Numerical analysis

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2022-2023

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Numerical analysis

Lecture 9

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية
(Numerical Solution of Ordinary Differential Equations)

طرائق عددية للمعادلات التفاضلية العادية بشروط ابتدائية

Numerical Methods of differential equations with initial value

مقدمة : في المحاضرة السابقة درسنا بعض الطرق العددية لحل مسألة القيمة الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية.

$$y' = f(x,y) \quad (1)$$
$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

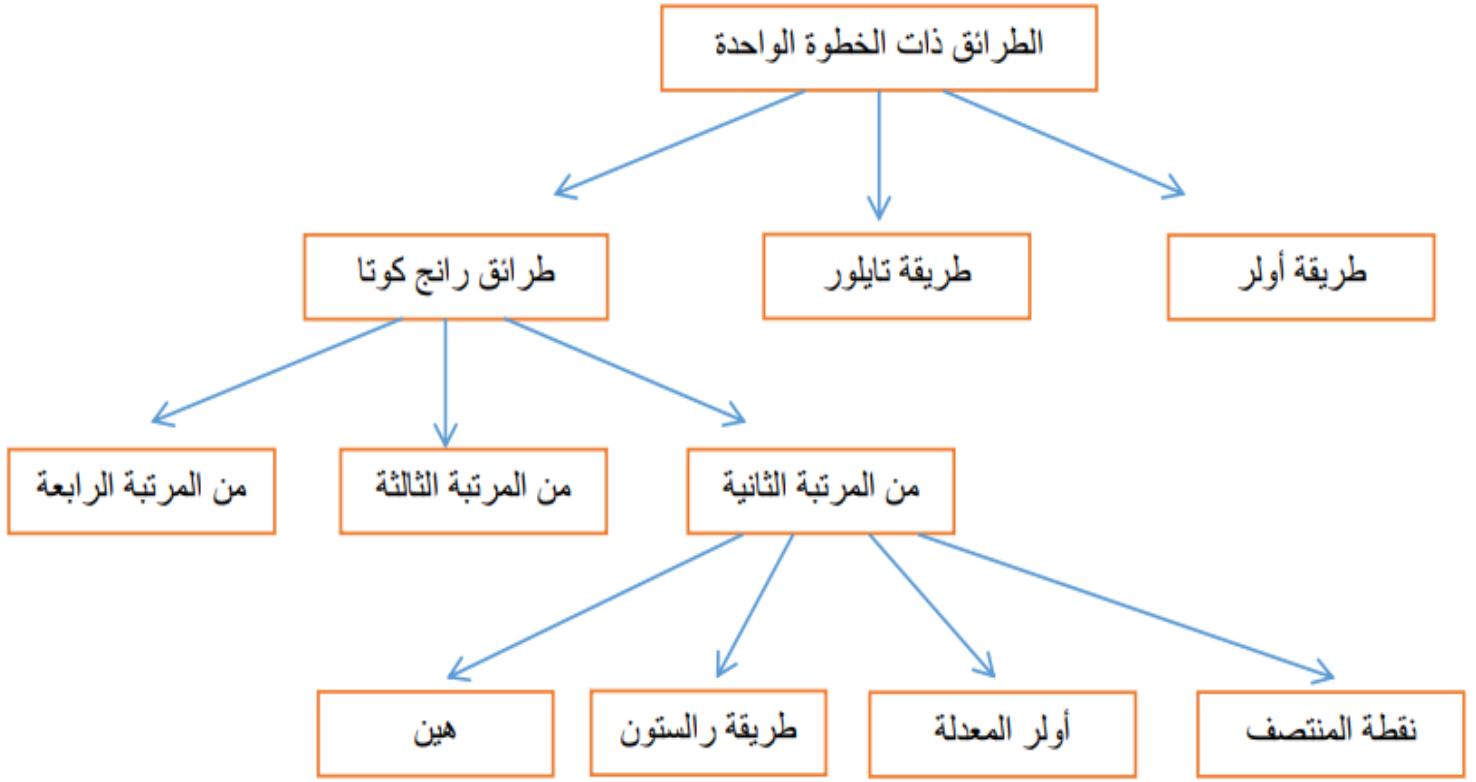
واستعرضنا طريقتي ١- أويلر
٢- تايلور

في هذه المحاضرة سنتناول طرائق أخرى أكثر دقة وفاعلية

بشكل عام فإن الطرائق العددية لحل مسألة القيمة الابتدائية هي خوارزميات **تنتج جدولاً من القيم التقريبية** y_i عند نقاط x_i غالباً ما تكون موزعة على أبعاد متساوية

طرائق عددية للمعادلات التفاضلية العادية بشروط ابتدائية

Numerical Methods of differential equations with initial value



طرائق رانج كوتا (Runge-Kutta method)

تحتاج **طريقة أولر** إلى خطوة صغيرة (قيمة hيجب أن تكون صغيرة) للحصول على دقة معقولة لذا فإنها لا تستخدم كثيراً في التطبيقات العملية ، كذلك فإن **طريقة تايلور** غير مرغوبة كأسلوب عام لحل المعادلات التفاضلية لأنها تتطلب إجراء حسابات كثيرة لإيجاد قيم التابع f (x,y)ومشتقاته ، مما يجعلها معقدة ومكلفة زمنياً بالنسبة لكثير من المسائل ، **أما طرق رانج – كوتا فتعد من أهم الطرائق** المستخدمة في إيجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية فهي تمكننا من الحصول على دقة عالية مع تجنب الحاجة إلى اشتقاق التابع y (x).

طرائق رانج كوتا (Runge-Kutta method)

إن الشكل العام للحل التقريبي بطرائق رانج -كوتا هو

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

حيث ϕ هي مقدار الزيادة أو الميل ، ونلاحظ أن $\phi = \phi(x_i, y_i, h)$ يمكن أن يعبر عنها بالشكل:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots\ldots + a_n k_n$$

طرائق رانج كوتا من المرتبة الثانية (Runge-Kutta 2nd Order Method)

يتم إيجاد قيم التقريب بالعلاقة التالية :

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

حيث

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2$$

أي

$$y_{i+1} = y_i + h(a_1 k_1 + a_2 k_2)$$

$$y_0 = \alpha$$

طرائق رانج كوتا من المرتبة الثانية

طرائق رانج كوتا من المرتبة الثانية

$$y_{i+1} = y_i + h(a_1 k_1 + a_2 k_2)$$

حيث $i = 0,1.....,n-1$

و h=step size

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + \mathrm{p}_1 \mathrm{h}, y_i + q_{11}\, \mathrm{h}\, k_1)$$

حيث

يوجد أربعة وسطاء ممثلين بالعبارة $q11$, $p1$, $a2$, $a1$:

$$a_1 + a_2 = 1, \qquad a_2 p_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

طريقة نقطة المنتصف (Midpoint method)

يوجد ثلاث طرق مختلفة وذلك تبا لقيمة a2.

طريقة نقطة المنتصف (Midpoint method)

نحصل عليها من طريقة نقطة المنتصف بوضع $a2 = 1$ وفي هذه الحالة يكون

$$a_1 = 0, \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad q_{11} = \frac{1}{2}$$

طريقة نقطة المنتصف (Midpoint method)

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

حيث $i = 0, 1 \ldots\ldots, n-1$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

:

طريقة هين (Heun's method)

نحصل عليها من **طرائق رانج كوتا من المرتبة الثانية بوضع** $a_2 = \frac{1}{2}$ وفي هذه الحالة يكون

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad p_1 = 1, \quad q_{11} = 1$$

طريقة هين (Heun's method)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h(k_1 + k_2)$$

حيث

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad , \quad k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

:

طريقة رالستون (Ralston's method)

نحصل عليها من **طرائق رانج كوتا من المرتبة الثانية بوضع** $a_2 = \frac{2}{3}$ وفي هذه الحالة يكون

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad p_1 = \frac{3}{4}, \quad q_{11} = \frac{3}{4}$$

طريقة رالستون (Ralston's method)

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)$$

حيث

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad , \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

:

مثال

باستخدام **طريقة هين** أوجد الحل التقريبي لمسألة الشرط الابتدائي

$$y' = y\sin x \quad ,x \in [0,1]$$
$$y(0) = 1 \qquad ,h = 0.5$$

الحل: لدينا

$$f(x,y) = y\sin x \quad ,h = 0.5$$
$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 1$$
$$x_1 = 0.5 \qquad y_1$$
$$x_2 = 1 \qquad y_2 = ?$$

تعطى معادلات هين بالشكل:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad , \quad k_2 = f(x_i + \mathrm{h},\ y_i + k_1\,\mathrm{h})$$

لنحسب y1

$$i = 0 \quad x_0 = 0 \qquad y_0 = 1$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \Rightarrow \quad , \ k_1 = f(x_0, y_0) = y_0 \sin x_0 = 1 \sin 0 = 0$$

$$k_2 = f(x_i + \mathrm{h},\ y_i + k_1\,\mathrm{h}) \Rightarrow \quad , \ k_2 = f(x_0 + 0.5,\ y_0 + 0.5(0)) =$$

$$k_2 = f(0.5,\ 1) = 1 \sin(0.5) = 0.4794255$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2) = 1 + \frac{0.5}{2}(0 + 0.4794255$$

$$y_1 = 1.1198564$$

$$i = 1 \quad x_1 = 0,5 \qquad y_1 = 1.1198564$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \Rightarrow \quad , \; k_1 = f(x_1, y_1) = y_1 \sin x_1 = 1.1198564 \sin 0,5 = 0.5368878$$

$$k_2 = f(x_i + \mathrm{h},\, y_i + k_1\,\mathrm{h}) \Rightarrow \quad , \; k_2 = f(x_1 + 0.5,\, y_1 + 0.5(0.5368878)) =$$

$$k_2 = f(1,\, 1.3883003) = 1.3883003 \sin 1 = 1.1682442$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2} h(k_1 + k_2) = 1.1198564 + \frac{0.5}{2}(0.5368878 + 1.1682442)$$

$$y_2 = 1.5461394$$

$$(0,1) \;\; (0,5, 1.1198564)(1,1,5461394)$$

طريقة رانج كوتا من المرتبة الثالثة (Third-Order Runge-Kutta Methods)

طرائق رانج كوتا من المرتبة الثالثة

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} h(k_1 + 4k_2 + \mathrm{k}_3)$$

حيث

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\mathrm{h}, y_i + \frac{1}{2}\mathrm{h}\,k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \mathrm{h}, y_i - \mathrm{h}\,k_1 + 2\,\mathrm{k}_2\mathrm{h})$$

و h=step size

طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة (Fourth -Order Runge-Kutta Methods)

عموماً لا تستخدم طريقة رانج – كوتا من المرتبة الثالثة ،إنما الاستخدام الشائع لها بأن تكون من المرتبة الرابعة ، وتعطى معادلتها كالتالي:

طرائق رانج كوتا من المرتبة الرابعة

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2\,\mathrm{k}_3 + \mathrm{k}_4) \;\; , \; y_0 = a$$

حيث

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}\mathrm{h}, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$
$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}\mathrm{h}, y_i + \frac{1}{2}\mathrm{k}_2)$$
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

و h=step size

طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة (Fourth -Order Runge-Kutta Methods)

مثال أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الابتدائية باستخدام طريقة رانج – كوتا من المرتبة الرابعة

$$y' = -y + x + 1 \quad , \quad 0 \le x \le 0.4$$
$$y(0) = 1 \qquad , h = 0.1$$

الحل: لدينا $f(x,y) = -y + x + 1 \quad , h = 0.1$

$x_0 = 0 \qquad y_0 = 1$

$x_1 = 0.1 \qquad y_1$

$x_2 = 0,2 \qquad y_2$

$x_3 = 0,3 \qquad y_3$

$x_4 = 0,4 \qquad y_4 = ?$

عطى معادلات رانج كوتا بالشكل:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2\,\mathrm{k}_3 + \mathrm{k}_4)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}\mathrm{h}, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}\mathrm{h}, y_i + \frac{1}{2}\mathrm{k}_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة (Fourth -Order Runge-Kutta Methods)

$$k_1 = hf(x_i, y_i) = 0.1f(x_i, y_i) = 0.1(-y_i + x_i + 1)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}\mathrm{h}, y_i + \frac{1}{2}k_1) = 0.1f(x_i + \frac{0.1}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}\mathrm{h}, y_i + \frac{1}{2}\mathrm{k}_2) = 0.1f(x_i + \frac{0.1}{2}, y_i + \frac{1}{2}\mathrm{k}_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) = 0.1f(x_i + 0.1, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2\,\mathrm{k}_3 + \mathrm{k}_4)$$

طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة (Fourth -Order Runge-Kutta Methods)

$$i = 0 \quad x_0 = 0 \qquad y_0 = 1$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i) = 0.1f(x_0, y_0) = 0.1(-y_0 + x_0 + 1) = 0$$

$$k_2 = 0.1f(x_0 + \frac{1}{2}\mathrm{h}, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1f(\frac{0.1}{2}, 1) = 0.1(-1 + \frac{0.1}{2} + 1) = 0.005$$

$$k_3 = 0.1f(x_0 + \frac{1}{2}\mathrm{h}, y_0 + \frac{1}{2}\mathrm{k}_2) = 0,009525$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) = 0,00525$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2\,\mathrm{k}_3 + \mathrm{k}_4) = 1 + \frac{0.1}{6}(0 + 0.01 + 2(0,009525) + 0,00525) =$$

$$= 1,0048375009$$

طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة (Fourth -Order Runge-Kutta Methods)

وهكذا نستطيع أن نحصل على القيم ، ويمثل الجدول أدناه القيم المحسوبة

x_n	y_{n+1}
0	1.00000
0.1	1.0048375000
0.2	1.0187309014
0.3	1.040818422
0.4	1.070320289

تمارين

التمرين الأول:

باستخدام طريقة هين أوجد الحل التقريبي لمسألة الشرط الابتدائي:

$$y' = -y + x + 1 \quad ; 0 \le x \le 0.9$$
$$y(0) = 1 \quad , h = 0.1$$

التمرين الثاني:

باستخدام طريقة رالستون أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = \frac{(x - y)}{2} \quad ; \quad 0 \le x \le 0.9 \quad y(0) = 1 \quad , h = 0.1$$

التمرين الثالث:

استخدم طريقة رانج – كوتا من المرتبة الرابعة لحل المعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{(x-y)}{2}$$

في المجال $[0,3]$ ، والشرط الابتدائي $y(0) = 1$ وبقيم $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ ، ثم قارن النتيجة بالحل الفعلي $y = 3e^{-x/2} - 2 + x$.

حل التمرين الأول

تعطى معادلات هين بالشكل:

$$x_0 = 0 \ , \ x_1 = 0.1 \ , \ x_2 = 0.2 \ , x_3 = 0.3 \ , x_4 = 0.4$$
$$x_5 = 0.5 \ , \ x_6 = 0.6 \ , \ x_7 = 0.7 \ , x_8 = 0.8 \ , x_9 = 0.9$$

x_n	y_{n+1}
0	1.00000
0.1	1.005
0.2	1.019025
0.3	1.041217625
0.4	1.070801951
0.5	1.107075765
0.6	1.149403568
0.7	1.197210229
0.8	1.249975257
0.9	1.307227608

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h(k_1 + k_2)$$
$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad , \quad k_2 = f(x_i + \mathrm{h}, \ y_i + k_1 \, \mathrm{h})$$

حل التمرين الثاني

$$x_0 = 0 \ , \ x_1 = 0.1 \ , \ x_2 = 0.2 \ , x_3 = 0.3 \ , x_4 = 0.4$$
$$x_5 = 0.5 \ , \ x_6 = 0.6 \ , \ x_7 = 0.7 \ , x_8 = 0.8 \ , x_9 = 0.9$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{k_1 = \frac{(x_n - y_n)}{2}}$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{3}{4}h \, , y_n + \frac{3}{4}k_1 h\right) \Longrightarrow k_2 = \frac{\left(x_n + \frac{3}{4}h\right) - \left(y_n + \frac{3}{4}k_1 h\right)}{2}$$

$$\Longrightarrow k_2 = \frac{x_n + \frac{3}{4}h - y_n - \frac{3}{4}k_1 h}{2} \Longrightarrow \boxed{k_2 = \frac{x_n - y_n + \frac{3}{4}h(1 - k_1)}{2}}$$

انطلاقاً من معادلة رالستون ن حصل على القيم التقريبية لحل المعادلة التفاضلية المبينة في الجدول التالي

x_n	y_{n+1}
0	1.00000
0.1	0.95375
0.2	0.914629688
0.3	0.88229149
0.4	0.85640478
0.5	0.836655047
0.6	0.822743114
0.7	0.814384387
0.8	0.811308148
0.9	0.813256876

حل التمرين الثالث

باستخدام طريقة رانج – كوتا من المرتبة الرابعة نحصل على القيم الموضحة في الجدول التالي:

x_n	y_{n+1}				z_{n+1}
	$h=1$	$h=\frac{1}{2}$	$h=\frac{1}{4}$	$h=\frac{1}{8}$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.125				0.9432392	0.9432392
0.25			0.8974915	0.8974908	0.8974917
0.375				0.8620874	0.8620874
0.50		0.8364258	0.83644037	0.8364024	0.8364023
0.75			0.8118696	0.8118679	0.8118678
1.00	0.8203125	0.8196285	0.8195940	0. .8195921	0.8195920
1.50		1.9171423	0.9171021	0.9170998	0.9170997
2.00	1.1045125	1.1036826	1.1036408	1.1036385	1.1036383
2.50		1.3595575	1.3595168	1.3595145	1.3595144
3.00	1.6701860	1.6694308	1.6693928	1.6693906	1.6693905

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Thank you for your attention