Numerical analysis

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2022-2023

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Numerical analysis

Lecture 8

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية
(Numerical Solution of Ordinary Differential Equations)

مفاهيم عامة في المعادلات التفاضلية العادية (General concepts in differential equations)

مقدمة : تعتبر المعادلات التفاضلية من الفروع العلمية الهامة نظراً لاستخداماتها الواسعة **كنماذج رياضية في شتى العلوم المختلفة**، فمثلاً **في الفيزياء** نجد مسائل السوائل غير القابلة للانضغاط ، **وفي الكيمياء** مسائل لحساب حركة التفاعلات الكيميائية وشدتها ، **وفي الميكانيك السماوي** لدراسة حركة مسارات الأقمار الصناعية والمراكب الفضائية، وفي **الملاحة البحرية** لدراسة أزمنة وصول السفن والمركبات البحرية وتأخرها، **وفي علوم السكان** لدراسة حركة تغير السكان ، وفي **العلوم الطبية** لحساب فترة حضانة الأمراض المعدية والوبائية **وفي الهندسة** لدراسة حركة الآلات تمثيل إشارات الهاتف الجوال وتمثيل انتشار الوسائط والمحادثات والمنشورات على وسائل التواصل الاجتماعي ، وفي حقول شتى واسعة النطاق.

أي عند حل المسائل التي تدرس ظواهر الطبيعة، ليس بالضرورة أن نستطيع إيجاد علاقة مباشرة بين المتغيرات التي تصف المسألة. ففي أغلب الأحيان نجد علاقة بين بعض المتغيرات (التوابع) وسرعات تغيُّراتها بالنسبة للمتغيرات الأخرى (المتحولات المستقلة). ونستطيع بكلام آخر تشكيل **معادلة** يدخل فيها التابع المجهول وبعض مشتقاته.

مفاهيم عامة في المعادلات التفاضلية العادية (General concepts in differential equations)

تعريف المعادلة التفاضلية (Definition of the differential equation)

المعادلة التفاضلية معادلة تحتوي على **مشتق** أو تفاضل تابع مجهول بالنسبة لمتحول مستقل واحد أو أكثر.

تصنف المعادلة التفاضلية وفقاً لثلاثة معايير هي النوع والمرتبة^{x}والدرجة.

المعادلة التفاضلية العادية (Ordinary differential equation)

هي كل معادلة تفاضلية تحوي على التابع y والمتحول المستقل x ومشتقات هذا التابع بالنسبة لـ x وتعطى بالعلاقة:

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots) = 0$$

مفاهيم عامة في المعادلات التفاضلية العادية (General concepts in differential equations)

المعادلات التالية جميعها تفاضلية عادية:

$$1)\ y' - y = xy^5$$

$$2)\ x^2y'' + xy' - y = x$$

$$3)\ y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 170\cos 3x$$

$$4)\ (xe^{y/x} + y)dx - xdy = 0$$

$$5)\ y'^3 - y' = x$$

يرمز للمعادلة التفاضلية العادية (ODE).

المعادلة التفاضلية الجزئية (Partial differential equation)

هي كل معادلة تحوي على تابعاً لمتحولين مستقلين أو أكثر،ومشتقات الجزئية لهذا التابع بالنسبة لمتحولات المستقلة .

مفاهيم عامة في المعادلات التفاضلية العادية (General concepts in differential equations)

المعادلات التالية جميعها تفاضلية جزئية:

$$1)\ \frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y} \quad ; \quad z = z(x,y)$$

$$2)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad ; \ z = z(x,y)$$

$$3)\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 3u \quad ; \quad u = u(x,y,z)$$

$$4)\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial z} = u\frac{\partial w}{\partial y} \quad ; \quad w = w(x,y,z,u)$$

يرمز للمعادلة التفاضلية الجزئية (PDE).

مفاهيم عامة في المعادلات التفاضلية العادية (General concepts in differential equations)

مرتبة المعادلة التفاضلية (Order of the differential equation)

مرتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتق تحويه المعادلة. **على سبيل المثال**

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\frac{\partial z}{\partial y} = z$ هي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية.

$y^{(8)} - 7xy' + 4y = 0$ هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثامنة.

درجة المعادلة التفاضلية (Degree of the differential equation)

درجة المعادلة التفاضلية هي درجة أعلى مشتق تحويه المعادلة . **على سبيل المثال**

$(y'')^3 + 2(y')^5 + 3y = x^3$ هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثانية والدرجة الثالثة،

$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 - xz^4 = 0$ هي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية والدرجة الثانية.

مفاهيم عامة في المعادلات التفاضلية العادية (General concepts in differential equations)

حل المعادلة التفاضلية (Solution of the differential equation)

نقول عن التابع $y = f(x)$ المعرَف والقابل للاشتقاق حتى المرتبة n على المجال I إنه حل للمعادلة التفاضلية العادية

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots) = 0 \qquad (1)$$

إذا عوضنا التابع ومشتقاته بالمعادلة حصلنا على مطابقة محققة مهما كان $x \in I$.

مثال: هل $y = \sin x$ حل للمعادلة $y'' + y = 0$؟

الحل: $y = \sin x$ ومنه $y' = \cos x$ ومنه $y'' = -\sin x$ بالتعويض بالمعادلة نجد أنَ

$$y'' + y = -\sin x + \sin x = 0$$

ومنه $y = \sin x$ حل للمعادلة $y'' + y = 0$

مفاهيم عامة في المعادلات التفاضلية العادية (General concepts in differential equations)

ملاحظة : إذا كان $y = f(x)$ حل المعادلة التفاضلية العادية (1) فإن **المنحني** البياني لهذا التابع يسمى **منحنياً تكاملياً** لهذه المعادلة.

الحل العام لمعادلة تفاضلية (General solution of a differential solution)

إذا تضمن حل المعادلة التفاضلية العادية (1)ذات المرتبة n ثوابت اختيارية (arbitrary constants)عددها nفإنه يسمى الحل العام لهذه المعادلة.

يمكن أن يكون الحل العام تابعاً صريحاً من الشكل $y = \phi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$

أو تابعاً ضمنياً من الشكل $\varphi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$

حيث إن $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثوابت اختيارية.

على سبيل المثال، التابع $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$

لأنه يحقق المعادلة ويحوي ثابتين اختياريين.

مفاهيم عامة في المعادلات التفاضلية العادية (General concepts in differential equations)

الحل الخاص لمعادلة تفاضلية (Partial solution of a differential solution)

نقول عن التابع $y = f(x)$ إنه حل خاص للمعادلة التفاضلية (1) إذا أمكن الحصول عليه من الحل العام بإعطاء الثوابت الاختيارية قيماً عددية (بما فيها $\pm\infty$).

مثال: الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' - y = -y^2$ هو $y = \dfrac{1}{1 + ce^{-x}}$

بوضع $c = 0$ نحصل على الحل الخاص $y = 1$

وبوضع $c = \infty$ نحصل على الحل الخاص $y = 0$

وبوضع $c = 2$ نحصل على الحل الخاص $y = 1 \setminus 1 + 2e^{-x}$

ملاحظة : بما أن الحل العام يحوي ثوابت كيفية فإن عدد الحلول الخاصة لانهائي، ولتحديد الحل الخاص الذي يصف عملية أو ظاهرة معينة يلزم توافر معلومات إضافية. فمثلاً إذا كانت المسألة على النحو الآتي:

تتحرك سيارة على طريق مستقيمة بحركة منتظمة باتجاه المدينة بسرعة ثابتة ، متى تصل السيارة إلى المدينة ؟. للإجابة عن هذا السؤال يجب معرفة مكان وجود السيارة في بداية تحركها، أي معرفة المسافة التي كانت تبعدها السارة عن المدينة في اللحظة الابتدائية.

مفاهيم عامة في المعادلات التفاضلية العادية (General concepts in differential equations)

الحل الشاذ للمعادلة تفاضلية (Singular solution of a differential solution)

يسمى $y = f(x)$ حل المعادلة التفاضلية العادية (1) حلاً شاذاً إذا لم يكن بالإمكان الحصول عليه من الحل العام بإعطاء الثوابت الاختيارية قيماً عددية.

مثال: الحل العام للمعادلة التفاضلية $y = 2xy' + x^2(y')^4$ هو التابع $y = 2\sqrt{c\,x} + c^2$

أما التابع $y = \sqrt[3]{-\frac{3}{8}x^2}$ فهو **حل شاذ لها**.

المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى المحلولة بالنسبة للمشتق
First Order Ordinary Differential Equations Solvable to the Derivative

سندرس في هذه الفقرة بعض المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى المحلولة بالنسبة للمشتق.

الشكل العام للمعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى هو:

$$F(x, y, y') = 0$$

إذا كانت هذه المعادلة محلوله بالنسبة لـ y' فإنها تكتب بالشكل:

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

أو بالشكل

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (3)$$

وتدعى **معادلة تفاضلية عادية محلولة بالنسبة للمشتق** ويكون حلها العام تابعاً صريحاً من الشكل $y = \phi(x, c)$

المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى المحلولة بالنسبة للمشتق

معادلات منفصلة المتحولين (Equation with separable variables)

إذا كان M تابعاً لـ x فقط وكان N تابعاً لـ x فقط فإن المعادلة (3) تصبح من الشكل:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

وتسمى معادلة **منفصلة المتحولين**، نحصل على حلها العام بالمكاملة المباشرة:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$$

حيث أن c ثابت كيفي.

المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى المحلولة بالنسبة للمشتق

مثال : عيِّن الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية:

$$\sqrt{y}\,\sin x\,dx + dy = 0$$

الحل:

إذا كان $\sqrt{y} \neq 0$ نقسم طرفي المعادلة على $\sqrt{y}$ فنحصل على: $\sin x\,dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$

وهذا يعني أنها منفصلة المتحولين

بمكاملة الطرفين والترتيب نحصل على الحل العام للمعادلة وهو: $y = \frac{1}{4}(c + \cos x)^2$

حيث أن c ثابت كيفي.

وإذا كان $\sqrt{y} = 0$ فإن $y = 0$ هو حل شاذ للمعادلة لأنه لا ينتج عن الحل العام بإعطاء الثابت الكيفي c قيمة عددية محددة.

الشروط الابتدائية والشروط الحدية (Initial Conditions and Boundary Conditions)

إنَ لكل معادلة تفاضلية عدد لانهائي من الحلول الخاصة ويعتمد ذلك على القيم التي تعطي الثوابت التي تتضمنها حلول المعادلة التفاضلية والتي عددها يساوي مرتبة المعادلة التفاضلية n.ولنعين حل خاص يجب أن نعرف n شروطاً ابتدائية أو حدية يتوجب أن يحققها الحل، بشرط أن تكون المعادلة قابلة للحل.

- إذا كانت الشروط المفروضة **عند نقطة واحدة** ندعو هذه الشروط **بالشروط الابتدائية** وتدعى المعادلة التفاضلية مع الشروط الابتدائية **بمسألة القيمة الابتدائية(مسألة كوشي)**.(Initial value problem)

-إذا توفرت n شرطاً عند **أكثر من نقطة واحدة** ، ندعو هذه الشروط **بالشروط الحدية**، وتدعى المعادلة التفاضلية مع الشروط الحدية **بمسألة القيمة الحدية**.(Boundary value problem)

فمثلاً مسألة كوشي (مسألة القيمة الابتدائية) لمعادلة تفاضلية محلولة للمشتق **من المرتبة الأولى :**

هي مسألة إيجاد الحل للمعادلة $y' = f(x,y)$

ويحقق الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

الشروط الابتدائية والشروط الحدية (Initial Conditions and Boundary Conditions)

أو **مسألة كوشي** (مسألة القيمة الابتدائية) لمعادلة تفاضلية من **المرتبة الثانية** :

هي مسألة إيجاد الحل للمعادلة $F(x, y, y', y'') = 0$

ويحقق الشرطين الابتدائيين $y(x_0) = a, \quad y'(x_0) = b$

أما مسألة القيمة الحدية لمعادلة تفاضلية **من المرتبة الثانية** :

هي مسألة إيجاد الحل للمعادلة $F(x, y, y', y'') = 0$

ويحقق الشرطين عند نقطتين مختلفتين $y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$

طرائق عددية للمعادلات التفاضلية العادية بشروط ابتدائية

Numerical Methods of differential equations with initial value

بشكل عام ليس لجميع المعادلات التفاضلية حلولاً تحليلية أو أنه قد يكون من الصعب إيجاد الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية. وبالتالي فإن **الحلول العددية** قد تكون الملجأ الوحيد لإيجاد حلول المعادلات التفاضلية.

إن الطرائق العددية ستنتج حلولاً عددية تقريبية.

وبشكل عام في هذا الفصل سوف نشتق ونحلل طرق عددية لحل مسألة القيمة الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية.

نبدأ مناقشتنا بمعادلة تفاضلية من المرتبة الأولى التي يعبر عنها بالشكل:

$$y' = f(x, y)$$

مع الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$

بشكل عام فإن الطرائق العددية لحل مسألة القيمة الابتدائية هي خوارزميات **تنتج جدولاً من القيم التقريبية** y_i عند نقاط x_i غالباً ما تكون موزعة على أبعاد متساوية

طريقة (Taylor's method)

بفرض أن المسألة $y' = f(x,y)$ مع الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$

تملك حل وحيد هو $y(x)$ على مجال $I = [a,b]$ وقابل للاشتقاق n+1 مرة، عندئذٍ يمكننا نشر الحل $y(x)$ وفق متسلسلة تايلور بجوار xi ونكتفي بالحدود حتى المرتبة n ونحصل على:

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{y^{(n)}(x_i)}{n!}(x - x_i)^n \quad (1)$$

بفرض $x = x_{i+1}$ فيكون $x - x_i = x_{i+1} - x_i = h$ بالتعويض بـ (١) نحصل على

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!}h^2 + \ldots.. \frac{y_i^{(n)}}{n!}h^n \quad (2)$$

حيث $i = 0,1,2\ldots.n$

طريقة (Taylor's method)

قاعدة تايلور

$$y_{i+1} = y_i + y_i{}'h + \frac{y_i{}''}{2!}h^2 + \ldots\ldots \frac{y_i^{(n)}}{n!}h^n$$

حيث $\mathrm{i} = 0,1,2\ldots.n$

طريقة تايلور (Taylor's method)

مثال: ليكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$y' = x^2 + y;$$
$$x_0 = 0, y_0 = 1,$$
$$h = 0.1$$

أوجد حل المعادلة في النقطة x=0.4 باستخدام طريقة تايلور من المرتبة الرابعة.

الحل: n=4

نحتاج لحساب المشتقات المتتالية حتى المرتبة الرابعة:

$$y'' = 2x + y' = 2x + x^2 + y$$
$$y''' = 2 + 2x + y' = 2 + 2x + x^2 + y$$
$$y^{(4)} = 2 + 2x + y' = y'''$$

$$x_0 = 0 \ , \ x_1 = 0.1 \ , \ x_2 = 0.2$$
$$x_3 = 0.3 \ , x_4 = 0.4$$

طريقة تايلور (Taylor's method)

فيكون :

$$y_1 = y(0.1) = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \frac{h^4}{4!}y_0^{(4)}$$

$$= 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2} + \frac{(0.1)^3}{6}(1) + \frac{(0.1)^4}{24}(1)$$

$$\approx 1.1055125$$

وكذلك يمكن حساب:

$$y_2 = y(0.2) \approx 1.224200$$

$$y_3 = y(0.3) \approx 1.3505125$$

$$y_4 = y(0.4) \approx 1.515200$$

طريقة تايلور (Taylor's method)

مثال: استخدم طريقة منشور تايلور من المرتبة الثالثة لإيجاد الحل العددي لمسألة القيمة الابتدائية للمعادلة التفاضلية:

$$x\,y'=x-y$$

$$y(2)=2$$

في المجال $[2,\ 2.5]$ بخطوة طولها $h=0.05$، واحسب الخطأ المطلق الحاصل في الحل العددي عند النقطة $x=2.5$ إذا علمت أن الحل التحليلي معطى بالعلاقة:

$$y(x)=\frac{4+x^2}{2x}$$

طريقة تايلور (Taylor's method)

الحل: لدينا $x_0=2$، $h=0.05$

$$x_0 = 2 \ , \ x_1 = 2.05 \ , \ x_2 = 2,1, \ x_3 = 2.15 \ , x_4 = 2,2,....x_5 = 2,25$$
$$x_6 = 2,3 \ , \ x_7 = 2.35 \ , \ x_8 = 2,4, \ x_9 = 2.45 \ , x_{10} = 2,5$$

$$y_{i+1} = y_i + y_i{}'h + \frac{y_i{}''}{2!}h^2 + .\frac{y_i^{(3)}}{n!}h^3 \quad \text{حيث} \quad \mathrm{i} = 0,1,2....n$$

طريقة تايلور (Taylor's method)

نحتاج هنا لحساب مشتقات الدالة f:

$$y'(x) = f(x, y) = \frac{x - y}{x};$$

$$y''(x) = f'(x, y) = -\frac{y'x - y}{x^2} = \frac{2y - x}{x^2}$$

$$y^{(3)}(x) = f''(x, y) = \frac{(2y - x)'x^2 - 2x(2y - x)}{x^4} =$$

$$\frac{2y'x^2 - x^2 - 4xy + 2x^2}{x^4} = \frac{3x - 6y}{x^3}$$

طريقة تايلور (Taylor's method)

$$y_1 = 2 + (0.05)\frac{2-2}{2} + \frac{(0.05)^2}{2} * \frac{2*2-2}{(2)^2} + \frac{(0.05)^3}{6} * \frac{3*2-6*2}{(2)^3}$$

$$= \underline{2.000609}$$

ثم نعوض $x_1 = 2.05$ ، $y_1 = 2.000609$ ، $h = 0.05$ ، لنحصل على:

$$y_2 = 2.000609 + (0.05)\frac{2.05-2.000609}{2.05} + \frac{(0.05)^2}{2} * \frac{2*2.000609-2.05}{(2.05)^2}$$

$$+ \frac{(0.05)^3}{6} * \frac{(3*2.05-6*2.000609)}{(2.05)^3}$$

$$= \underline{2.00238}$$

طريقة تايلور (Taylor's method)

نعوض من جديد $i=2$ ، ثم $x_2 = 2.1$ ، $y_2 = 2.00238$ ، $h = 0.05$ ، نحصل على:

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) + \frac{h^2}{2!} f'(x_2, y_2) + \cdots \frac{h^3}{3!} f''(x_2, y_2)$$

$$= y_2 + h\frac{x_2 - y_2}{x_2} + \frac{h^2}{2} * \frac{2y_2 - x_2}{x_2^2} + \frac{h^3}{6} * \frac{3x_2 - 6y_2}{x_2^3}$$

$$y_3 = 2.00238 + (0.05)\frac{2.01 - 2.00238}{2.1} + \frac{(0.05)^2}{2} * \frac{2*2.00238 - 2.1}{(2.1)^2}$$

$$+ \frac{(0.05)^3}{6} * \frac{(3*2.1 - 6*2.00238)}{(2.1)^3}$$

$$= \underline{2.00523}$$

طريقة تايلور (Taylor's method)

نتابع بنفس الأسلوب

y_4=2.00909; y_5=2.013887; y_6=2.019564; y_7=2.02606;

y_8=2.03333; y_9=2.041325; y_{10}=2.049998;

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي y_{10} عند النقطة $x_{10} = 2.5$:

$$\delta = | y(x_{10}) - y_{10} | = \left| \frac{4 + x_{10}^2}{2 * x_{10}} - 2.049998 \right| = \left| \frac{4 + 6.25}{2 * 2.5} - 2.049998 \right|$$

$$= |2.05 - 2.049998| = 2.E - 6$$

طريقة تايلور (Taylor's method)

ملاحظة: أثناء استخدام هذه الطريقة تواجهنا بعض الصعوبات نذكر منها :

1- عدم إمكانية اشتقاق الدالة عدداً من المرات في النقطة x_0 .

2- قد يكون حساب المشتق عملية معقدة.

فإذا لم تكن إحدى هذه الصعوبات فإن منشور تايلور يعطي حلاً مناسباً.

طريقة أولر (Euler's method)

طريقة أولر لحل مسائل القيم الابتدائية في المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

ليكن $y(x)$ هو الحل الدقيق لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(x,y) \quad (1)$$
$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

حسب طريقة الفروق التقدمية لدينا $y_i{}' = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$

نعوض في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$y_i{}' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

ومنه

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad \text{حيث} \quad i = 0,1,\ldots n$$

طريقة أولر (Euler's method)

طريقة أولر

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

حيث $i = 0,1,\ldots n$

التي تدعى بطريقة أولر لحل مسألة القيمة الابتدائية(2)-(1)، وهي تنتج متتالية القيم التقريبية $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ، حيث سنحصل على القيمة التقريبية y_1 اعتماداً على قيمة y_0، و على القيمة y_2 اعتماداً على القيمة التي أصبحت معلومة y_1 وهكذا ستنتج كل قيمة تقريبية اعتماداً على القيمة السابقة لها مباشرة.

طريقة أولر (Euler's method)

مثال: استخدم طريقة أولر لحل المعادلة التفاضلية

$$y' = 2x$$
$$y(0) = 1$$

على المجال $I = [0,4]$ حيث h=1

الحل: $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ ومنه $y_{i+1} = y_i + h2x_i$

$$x_0 = 0 \ , \ x_1 = 1 \ , \ x_2 = 2 \quad x_3 = 3 \quad , x_4 = 4$$

$$y_1 = y_0 + 2x_0$$
$$y_1 = 1 + 0 = 1$$

$$y_2 = y_1 + 2x_1$$
$$y_2 = 1 + 1(2) = 3$$

$$y_3 = y_2 + 1.2x_2$$
$$y_3 = 3 + 4 = 7$$

$$y_4 = y_3 + 1.2x_3$$
$$y_4 = 7 + 6 = 13$$

طريقة أولر (Euler's method)

الحل التحليلي : لدينا $y' = 2x$

نكامل الطرفين

$y = x^2 + c$ لدينا $y(0) = 1$ ومنه $1 = 0^2 + c$ أي $c = 0$

ومنه حل المعادلة الفعلي هو

$$y = x^2 + 1$$

	القيمة الفعلية	القيمة التقريبية
X0=0	1	1
1=x1	2	1
2=x2	5	3
3=x3	10	7
4=x4	17	13

نلاحظ أن الخطأ تراكمي في أولر وكل ما ابتعدنا عن نقطة ابتدائية تقل الدقة

طريقة أولر (Euler's method)

مثال ليكن لينا المعادلة التفاضلية

$$y' = x\,y;$$
$$y(0) = 1,$$

والمطلوب تطبيق طريقة أولر لإيجاد الحل التقريبي للمسألة المذكورة في النقطة x=0.4 ، مستخدماً خطوة طولها $h = 0.1$ ، ثم احسب الخطأ المطلق في الحل العددي إذا علمت أن الحل التحليلي هو: $y(x) = e^{x^2/2}$

طريقة أولر (Euler's method)

الحل:

$$x_0 = 0 \ , \ x_1 = 0.1 \ , \ x_2 = 0.2 \ x_3 = 0.3 \quad , x_4 = 0.4$$

يعني إيجاد متتالية التقريبات y_1, y_2, y_3, y_4

$x_1=0.1$:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h\, x_0\, y_0 = 1 + 0.1(0) = 1 \approx y(0.1)$$

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي y_1 عند $x=x_1$:

$$\delta_1 = | y(x_1) - y_1 | = | e^{(0.1)^2/2} - 1 | = | 1.00501 - 1 | = 0.00501$$

نحسب الحل العددي y_2 عند $x_2=0.1$، بجعل $i=1$، والاعتماد على قيمة y_1:

$$y_2 = y_1 + h\, x_1\, y_1 = 1 + 0.1(0.1) = 1.01 \approx y(0.2)$$

بشكل مماثل نحسب الخطأ المطلق في y_2 عند $x=x_2$

طريقة أولر (Euler's method)

$$\delta_2 = | y(x_2) - y_2 | = | e^{(0.2)^2/2} - 1.01 | = | 1.0202 - 1.01 | = 0.0102$$

$$y_3 = y_2 + h x_2 y_2 = 1.01 + 0.1(0.202) = 1.0302 \approx y(0.3)$$

$$\delta_3 = | y(x_3) - y_3 | = | e^{(0.3)^2/2} - 1.0302 | = | 1.04603 - 1.0302 | = 0.01583$$

نحسب هنا الحل التقريبي للمسألة في النقطة $x=0.4$، يعني y_4 عند $x_4=0.4$:

$$y_4 = y_3 + h x_3 y_3 = 1.0302 + 0.1(0.30906) = 1.061106 \approx y(0.4)$$

$$\delta_4 = | y(x_4) - y_4 | = | e^{(0.4)^2/2} - 1.061106 | =$$

$$= | 1.08329 - 1.061106 | = 0.022184$$

تمارين

التمرين الأول:

اوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = f(x,y) = x.y$ حيث $y(0) = 1$ و $h =$

0.1 في النقطة $x = 0.2$ مستخدماً خمسة حدود في منشور تايلور.

التمرين الثاني:

حل بطريقة أويلر المعادلة التفاضلية y'=(x-y)\2 على المجال [0,3] حيث y(0)=1 و h=1

التمرين الثالث:

لتكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية في المعادلة التفاضلية التالية:

$$x\,y' + y = 0,$$
$$y(1) = 2,$$

والمطلوب إيجاد الحل التقريبي للمسألة التفاضلية المذكورة عند النقطة $x=2$ بطريقة أولر ، ثم إيجاد الخطأ المطلق والخطأ النسبي عند تلك النقطة؛ علما بأن الخطوة $h=0.2$ والحل التحليلي: $y=\frac{2}{x}$.

حل التمرين الأول

ومنه $y' = x.y$

$$y'(0) = (0)(1) = 0$$

$$y''(x) = y + xy' \Rightarrow y''(0) = 1 + (0) = 1$$

$$y'''(x) = y' + y' + xy''' = 2y'' + xy''$$

$$y'''(0) = 2(0) + (0)(1) = 0$$

$$y^{(4)}(x) = 2y'' + y'' + xy''' = 3y'' + xy'''$$

$$y^{(4)}(0) = 3(1) + (0)(0) = 3$$

نعوض في منشور تايلور فنجد:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0) + \frac{h}{1!}y'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_0)$$

$$y_1 = 1 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2}(1) + \frac{(0.1)^3}{6}(0) + \frac{(0.1)^4}{24}(3)$$

$$y_1 = 1.005 = y(0.1)$$

نحسب

$$y^1(x_1) = y'(0.1) = x_1 y_1 = (0.1)(1.005) = 0.1005$$

$$y''(x_1) = y_1 + x_1 y_1' = (1.005) + (0.1)(0.1005) = 1.015$$

$$y'''(x_1) = 2y_1' + x_1 y_1'' = 2(0.1005) + (0.1)(1.015) = 0.3025$$

$$y^{(4)}(x_1) = 2y_1'' + x_1 y_1''' = 3(1.015) + (0.1)(0.302)$$

$$= 3.07521$$

ن $(0.3025) + \frac{(0.1)^4}{24}(3.0752)$ فنجد:

$$y_2 = y(x_2) = y(x_1) + \frac{h}{1!}y'(x_1) + \frac{h^2}{2!}y''(x_1) + \frac{}{3!}y'''(x_1) + \cdots \quad y_2 = 1.020188$$

$$y_2 = 1.005 + (0.1)(0.1005) + \frac{(0.1)^2}{2}(1.015) + \frac{(0.1)^2}{6}$$

$$(0.3025) + \frac{(0.1)^4}{24}(3.0752)$$

$$y_2 = 1.020188$$

حل التمرين الثاني

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{x_k - y_k}{2} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$y_1 = y_0 + h\frac{x_0 - y_0}{2}$$

$$= 1 + (1)\frac{0 - 1}{2} = -1\frac{1}{2} = 0.2$$

$$y_2 = y_1 + h\frac{x_1 - y_1}{2}$$

$$= 0.5 + (1)\frac{1 - 0.5}{2} = 0.5 + \frac{0.5}{2} = 0.75$$

$$y_3 = y_2 + h\frac{x_2 - y_2}{2}$$

$$= 0.75 + (1)\frac{2 - 0.75}{2} = 0.75 + \frac{1.25}{2} = 1.375$$

حل التمرين الثالث

الحـل: لدينا من المسألة $x_0 = 1$ ، $y_0 = 2$ ، $h = 0.2$ ، نستخدم صيغة أولر

$$y_{i+1} = y_i + h\,y_i' = y_i + h\,f(x_i, y_i)\,,\ i=0,1,2,\ldots$$

ومن المعادلة التفاضلية نحدد الدالة f:

$$y' = f(x,y) = -\frac{y}{x} \rightarrow y_i' = f(x_i, y_i) = -\frac{y_i}{x_i}$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(x_i, y_i) = y_i - h\frac{y_i}{x_i} = y_i(1 - h\frac{1}{x_i})$$

نضع $i=0$، ونعوض $x_0 = 1$ ، $y_0 = 2$ ، $h = 0.2$:

$$y_1 = y_0 + h\,f(x_0, y_0) = y_0(1 - h\frac{1}{x_0})$$

$$= 2(1 - 0.2\frac{1}{1}) = 1.6$$

نحصل على قيمة y_1 وهو الحل العددي عند النقطة $x_1 = x_0 + h = 1.2$.

نضع $i=1$، ونعوض $x_1 = 1.2$ ، $y_1 = 1.6$ ، $h = 0.2$:

$$y_2 = y_1 + h\,f(x_1, y_1) = y_1(1 - h\frac{1}{x_1})$$

$$= 1.6(1 - 0.2\frac{1}{1.2}) = \underline{1.33333333}$$

نحصل على y_2 وهو الحل العددي عند النقطة $x_2 = x_1 + h = 1.4$.

نضع $i=2$، ونعوض $x_2 = 1.4$ ، $y_2 = 1.333333$ ، $h = 0.2$ نجد أن:

$$y_3 = y_2 + h\,f(x_2, y_2) = y_2(1 - h\frac{1}{x_2})$$

$$= 1.333333(1 - 0.2\frac{1}{1.4}) = \underline{1.142857}$$

وهو الحل العددي عند النقطة $x_3 = x_2 + h = 1.6$ ، وهكذا نتابع بتعويض القيم السابقة بالقيم اللاحقة نحصل على القيم التقريبية المتبقية:

$$y_4 = y_3 + h f(x_3, y_3) = y_3(1 - h\frac{1}{x_3})$$

$$= 1.142857(1 - 0.2\frac{1}{1.6}) = \underline{0.9999999}$$

$$y_5 = y_4 + h f(x_4, y_4) = y_4(1 - h\frac{1}{x_4})$$

$$= 0.999999(1 - 0.2\frac{1}{1.8}) = \underline{0.888889}$$

حيث وجدنا أخيرا y_5 وهي القيمة التقريبية للحل العددي عند $x_5 = x_4 + h = 2$.

نحسب الخطأ المطلق في الحل العددي عند النقطة $x_5 = 2$:

$$\delta = | y(x_5) - y_5 | = \left| \frac{2}{x_5} - 0.888889 \right| = \left| \frac{2}{2} - 0.888889 \right| = 1.11111E-1;$$

أما الخطأ النسبي فهو نسبة الخطأ المطلق على القيمة الفعلية:

$$E = \frac{\delta}{y(x_5)} = \frac{0.111111}{1} = 1.11111E-1$$

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Thank you for your attention