين الثالث

الحـــل: لـدينا $a=1$ ؛ $b=2$، وبالتـالي $h=\frac{2-1}{10}=0.1$ ، $x_i=1+ih$ مـن أجـل $i=0,1,...,10$ ، $f(x)=x\,e^x$ ، نطبق صيغة أشباه المنحرفات:

$$S=h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right]=0.1\left[\frac{e+2e^2}{2}+\sum_{i=1}^{9}x_i\,e^{x_i}\right]$$

$$=0.1\left[\frac{e}{2}+e^2+3.3045826+3.9841403+4.770085667+\right.$$

$$5.67727995+6.7225336+7.9248519+9.3057105+$$

$$\left.10.8893654+12.70319942\right]=7.40299464$$

ولحساب الخطأ المطلق يجب حساب القيمة الفعلية للتكامل:

$$\int_1^2 xe^x dx=e^x(x-1)\Big|_1^2=e^2$$

وعندئذ فالخطأ المطلق هو الفرق بالقيمة المطلقة بين القيمـــة الفعليـــة والقيمـــة التقريبية للتكامل:

$$\delta=|e^2-S|=|7.3890561-7.40299465|=1.39385E-2$$

حل التمرين الرابع

الحل:

$$n = 1$$

$$\frac{1}{2}(2)\{f(0) + f(2)\} = 8.3890561$$

$$n = 2$$

$$\frac{1}{2}(1)\{f(0) + f(2) + 2f(1)\} = 6.9128099$$

$$n = 4$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left\{f(0) + f(2) + 2\left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} = 6.5216101$$

$$n = 8$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\{f(0) + f(2) + 2[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$+f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)]\} = 6.4222978$$

حل التمرين الخامس

الحل:

$$n = 1$$

$$\frac{1}{3}(1)\{f(0) + f(2) + 4f(1)\} = 6.420727$$

$$n = 2$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left\{f(0) + f(2) + 4\left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + 2f(1)\right]\right\} = 6.3912102$$

$$n = 4$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)\{f(0) + f(2) + 4[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$2[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)]\} = 6.3891937$$

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Thank you for your attention