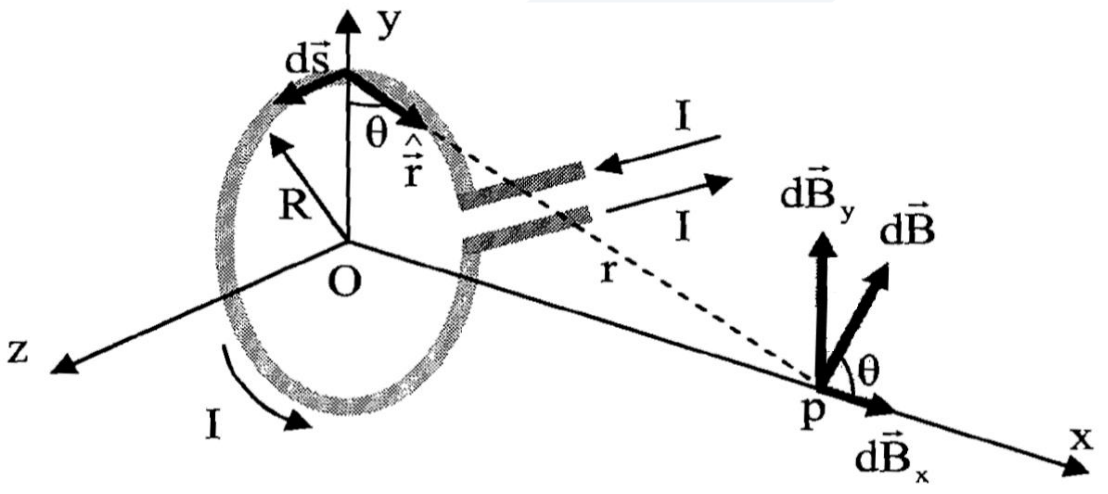
مسألة: لدينا عروة (حلقة) تيار دائرية نصف قطرها R متوضعة في المستوي xy يسري فيها تيار مستمر I كما في الشكل جانباً. احسب الحقل المغناطيسي في النقطة p الواقعة على محور هذه العروة والتي تبعد مسافة x عن مركز العروة.



الحل: نلاحظ هنا بأن كل طول عنصري $d\vec{s}$ عمودي على شعاع الواحدة $\hat{\vec{r}}$ بالإضافة إلى أن كل العناصر على طول الحلقة تقع على نفس البعد r من p حيث أن $r^2 = x^2 + R^2$ وعليه فإن قيمة $d\vec{B}$ الناتجة عن الطول العنصري $d\vec{s}$ هي:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left|d\vec{s}\times\hat{\vec{r}}\right|}{r^2}$$

$$\rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{x^2+R^2}$$

يكون اتجاه الحقل المغناطيسي $d\vec{B}$ الناتج عن $d\vec{s}$ عمودياً على المستوي المشكل من $\hat{\vec{r}}$ و $d\vec{s}$. يمكن تحليل الشعاع $d\vec{B}$ إلى مركبة على طول المحور ox هي dB_x ومركبة معامدة لها هي dB_y. وعند جمع كل المركبات العمودية على المحور ox من أجل كامل العروة فإننا نحصل على محصلة قيمتها صفر والسبب في ذلك هو تناظر الحلقة بالنسبة لأي نقطة من المحور. وبالتالي يبقى فقط المركبة dB_x حيث $dB_x = dB\cos\theta$.

$$B_x = \oint dB\cos\theta$$

$$\rightarrow B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds \cos\theta}{x^2 + R^2}$$

ولكن $\cos\theta = \frac{R}{(x^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}$ بالتالي يكون:

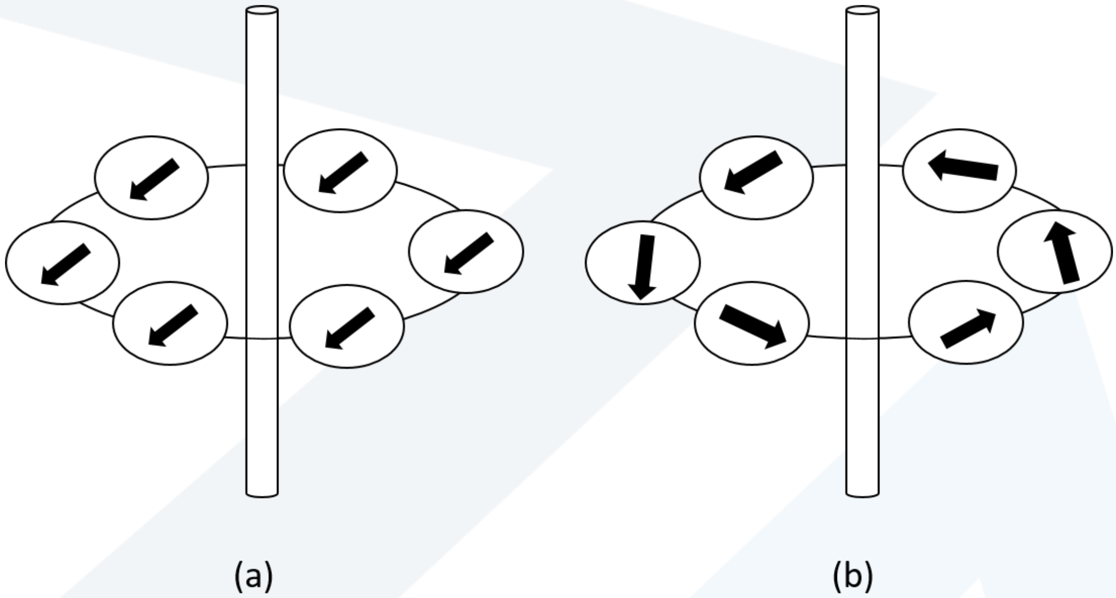
$$B_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \oint ds$$

$$\rightarrow B_x = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

حيث أن $\oint ds = 2\pi R$ محيط الحلقة.

1- قانون أمبير Amber

وضع أمبير عدة بوصلات في مستوٍ أفقي محيطةً بسلك شاقولي (الشكل رقم 14). عندما لا يسري تيار في السلك فإن إبر البوصلات المغناطيسية تأخذ نفس الاتجاه. أما عندما ينقل السلك تياراً شديداً ومستمراً فإن جميع الإبر المغناطيسية تنحرف باتجاه مماس الدائرة وفق قاعدة اليد اليمنى.



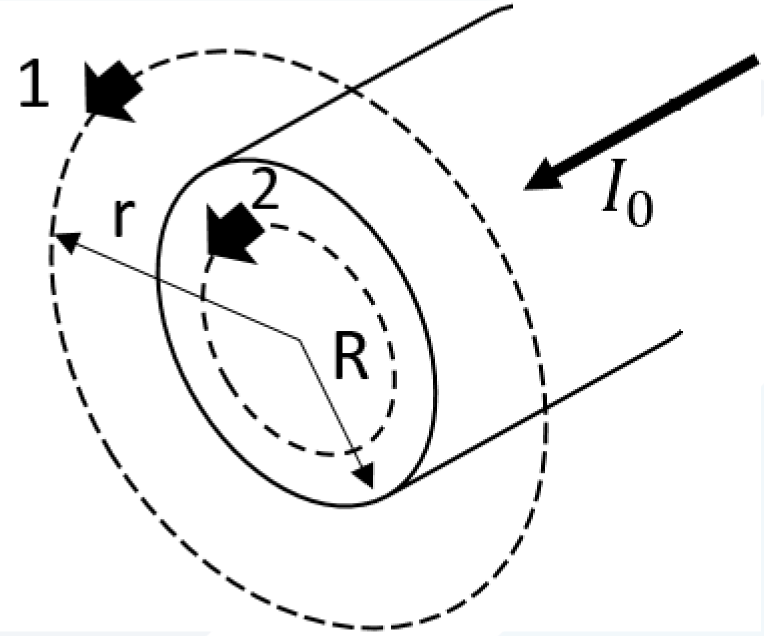
الشكل (14): جهات الإبر المغناطيسية، $a)$ بعدم وجود تيار يمر بالسلك، $b)$ بوجود تيار.

بما أن البوصلات تشير إلى اتجاه $\vec{B}$ فإن جميع خطوط الحقل المغناطيسي تشكل دوائر تحيط بالسلك ولها نفس القيم (من خلال التناظر). يمكن التعبير عن قانون أمبير بالعلاقة:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, 2\pi r = \mu_0 I$$

حيث أن $\oint ds = 2\pi r$ هو محيط الدائرة المعتبرة.

مسألة: سلك مستقيم وطويل نصف قطره R، ينقل تيار ثابت مستمر I_0 موزع بانتظام على المقطع العرضي للسلك كما في الشكل جانباً. احسب الحقل المغناطيسي على بعد r من مركز هذا السلك في المنطقتين $r \geq R$ و $r < R$.



في المنطقة 1 حيث $r \geq R$، نختار المسار المغلق الذي نكامل عليه دائرة نصف قطرها r متمركزة مع السلك. بما أن التيار الكلي الذي يعبر من خلال مستوي الدائرة في هذه الحالة هو I_0 فبتطبيق قانون أمبير من أجل $r \geq R$ يعطي تطابق من حيث معنى قانون أمبير نفسه وبالتالي:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = B\, 2\pi r = \mu_0 I_0$$

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

لنأخذ الآن المنطقة 2 والتي يكون عندها $r < R$. بفرض أن التيار I هو الذي يعبر خلال مستوي الدائرة التي نصف قطرها r حيث $r < R$ أصغر من التيار الكلي I_0. بما أن التيار موزع بشكل منتظم على مقطع السلك فإن جزء من التيار المحاط بالدائرة التي نصف قطرها r، يجب أن يساوي نسبة السطح πr^2 المحاط بالدائرة 2 على سطح مقطع السلك πR^2 أي أن:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

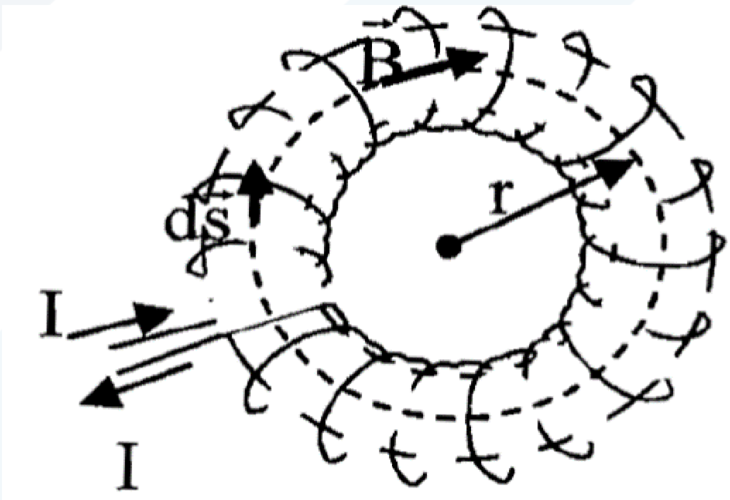
$$\rightarrow I = \frac{r^2}{R^2}\, I_0$$

وبنفس الطريقة نطبق قانون أمبير على الدائرة 2 من أجل $r < R$:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = B\, 2\pi r = \mu_0 I = \mu_0 \frac{r^2}{R^2}\, I_0$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2}\, r$$

مسألة: يتألف ملف (وشيعة) من N لفة ملفوف على شكل حلقة كما في الشكل جانباً. بفرض أن اللفات قريبة من بعضها البعض، احسب الحقل المغناطيسي داخل الملف الحلقي على بعد r من مركزه.



لحساب الحقل المغناطيسي داخل الملف الحلقي، نحسب التكامل ل $\vec{B}\, d\vec{s}$ فوق الدائرة التي نصف قطرها r. من خلال التناظر نجد أن الحقل المغناطيسي يكون ثابت بالقيمة على هذه الدائرة ومماس لها، وبالتالي $\oint \vec{B}\, d\vec{s} = B\, ds$.

والمسار المغلق يتألف من N لفة من السلك الذي يسري في كل منها تيار I وبالتالي فإن قانون أمبير هنا يكتب بالشكل:

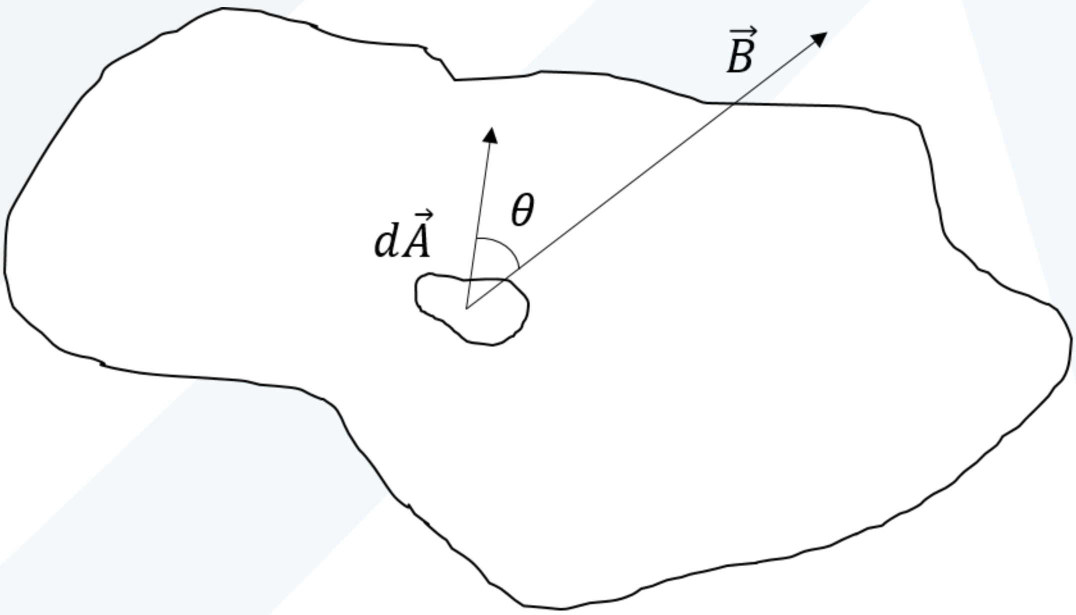
$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = B\, 2\pi r = \mu_0 I\, N$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 \, N \, I}{2\pi r}$$

2- التدفق المغناطيسي

لنأخذ عنصر سطح مساحته dA على سطح ذو شكل عشوائي (الشكل رقم 15). إذا كان الحقل المغناطيسي عند عنصر السطح هذا هو $\vec{B}$ فإن التدفق المغناطيسي خلال عنصر السطح dA هو $\vec{B}.d\vec{A}$ حيث $d\vec{A}$ شعاع عمودي على السطح dA طويلته تساوي فقط قيمة السطح dA. لذلك فإن التدفق المغناطيسي الكلي $\emptyset_B$ خلال السطح هو:

$$\emptyset_B = \int \vec{B} \, d\vec{A}$$

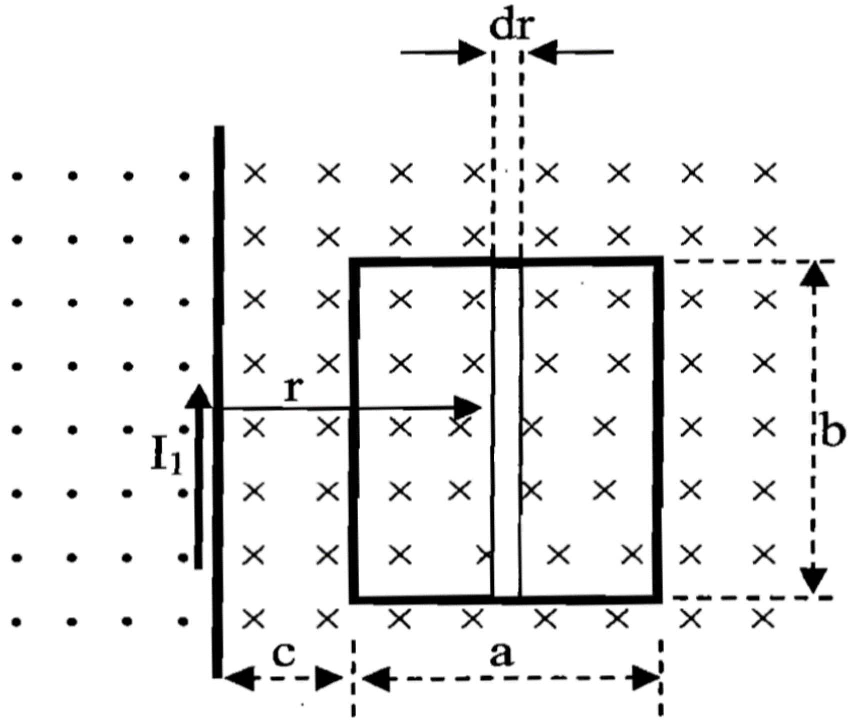


الشكل (15): شكل عشوائي لحساب تدفق الحقل المغناطيسي.

$$\rightarrow \emptyset_B = B \, A \cos\theta$$

واحدة التدفق هي الويبر Wb أو Tm^2.

مسألة: حلقة مستطيلة عرضها a وطولها b، متوضعة على بعد c من سلك طويل ينقل تيار I كما في الشكل جانباً. يوازي هذا السلك الضلع الذي يمثل طول هذه العروة. أوجد تدفق الحقل المغناطيسي خلال هذه العروة.



الحل: من قانون أمبير تكون شدة الحقل المغناطيسي الناتج عن سلك طويل ينقل تيار:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

أي أن الحقل المغناطيسي يتغير فوق العروة ويتجه نحو الصفحة. نستطيع كتابة تدفق الحقل المغناطيسي خلال عنصر السطح dA كما يلي:

$$\emptyset_B = \int \vec{B}\, d\vec{A} = \int B\, dA = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, dA$$

ولكن $dA = b\, dr$

$$\rightarrow \emptyset_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \int_{c}^{a+c} \frac{dr}{r}$$

$$\rightarrow \emptyset_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \ln r \,|_{c}^{a+c}$$

$$\rightarrow \emptyset_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \ln\left(\frac{a+c}{c}\right)$$

3- قانون غوص في المغناطيسية Gauss

ينص قانون غوص من أجل المغناطيسية على: التدفق المغناطيسي خلال أي سطح مغلق يكون دوماً مساوياً للصفر. أي أن:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{A} = 0$$

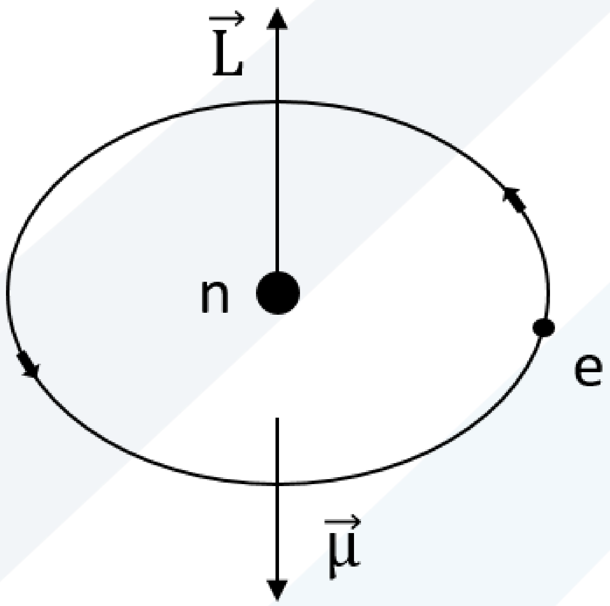
ترتكز هذه النتيجة على الحقيقة التجريبية بأن الأقطاب المغناطيسية المعزولة أو المغانط الأحادية القطب لم تكتشف أبداً أو ربما لا يمكن أن توجد أبداً.

4- المغناطيسية في المادة

5-1- العزوم المغناطيسية للذرات

ينص النموذج الكلاسيكي للذرة على أن الإلكترونات تدور وفق مسارات دائرية حول النواة. يشكل الإلكترون في هذا النموذج عروة تيار صغيرة جداً ويرافق هذه الحركة الدائرية عزم ذري مغناطيسي.

لنأخذ الكترون يتحرك بسرعة ثابتة v على مسار دائري نصف قطره r حول النواة (الشكل 16). بما أن الالكترون يجتاز مسافة قدرها $2\pi r$ في زمن مقداره T، حيث T هو زمن دورة واحدة فإن سرعة دوران الالكترون هي $v = \frac{2\pi r}{T}$.



الشكل (16): الكترون يتحرك بمسار دائري، له عزم مغناطيسي $\vec{\mu}$ ودفع زاوي $\vec{L}$.

التيار الفعال المرافق لدوران إلكترون يساوي شحنة هذا الالكترون مقسمة على زمن دورة واحدة. وباستخدام العلاقة $T = \frac{2\pi}{w}$ والعلاقة $w = \frac{v}{r}$ نجد أن:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ew}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi r}$$

يعطى العزم المغناطيسي المرافق لعروة التيار الفعال هذه بالعلاقة:

$$\mu = IA$$

حيث $A = \pi r^2$ هي مساحة دائرة المدار. وبالتالي نجد:

$$\mu = IA = \frac{ev}{2\pi r}\,\pi r^2 = \frac{1}{2}\,e\,v\,r$$

بما أن قيمة كمية الحركة الزاوية المدارية للإلكترون هي $L = m\,v\,r$، فيمكن كتابة العزم المغناطيسي:

$$\vec{\mu} = \left(\frac{e}{2m}\right)\vec{L}$$

نلاحظ وبسبب شحنة الإلكترون السالبة أن الشعاعين $\vec{L}$ و $\vec{\mu}$ لهما اتجاهين متعاكسين، ولكنهما عموديان على مستوي الدوران. وتعطى بالتالي القيمة الأصغر غير المساوية للصفر للعزم المغناطيسي:

$$\mu = \frac{e}{2m}\,\hbar$$

حيث أن $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.06 \times 10^{-34}\ \mathrm{J.s}$

ويبقى السؤال هو: بما أن جميع المواد تحوي الكترونات فلماذا لا تكون جميعها مغناطيسية. السبب هو أن معظم المواد يلغي فيها العزم المغناطيسي لإلكترون في ذرة العزم المغناطيسي لإلكترون آخر يدور باتجاه معاكس للأول في ذرة أخرى. بسبب ذلك تكون محصلة العزم المغناطيسي الناتج عن الحركة الدورانية للإلكترونات في معظم المواد إما مساوية للصفر أو تأخذ قيمة صغيرة جداً.

يملك الإلكترون أيضاً خاصية جوهرية أخرى تدعى السبين *spin* تساهم في العزم المغناطيسي للذرة. ووفقاً لذلك يمكن اعتبار الإلكترون عبارة عن كرة مشحونة تدور حول محورها الذاتي إضافة لدورانه حول النواة.

تملك نواة الذرة أيضاً عزم مغناطيسي مرافق لمكوناتها من بروتونات ونترونات ولكن العزم المغناطيسي للبروتون والنترون صغير مقارنة مع العزم المغناطيسي للإلكترون وبالتالي يمكن إهماله.

2-5- المغنطة وشدة الحقل المغناطيسي

توصف الحالة المغناطيسية لمادة بواسطة مقدار كمي يدعى شعاع المغنطة $\vec{M}$. أما قيمة شعاع المغنطة فتساوي إلى العزم المغناطيسي في واحدة الحجم من المادة.

لنأخذ منطقة يوجد فيها حقل مغناطيسي $\vec{B}_0$ متولد من ناقل يسري فيه تيار، فإذا ملأنا تلك المنطقة بمادة مغناطيسية فإن الحقل المغناطيسي الكلي يكون:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$$

حيث $\vec{B}_m$ هو الحقل المغناطيسي المتولد من المادة المغناطيسية:

$$\vec{B}_m = \vec{\mu}_0 \vec{M}$$

وبالتالي يصبح الحقل المغناطيسي الكلي في تلك المنطقة:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{\mu}_0 \vec{M}$$

يدعى المقدار $\vec{H}$ بشدة الحقل المغناطيسي ويعرف هذا المقدار بالعلاقة:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

وبالتالي يكون:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

واحدة كل من $\vec{B}$ و $\vec{H}$ هي $\frac{A}{m}$.

لنأخذ المنطقة او الحيز المحصور داخل وشيعة مستقيمة أو حلقية يمر فيها تيار/ ندعوه لبّ الوشيعة. فإذا كان هذا الحيز خلاء فإن:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H} \quad , \quad \vec{M} = 0$$

بما أن $B_0 = \mu_0\, n\, I$ في قلب وشيعة حلقية مثلاً، حيث n عدد اللفات في واحدة الطول من الوشيعة الحلقية فإن:

$$H = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{\mu_0\, n\, I}{\mu_0}$$

وبالتالي يكون:

$$H = n\, I$$

أي أن شـدة الحقل المغناطيسي في قلب الوشـيعة الحلقية مملوءة بمادة ما وكانت شـدة التيار المار في هذه الوشـيعة ثابتة فإن $\vec{H}$ داخل هذه المادة يبقى بدون تغيير. السـبب هو أن قيمة شـدة الحقل المغناطيسـي تتعلق فقط بالتيار المار في الوشيعة الحلقية، لكن الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ يتغير عندما تدخل هذه المادة.

3-5- تصنيف المواد المغناطيسية

يكون شعاع المغنطة $\vec{M}$ متناسباً مع شدة الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ من أجل عدد كبير من المواد ونستطيع أن نكتب:

$$\vec{M} = \chi\, \vec{H}$$

حيث χ هو معامل عديم الأبعاد يدعى الطواعية المغناطيسية susceptibility ويعبر عن قابلية التمغنط.

إذا كانت المواد بارامغناطيسـية يكون χ موجب وبالتالي يكون لكل من $\vec{M}$ و $\vec{H}$ الاتجاه نفسـه، وإذا كانت ديامغناطيسـية يكون χ سالب ويكون بالتالي اتجاه $\vec{M}$ بعكس اتجاه $\vec{H}$.

علمنا أن:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

وبالتالي يكون:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi\,\vec{H}) = \mu_0\,\vec{H}(1 + \chi\,)$$

أو أن:

$$\vec{B} = \mu_m \vec{H}$$

حيث يدعى الثابت μ_m بالنفوذية أو السماحية المغناطيسية permeability حيث:

$$\mu_m = \mu_0\,(1 + \chi\,)$$

يمكن أن تصنف المواد بحسب نفوذيتها المغناطيسية μ_m مقارنة مع نفوذية الخلاء μ_0:

المواد البارامغناطيسية: $\mu_m > \mu_0$

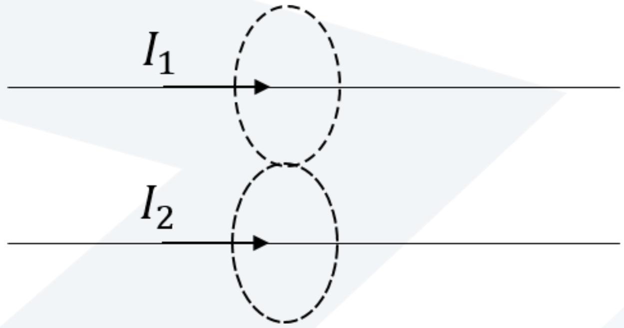
المواد الديامغناطيسية: $\mu_m < \mu_0$

المواد الفيرومغناطيسية: $\mu_m \gg \mu_0$

تمارين:

تمرين 1 (ب): سلكان مستقيمان ومتوازيان كما في الشكل جانباً. المسافة بينهما 0.2 m يمر في الأول تيار شدته $1.66\ A$ وفي الثاني تيار شدته $6.65\ A$ والمطلوب:

- ماهي شدة القوة التي تؤثر على متر واحد من كل من هذين السلكين
- أوجد شدة حقل التحريض المغناطيسي بين السلكين في حالة كان للتيارين في السلكين اتجاهين متعاكسين.



I_1
I_2