Exercise 7: Analyzing Continuous-Time Systems in the Frequency Domain

Ramez Koudsieh, Ph.D.

Oshin Daoud , Eng.

Faculty of Engineering
Department of Mechatronics
Manara University

CECC507: Signals and Systems
2023-2022

1. Determine the Fourier transform of the signal

$$x(t) = \sin(\pi t)\Pi\left(t - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \sin(\pi t), & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Using the multiplication property of the Fourier transform

$$F\{p(t)q(t)\} = P(f) * Q(f)$$

$$p(t) = \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow P(f) = \text{sinc}(\pi f)\text{e}^{-j\pi f}$$

$$q(t) = \sin(\pi t) \Rightarrow Q(f) = -j\frac{1}{2}\delta(f - 0.5) + j\frac{1}{2}\delta(f + 0.5)$$

$$X(f) = Q(f) * P(f) = \frac{1}{2j}\left[\text{sinc}(\pi(f - 0.5))e^{-j\pi(f-0.5)} + \text{sinc}(\pi(f + 0.5))e^{-j\pi(f+0.5)}\right]$$

$$FT\{A\sin(2\pi f_0 t)\} = -j\frac{A}{2}\delta(f - f_0) + j\frac{A}{2}\delta(f + f_0)$$

$$FT\{A\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0)$$

Convolution property

For two transform pairs

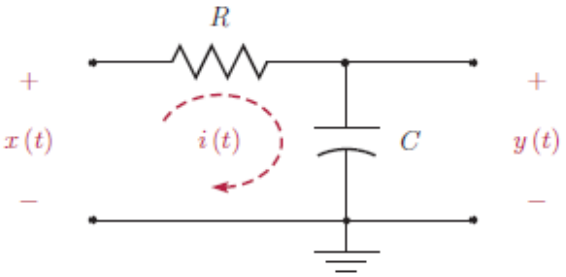
$$x_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(\omega) \quad \text{and} \quad x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$$

it can be shown that

$$x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)\, X_2(\omega)$$

Transfer function -1-

استخرج تابع النقل للدارة التالية



Integrator

$$x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

$$\frac{1}{RC}x(t) = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t)$$

$$\frac{1}{RC}X(w) = jwY(w) + \frac{1}{RC}Y(w)$$

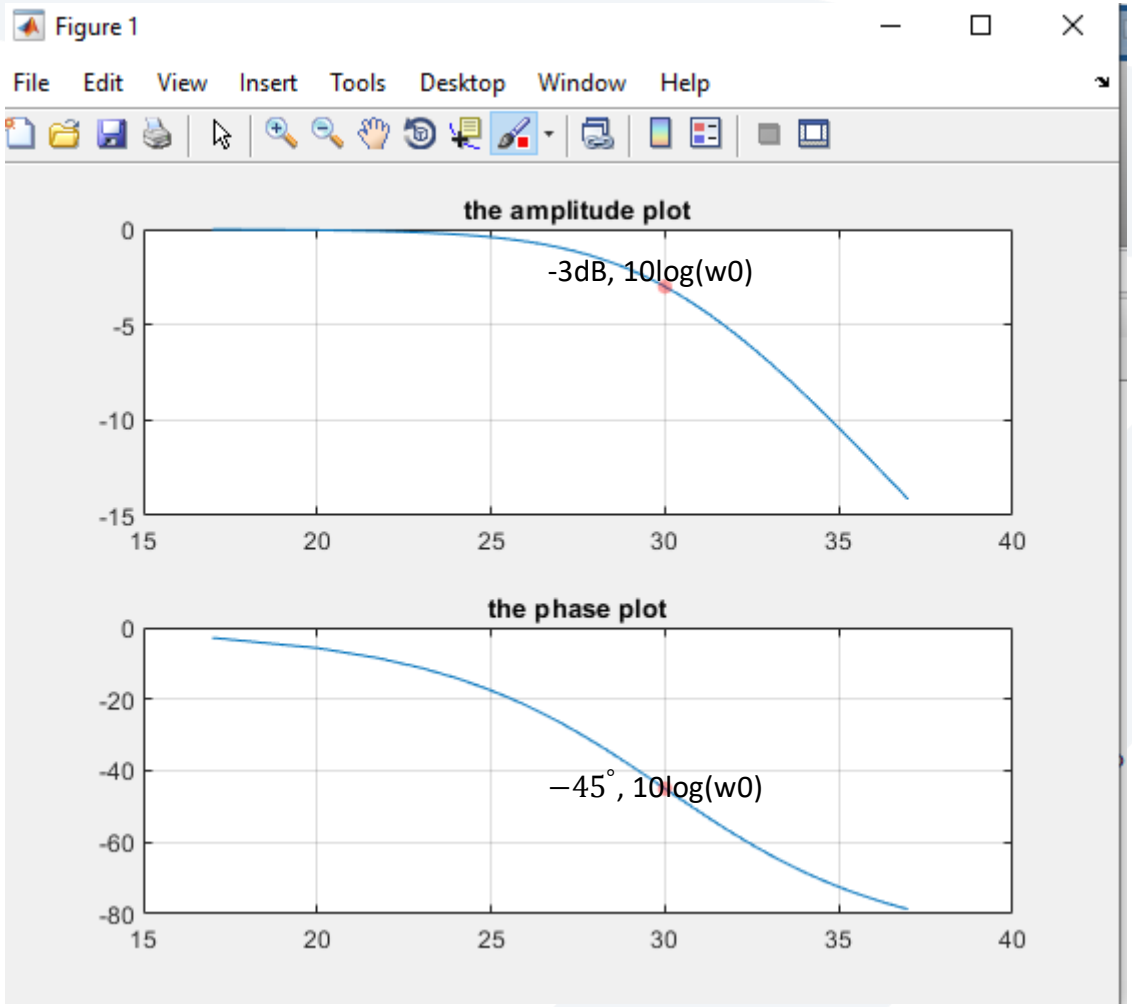
Frequency domain

$$\frac{1}{RC}X(w) = Y(w)\left(jw + \frac{1}{RC}\right)$$

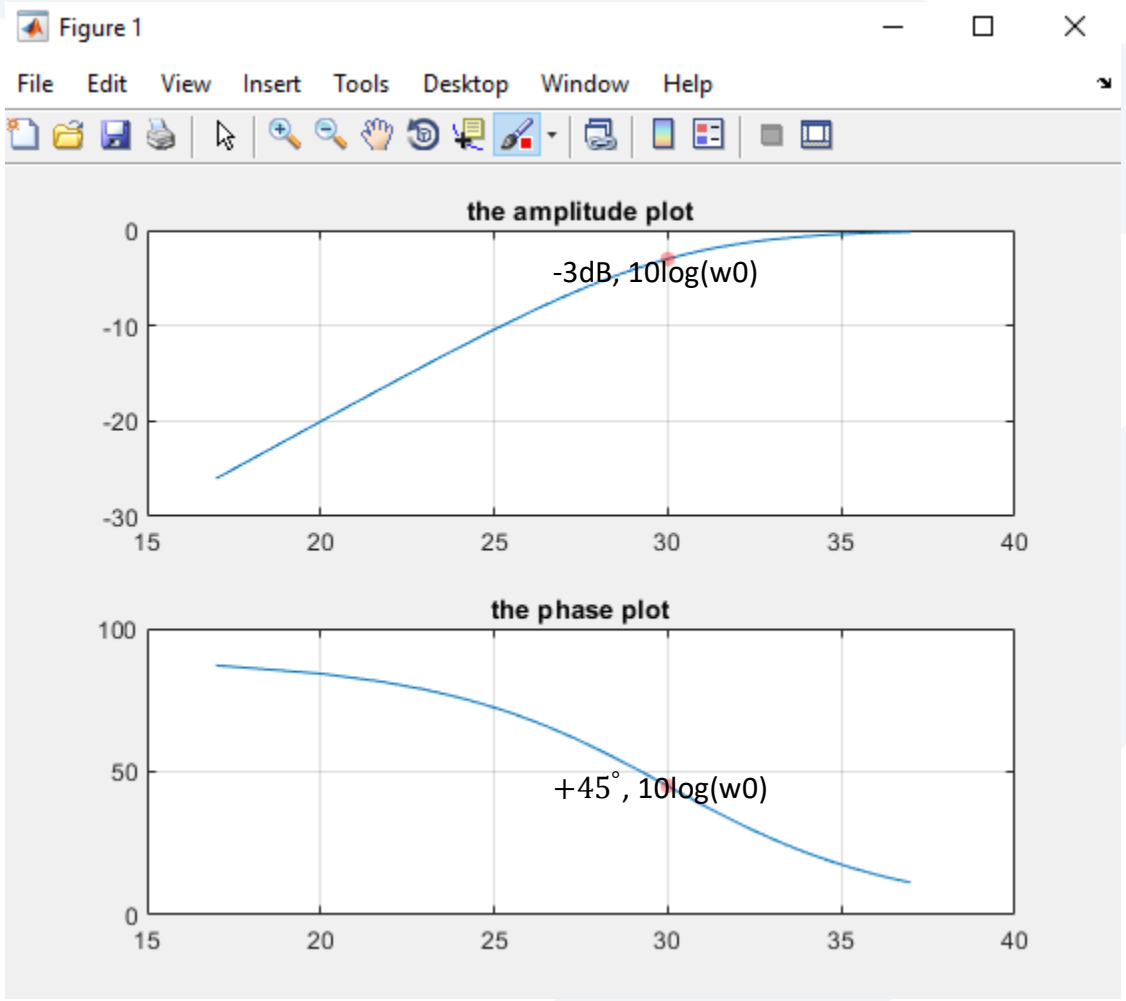
$$X(w) = Y(w)(jRCw + 1)$$

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{1}{(jRCw + 1)} = \frac{1}{1 + \frac{jw}{w0}}$$

مرشح تردد منخفض



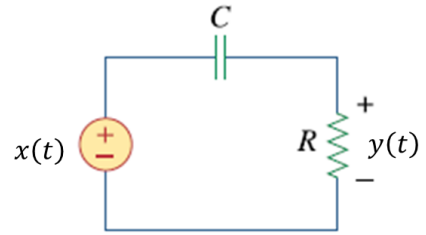
Transfer functions -2-



استخرج تابع النقل للدارة التالية

$$x(t) = v_R + v_C$$

$$x(t) = y(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt$$



Differentiator

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{y(t)}{RC}$$

$$jwX(w) = jwY(w) + \frac{1}{RC}Y(w)$$ Frequency domain

$$jwX(w) = \left(jw + \frac{1}{RC}\right)Y(w)$$

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{jw}{jw + \frac{1}{RC}} = \frac{jwRC}{jwRC + 1} = \frac{j\frac{w}{w0}}{\frac{jw}{w0} + 1}$$

مرشح تردد مرتفع

Transfer function plotting in MATLAB: Bode Plots

يتم التعبير عن استطاعة إشارة ما بواحدة تسمى الديسيبل decibel وتعطى بالعلاقة :

$$P_{dB} = 10log10(P_{watt})$$

يفيد استخدام الديسبل في:

1- إمكانية التعبير عن الكميات الكبيرة في المقياس الخطي بكميات صغيرة في المقياس اللغارتمي.

2- تعتبر الديسبل الواحدة الأساسية في دراسة الربح/الخسارة في المرشحات والمضخمات ويتم ذلك باستخدام مخطط بود Bode Plot

الربح بالديسيبل:

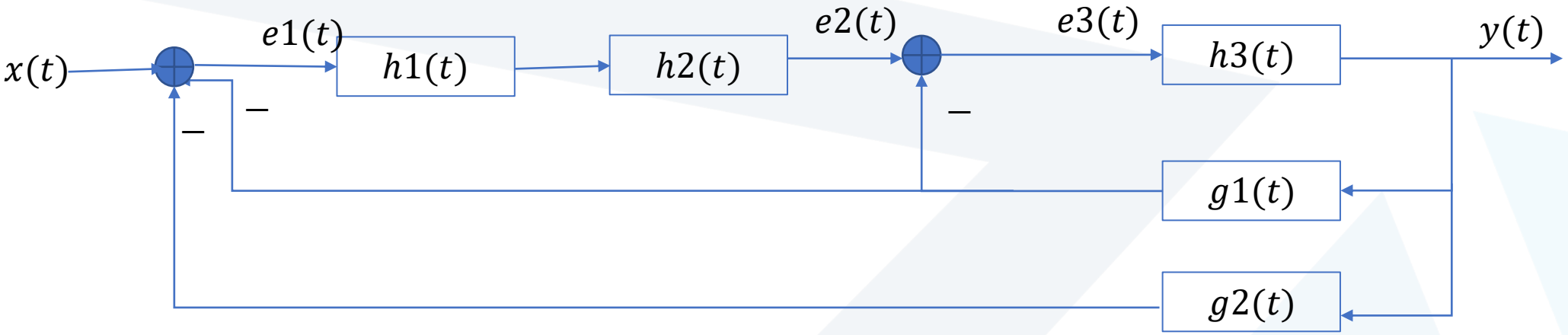
يقدر ربح الاستطاعة في المضخمات أو خسارة المرشحات بواحدة الديسبل ويعطى بالعلاقة: $G_{dB} = 10log10(\frac{P_{out}}{P_{in}})$

وبما أن الاستطاعة تتناسب مع مربع الجهد فيصبح ربح الجهد هو : $G_{dB} = 20log10(\frac{V_{out}}{V_{in}})$

فيكون المحور الشاقولي في مخطط بود هو قيم ربح/خسارة الاستطاعة أو الجهد بالديسبل والمحور الافقي هو 10log10 للتردد

Transfer Function -3-

أوجد تابع النقل لهذا النظام لديك المخطط الصندوقي التالي الممثل لنظام تحكم ذو تغذية عكسية



$$y(t) = (((x(t) - y(t) * (g2(t) + g1(t))) * h1\,(t) * h2(t)) - y\,(t) * g1(t)) * h3(t)$$

$$e2(t) = e1(t) * h1\,(t) * h2(t)$$

$$e3(t) = e2(t) - y\,(t) * g1(t)$$

$$e1(t) = x(t) - y(t) * (g2(t) + g1(t))$$

$$y(t) = e3(t) * h3(t)$$

$$h(t) = \frac{h1(t) * h2(t) * h3(t)}{1 + g1(t) * h3(t) + \big(g1(t) + g2(t)\big) * h1(t) * h2(t) * h3(t)}$$

$$H(w) = \frac{H1(w)H2(w)H3(w)}{1 + G1(w)H3(w) + \big(G1(w) + G2(w)\big)H1(w)H2(w)H3(w)}$$