جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

كلية هندسة العمارة

الإحصاء والاحتمالات

Statistics & Probability

محاضرة رقم

14

الأستاذ الدكتور محمود محمد ديب طيوب

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Random Variables and Probability Distributions

مقدمة

يهتم هذا الفصل بدراسة المتغيرات العشوائية، من حيث تعريفها، وأنواعها، والتوزيعات الاحتمالية لها، وخصائص هذه التوزيعات، والتوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية الخاصة.

2 – المتغير العشوائي Random Variable:

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1– المتغيرات العشوائية المنفصلة Discrete Random Variables

2– المتغيرات العشوائية المتصلة(المستمرة) Continuous Random Variables

3 – المتغيرات العشوائية المنفصلة

المتغير العشوائي المنفصل هو الذي يأخذ قيم بينية، ومتباعدة، ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الأبجدية الكبيرة.... $X, Y, Z,$ ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بالحروف الأبجدية الصغيرة، ... $x, y, z,$

ومن أمثلة هذه المتغيرات:

1– عدد الأولاد الذكور في الأسرة المكونة من أربع أولاد X، $X:\{x=0,1,2,3,4\}$.

2– عدد العملاء الذين يتم إنهاء خدمتهم البنكية كل 10 دقائق Y، $Y:\{y=0,1,2,3,....\}$.

3– عدد مرات استخدام نوع معين من الأسمدة خلال الدورة الزراعية.

4– عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة تنتج 200 وحدة كل موسم.

5– عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.

وهكذا..... الأمثلة كثيرة

3/ –1 التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.

فإذا كان المتغير العشوائي المنفصل X يأخذ القيم، $X:\{x=x_1,x_2,...,x_n\}$ ، وكان $P(X=x_i)=f(x_i)$ هو احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيمة x_i ، فإنه، يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، وهو جدول مكون من عمودين، الأول به القيم الممكنة للمتغير $X:\{x=x_1,x_2,...,x_n\}$ ، والثاني به القيم الاحتمالية

لهذا المتغير $P(X=x_i)=f(x_i)$ ، أي أن:

جدول (8-1)

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

x_i	$f(x_i)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$
Σ	1

وتسمى الدالة $f(x_i)$ بدالة الاحتمال، ومن خصائص هذه الدالة ما يلي:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1\text{-}\quad 0 < f(x_i) < 1 \\ 2\text{-}\quad \sum f(x_i) = 1 \end{array}} \qquad (١-٨)$$

مثال (8-1)

إذا كان من المعلوم أن نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من التفاح الأمريكي 0.60 ، بينما يكون نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح 0.40، اشترى أحد العملاء عبوتين، والمطلوب:

1- كون فراغ العينة.

2- إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي، فأوجد الآتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .
- ارسم دالة الاحتمال لهذا المتغير.
- كون التوزيع الاحتمالي التجميعي.
- ما هو احتمال $P(X=1)$ ، $P(X\le 1)$ ، $P(X=1.5)$ ، $P(X\le 1.5)$
- حدد قيمة الوسيط، والمنوال لعدد العبوات المشتراة.

الحل:

تكوين فراغ العينة:

التجربة هنا هو شراء وحدتين من عبوات التفاح، ومن ثم فراغ العينة يتكون من أربع نتائج، هي:

- التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي X

من المعلوم أن العميل اشترى عبوتين، وأن المتغير العشوائي هو عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي، لذا تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي:

$x=0$ إذا كانت العبوتين من النوع الآخر، أى إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، آخر)

$x=1$ إذا كان أحد العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، أمريكي) أو (أمريكي،آخر)

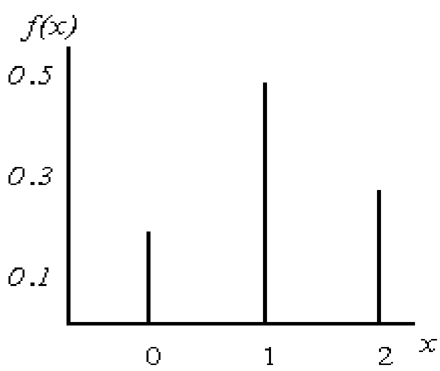
$x=2$ إذا كان العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (أمريكي ، أمريكي)

ومن ثم يأخذ المتغير القيم: $X:\{x=0,1,2\}$ ، ويرتبط احتمالات هذه القيم باحتمالات نتائج التجربة المناظرة لها كما هو مبين أعلاه، ومن ثم يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو:

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي

x_i	$f(x_i)$
0	0.16
1	0.48
2	0.36
Σ	1

- رسم دالة الاحتمال $f(x)$:



- تكوين التوزيع الاحتمالي التجميعي:

التوزيع التجميعي، هو جدول يشمل الاحتمالات الناتجة من حساب الاحتمال $P(X \le x)$ ، ويرمز له بالرمز $F(x)$ ،

أي أن دالة التوزيع الاحتمالي التجميعي تأخذ الصورة التالية:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x)} \qquad (٢-٨)$$

ومن ثم يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي التجميعي لعدد الوحدات المشتراة من التفاح الأمريكي كما يلي:

جدول التوزيع الاحتمالي، والتوزيع التجميعي لعدد العبوات المشتراه من التفاح الأمريكي

x_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$
0	0.16	$F(0) = P(X \leq 0) = 0.16$
1	0.48	$F(1) = P(X \leq 1) = 0.16 + 0.48 = 0.64$
2	0.36	$F(2) = P(X \leq 2) = 0.64 + 0.36 = 1.00$
Σ	1	

- حساب الاحتمالات:− $P(X = 1)$ ، $P(X \leq 1)$ ، $P(X = 1.5)$ ، $P(X \leq 1.5)$

$$P(X = 1) = f(1) = 0.48$$
$$P(X \leq 1) = F(1) = 0.64$$
$$P(X = 1.5) = f(1.5) = 0$$
$$P(X \leq 1.5) = F(1.5) = F(1) = 0.64$$

- تحديد قيمة الوسيط، والمنوال.

الوسيط:− رتبة الوسيط هو 0.50 ، إذا الوسيط M هو القيمة التي تحقق الاحتمال:

$P(X \leq M) = F(M) = 0.50$ ، وهذا الاحتمال يقع بين القيمتين $(1,0)$ كما هو مبين بالرسم التالي:

	x_i	$F(x_i)$	
	0	0.16	
M			$F(M) = 0.50$
	1	0.64	
	2	1.00	

إذا الوسيط قيمته هي:

$$M = 0 + \frac{0.5 - 0.16}{0.64 - 0.16} \times (1 - 0) = 0.71$$

حساب المنوال:

المنوال $Mode$ = القيمة x_i المناظرة لأكبر قيمة احتمالية.

إذا المنوال هو: $Mode = 1$ حيث أنه يناظر أكبر قيمة احتمالية هي: $f(1) = 0.48$.

2/3/8 الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي المنفصل

أ- يرمز للوسط الحسابي للمتغير العشوائي بالرمز μ (ميو)، ويحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{\mu = \sum x_i \ f(x_i)} \qquad (٨-٣)$$

ب- وأما التباين ويرمز له بالرمز σ^2 (سيجما)، فيحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum (x_i - \mu)^2 \ f(x_i) \\ &= \sum x_i^2 \ f(x_i) - \mu^2\end{aligned}} \qquad (٨-٤)$$

مثال (8-2)

في المثال السابق احسب ما يلي:

أ- الوسط الحسابي لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي:

ب-احسب الانحراف المعياري لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي.

ت-أوجد معامل الاختلاف النسبي:

الحل

أ- الوسط الحسابي لعدد العبوات من النوع الأمريكي:

لحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري يتم استخدام المعادلة (8-3)، (8-4) وهذا يتطلب تكوين جدول يشمل المجاميع التالية: $\sum x_i \ f(x_i)$ ، $\sum x_i^2 \ f(x_i)$، وذلك كما يلي:

x_i	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
0	0.16	0	0
1	0.48	0.48	0.48
2	0.36	0.72	1.44
Σ	1	1.20	1.92

إذا الوسط الحسابي هو: $\mu = \sum x_i \ f(x_i) = 1.20$

ب- ولحساب الانحراف المعياري يجب أولا حساب التباين وهو:

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 \ f(x_i) - \mu^2 = 1.92 - (1.20)^2 = 0.48$$

إذا الانحراف المعياري قيمته هي:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.48} = 0.693$$

ت- معامل الاختلاف النسبي هو:

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{0.693}{1.2} \times 100 = 57.7$$

واجب منزلي:-

فيما يلي التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من أحد مساحيق النظافة خلال الشهر X ،

$X:\{x=0,1,2,3,4,5\}$

x (عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة)	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.15	0.30	0.25	0.23	0.05	0.02

والمطلوب:

1- حدد نوع هذا المتغير (عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة)

2- احسب الوسط والوسيط والمنوال والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

3- كون جدول التوزيع التجميعي $F(x)$ ثم أوجد الآتي:

أ- نسبة الأسر التي يقل استهلاكها عن وحدتين

ب- نسبة الأسر التي يزيد استهلاكها عن 3 وحدات

ت- إذا كان لدينا 500 أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يكون استهلاكها على الأقل 3 وحدات؟

4- احسب معامل الالتواء، وكذلك معامل الاختلاف النسبي، وعلق على النتائج.

4/8 التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الخاصة

في كثير من النواحي التطبيقية، تتبع بعض الظواهر توزيعات احتمالية خاصة، وهي التوزيعات التي يمكن حساب احتمالات قيم المتغير عن طريق معادلة رياضية، تسمى بدالة الاحتمال $f(x)$ ، وهذه المعادلة لها معالم معينة، تسمى بمعالم المجتمع الذي ينسب له هذا التوزيع، وهذه المعالم ما هي إلا حقائق ثابتة مجهولة، وهي الأساس في حساب القيم الاحتمالية للتوزيع الاحتمالي للمجتمع محل الدراسة.

ومن أهم التوزيعات التي سيتم دراستها في هذا المقرر، توزيع ثنائي الحدين، والتوزيع البواسون.

1/4/8 التوزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان، النتيجة محل الاهتمام وتسمى بحالة النجاح، والأخرى تسمى بحالة الفشل، ومن أمثلة ذلك:

- عند إعطاء مريض نوع معين من الأدوية، لها نتيجتان: (استجابة للدواء، أو عدم استجابة)
- عند فحص عبوة بداخلها نوع معين من الفاكهة، لها نتيجتان (الوحدة إما أن تكون سليمة، أو تكون معيبة)
- عند إلقاء قطعة عملة، لها نتيجتان (ظهور الوجه الذي يحمل الصورة، أو الوجه الذي يحمل الكتابة)
- نتيجة الطالب في الاختبار (نجاح، رسوب)
- استخدام المزارع لبرنامج معين في الزراعة (يستخدم، أو لا يستخدم).

شكل التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين

إذا كررت محاولة n من المرات، بحيث أن كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان هما:

- النتيجة محل الاهتمام " حالة نجاح " وتتم باحتمال ثابت في كل محاولة هو p

- النتيجة الأخرى " حالة فشل " وتتم باحتمال ثابت أيضا هو $q=1-p$

وبافتراض أن هذه المحاولات مستقلة، بمعنى أن نتيجة كل محاولة ليس لها علاقة بنتيجة المحاولة الأخرى، وإذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد حالات النجاح "عدد النتائج محل الاهتمام" في الـ n محاولة، فإن مدي المتغير العشوائي X والذي يعبر عن عدد حالات النجاح هو: $X:\{x=0,1,2,...,n\}$ ، ومن ثم يحسب الاحتمال $P(X=x)=f(x)$ بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{f(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \quad , \quad x=0,1,2,...n} \qquad (٨-٥)$$

حيث أن $\binom{n}{x}$ هي عدد طرق اختيار x من n مع إهمال الترتيب، وتحسب كما يلي:

$$\boxed{\binom{n}{x}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{x(x-1)(x-2)...3\times2\times1}} \qquad (٨-٦)$$

$$\binom{7}{3}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35 \quad = \binom{7}{4}$$

$$\binom{7}{0}=\binom{7}{7}=1$$

مثال (8-3)

إذا كان من المعلوم أن نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام نوع معين من العقاقير الطبية هو 0.60 ، إذا تناول هذا العقار 5 مصابين بهذا المرض. إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الذين المستجيبين (حالات الشفاء) لهذا العقار.

المطلوب:

أ- ما هو نوع المتغير؟

ب- اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

ت- احسب الاحتمالات التالية:

- ما احتمال استجابة 3 مرضى لهذا العقار؟
- ما هو احتمال استجابة مريض واحد على الأقل؟
- ما هو احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر؟

ث- احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة.

ج- حدد شكل التوزيع.

الحل:

أ- عدد حالات الاستجابة X متغير كمي منفصل ، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو:

$X:\{x=0,1,2,3,4,5\}$:

ب- شكل دالة الاحتمال: $n=5$، $p=0.60$، $q=1-p=0.40$ إذا:

$$f(x)=\binom{n}{x}(p)^x(q)^{n-x}$$

$$=\binom{5}{x}(0.6)^x(0.4)^{5-x} \quad , \quad x=0,1,2,3,4,5$$

ت- حساب الاحتمالات:

- حساب احتمال استجابة 3 مرضى لهذا الدواء: $P(x=3)=f(3)$

$$f(3)=\binom{5}{3}(0.6)^3(0.4)^{5-3}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times0.216\times0.16=10\times0.03456$$
$$=0.3456$$

- حساب احتمال استجابة مريض واحد على الأقل: $P(x\geq1)$

$$P(x\geq1)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=1-f(0)$$
$$=1-\left[\binom{5}{0}(0.6)^0(0.4)^5\right]=1-1\times1\times0.01024=0.98976$$

- حساب احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر: $P(x\leq2)$:

$$P(x\leq2)=f(2)+f(1)+f(0)$$

$$=\binom{5}{2}(0.6)^2(0.4)^3+\binom{5}{1}(0.6)^1(0.4)^4+\binom{5}{0}(0.6)^0(0.4)^5$$
$$=\frac{5\times4}{2\times1}(0.36)(0.064)+\frac{5}{1}(0.6)(0.0256)+1(1)(0.01024$$
$$=0.2304+0.0768+0.01024=0.31744$$

ث- حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

- الوسط الحسابي (μ) في حالة التوزيع ثنائي الحدين يحسب بتطبيق المعادلة (**3-8**)، وباستخدام العمليات الرياضية يمكن الوصول إلى النتيجة التالية:

$$\boxed{\mu=\sum x\ f(x)=np} \qquad (٨-٧)$$

إذا الوسط الحسابي هو:

$$\mu=np=5(0.60)=3$$

- الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين، ولحساب التباين في التوزيع ثنائي الحدين يتم تطبيق المعادلة (**4-8**)، ومنها يمكن التوصل إلى الصورة التالية:

$$\boxed{\sigma^2=npq} \qquad (٨-٨)$$

إذا تباين عدد حالات الاستجابة هو:

$$\sigma^2=npq$$
$$=5(0.60)(0.40)=1.2$$

ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري الصورة التالية:

$$\sigma = \sqrt{npq}$$
$$= \sqrt{1.2} = 1.095$$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة التالية:

$$V.C = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{1.095}{3} \times 100 = 36.5\%$$

ج- تحديد شكل التوزيع:

يتحدد شكل التوزيع ثنائي الحدين وفقا لقيمة احتمال النجاح p كما يلي:

إذا كان $p = 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون متماثل.

إذا كان $p < 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون موجب الالتواء.

إذا كان $p > 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون سالب الالتواء.

وحيث أن $p = 0.6 > 0.5$ فإن توزيع عدد حالات الاستجابة سالب الالتواء.

2/4/8 التوزيع البواسوني Poisson Distribution

يكثر استخدام هذا التوزيع في الحالات التي تقع فيها الأحداث وفقا لمعدلات زمنية، وكذلك في حالة الأحداث نادرة الوقوع، ومن أمثلة ذلك:

- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد مرات ري نوع معين من المحاصيل الزراعية خلال الموسم. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد العملاء الذين يتم خدمتهم البنكية كل 10 دقائق. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد مرات زيارة المريض للطبيب كل سنة. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد مرات تناول الأسرة للحوم الحمراء خلال الأسبوع. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد أخطاء الطباعة لكل صفحة من صفحات الكتاب. $X : \{x = 0,1,2,...\}$

وهكذا الأمثلة كثيرة

شكل التوزيع الاحتمالي البواسوني

إذا كان متوســـط عدد مرات وقوع حادث وفقا لمعدل زمني معين هو μ، وكان المتغير العشـــوائي X يعبر عن عدد مرات وقوع الحادث وفقا لهذا المعدل، فإن مدي المتغير العشـــوائي X هو: $X : \{x = 0,1,2,...\}$، وهذا المدى عبارة عن فئة مفتوحة من اليمين، فإن الاحتمال $P(X = x) = f(x)$ والذي يعبر عن احتمال وقوع الحادث عدد x من المرات وفقا لهذا المعدل، يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,...} \qquad (٨-٩)$$

حيث أن e هي أســـاس اللوغاريتم الطبيعي، وتوجد في بعض الآلات الحاســـبة، وقيمتها هي: $e = 2.718$ تقريبا،

ويمكن حساب قيمتها باستخدام الآلة الحاسبة باتباع الخطوات التالية من الشمال إلى اليمين:

مثلا إيجاد $e^{-1.5}$

SHIFT e^x (-) 1.5 = — النتيجة 0.22323016

وأما $x!$ فتسمى "مضروب العدد x " ويساوي: $x! = x(x-1)(x-2)..3\times2\times1$

مثال (8-4)

إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

أ- ما هو نوع المتغير العشوائي؟

ب- اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

ح- احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
- احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحدة على الأقل خلال الشهر؟
- احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟

خ- احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

د- حدد شكل التوزيع.

الحل:

أ- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة X متغير كمي منفصل ، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو: $X:\{x=0,1,2,3,...\}$:

ب- شكل دالة الاحتمال:

بما أن متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو: $\mu = 3$ ، إذا دالة الاحتمال هي:

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

$$= \frac{e^{-3}3^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,...$$

ح- حساب الاحتمالات:

- حساب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدتين خلال الشهر، $f(2)$

$$f(2) = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = \frac{0.0498(9)}{2\times1} = 0.22404$$

- احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر هو:

$$P(X \geq 1) = f(1) + f(2) + ...$$

$$= 1 - f(0) = 1 - \frac{e^{-3}3^0}{0!} = \frac{0.0498}{1} = 1 - 0.0498 = 0.9502$$

- احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر هو:

$$P(X \leq 3) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0)$$

$$= \frac{e^{-3}3^3}{3!} + \frac{e^{-3}3^2}{2!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} + \frac{e^{-3}3^0}{0!} \frac{0.0498}{1}$$

$$= 0.0498\left(\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{1}\right) = 0.0498(13) = 0.6474$$

خ- حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

- الوسط الحسابي (μ) في حالة التوزيع البواسون هو معلمة معطاة هي:

$$\mu = 3$$

في هذا التوزيع، فإن التباين يساوي الوسط الحسابي:

أي أن: $\sigma^2 = \mu = 3$

ومن ثم يكون الانحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{3} = 1.732$$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة التي سبق استخدامها في الفصل السابق، وهو:

$$V.C = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{1.732}{3} \times 100 = 57.7\%$$

د- تحديد شكل التوزيع:

دائما التوزيع البواسون موجب الالتواء.

5/8 المتغيرات العشوائية المستمرة Continuous Random Variables

المتغير العشــوائي المســتمر، هو الذي يأخذ قيما متصــلة، ويأخذ عدد لانهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان X متغير عشـوائي مستمر، ويقع في المدى (a,b)، أي أن: $\{X = x : a < x < b\}$، فإن للمتغير X عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى (a,b)، ومن الأمثلة على المتغيرات الكمية المستمرة ما يلي:

- كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر: $\{X = x : 10 < x < 40\}$
- المساحة المنزرعة بالأعلاف في المملكة بالألف هكتار $\{X = x : 1000 < x < 15000\}$
- فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالأيام، $\{X = x : 1 < x < 5\}$
- وزن الجسم بالكيلوجرام للأعمار من $(40\text{-}30)$، $\{X = x : 55 < x < 80\}$

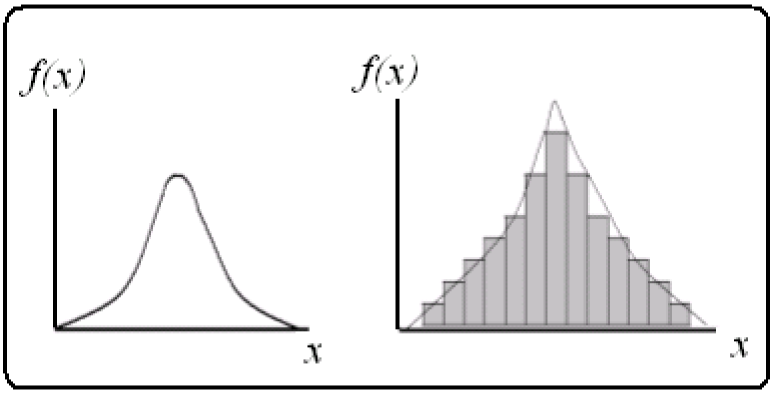
وهكذا الأمثلة على المتغير الكمي المستمر كثيرة.

1/5/8 التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر Continuous Probability

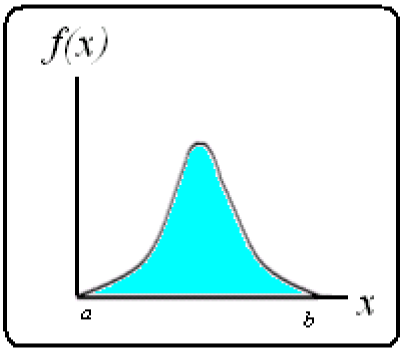
عند تمثيل بيانات المتغير الكمي المستمر في شكل مدرج تكراري النسبي، نجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصــف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المســتمر، وكلما ضــاقت الفترات بين مراكز الفئات، يمكن الحصــول على رسم دقيق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر، كما هو مبين بالشكل التالي:

شكل (**1-8**)

شكل منحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر



والمســاحة أســفل المنحنى تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، ولذا تســاوي هذه المســاحة الواحد الصــحيح، وتســـمى الدالة $f(x)$ بدالة كثافة الاحتمال Probability Distribution Function$(p.d.f)$ ، وبفرض المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى: $X = \{x : a \prec x \prec b\}$ ، وأن منحنى هذه الدالة يأخذ الصورة التالية:



فإن من خصائص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ما يلي:

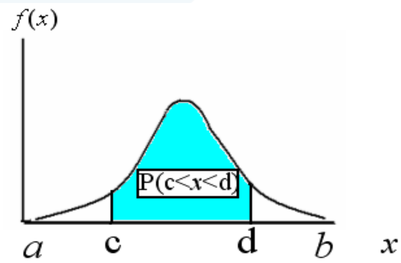
1- الدالة $f(x)$ موجبة داخل المدى (a,b) أي أن: $f(x) \succ 0$ ، $x \in (a,b)$

2- التكامل على حدود المتغير من الحد الأدنى a حتى الحد الأعلى b يعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، لذا يساوي الواحد الصحيح ، أي أن:

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx = 1} \qquad (٨-١٠)$$

حيث أن الشكل الرياضي أعلاه يسمى بالتكامل المحدد من $x=a$ حتى $x=b$ ، وهذا يعني إيجاد المساحة أسفل المنحني بين (a,b) .

3- لحساب احتمال أن المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى (d,c) أي حساب الاحتمال $p(c<x<d)$ ، يجب حساب المساحة أسفل المنحني من $x=c$ حتى $x=d$ كما هي مبينة في الشكل البياني التالي:



ويتم ذلك بإيجاد التكامل المحدد في هذا المدى، كما يلي:

$$\boxed{p(c<x<d) = \int_{x=c}^{x=d} f(x)\ dx = [g(x)]_c^d = g(d) - g(c)} \qquad (٨-١١)$$

4- في المتغير المستمر، يكون الاحتمال $p(x=value)$ مساويا للصفر، أي أن:

$$\boxed{p(x=value)=0} \qquad (٨-١١)$$

ولكي يمكننا حساب الاحتمالات، يجب عرض بعض قواعد التكامل التالية:

جدول (8-2)

بعض قواعد التكامل

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ and $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$ (2) $\int e^x dx = e^x$ and $\int e^{(a+bx)} dx = \frac{1}{b} e^{(a+bx)}$ (3) $\int \frac{1}{x} dx = \log_e(x)$ and $\int \frac{1}{(a+bx)} dx = \frac{1}{b}\log_e(a+bx)$	integration
(4) $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! = n(n-1)(n-2)..3\times 2\times 1$	gamma
(5) $I\Gamma(n+1) = \int_0^a x^n e^{-x} dx = n!\left(1-e^{-a}\sum_{i=0}^{n}\frac{a^i}{i!}\right)$	Incomplete gamma
(6) $B(m+1,n+1) = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$	Beta

مثال (8-5)

إذا كان الإنفاق الشهري للأسرة بالألف ريال على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx(10-x) & , 0 < x < 10 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حساب قيمة الثابت c

2- احسب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما بين (8,5) ألف ريال خلال الشهر.

3- إذا كان لدينا 600 أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 آلاف خلال الشهر؟

الحل

1- حساب قيمة c

من خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx = 1$$

إذا

$$\int_{x=0}^{x=10} cx(10-x)\,dx = c\int_{x=0}^{x=10}(10x-x^2)\,dx = c\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$$

$$= c\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = c\left[(5(100)-\frac{(1000)}{3})\right]-0$$

$$= \frac{500}{3}c = 1$$

$$c = 3/500 = 0.006$$

2– حساب أن إنفاق الأسرة يتراوح بين (8,5) ألف ريال خلا الشهر هو.

$$p(5<x<8) = \int_{x=5}^{x=8} 0.006x(10-x)\,dx = 0.006\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_5^8$$

$$= 0.006\left[\left(5(8)^2-\frac{8^3}{3}\right)-\left(5(5)^2-\frac{5^3}{3}\right)\right] = 0.006[(149.3333)-(83.3333)]$$

$$= 0.006(66) = 0.396$$

3– إذا كان لدينا 600 أسرة، فإن عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 آلاف خلال الشهر هو:

$$number\ of\ \ family = 600\ \ p(x<3)$$

$$= 600\int_0^3 0.006x(10-x)dx$$

$$= 3.6\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3.6[45-9]-0 = 129.6 \approx 130$$

حوالي 130 أسرة.

2/5/8 المتوسط والتباين في التوزيع الاحتمالي المستمر

إذا كانت $f(x)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشـــوائي x، $a<x<b$ فإن التوقع الرياضـــي للدالة $h(x)$ تأخذ الصورة التالية:

$$\boxed{E(h(x)) = \int_a^b h(x)\ dx} \qquad (٨-١٢)$$

ومن ثم يمكن كتابة معادلة الوسط والتباين كما يلي.

$$\mu = E(x) = \int_a^b x f(x) dx$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - u^2 \ , \ E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x) \ dx \qquad (١٣-٨)$$

تابع مثال (5-8)

في المثال السابق أوجد المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف النسبي للإنفاق الشهري.

الحـل

1- المتوسط الحسابي

$$\mu = E(x) = xf(x)dx = \int_0^{10} x(0.006x(10-x)) = 0.006\int_0^{10}(10x^2 - x^3)dx$$

$$= 0.006\left[10\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 0.006\left[\left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{4}\right) - (0)\right]$$

$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = 5$$

متوسط إنفاق الأسرة الشهري 5 آلاف ريال.

2- الانحراف المعياري

$$\sigma^2 = E(x^2) - u^2 = E(x^2) - (5)^2$$

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x) \ dx = 0.006\int_0^{10}(10x^3 - x^4)dx$$

$$= 0.006\left[10\left(\frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^5}{5}\right)\right]_0^{10} = 0.006\left[\frac{100000}{4} - \frac{100000}{5}\right] - 0$$

$$= 600\left(\frac{1}{20}\right) = 30$$

إذا التباين هو : $\sigma^2 = 30 - 25 = 5$ ، ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري القيمة التالية:

$$\sigma = \sqrt{\text{variance}} = \sqrt{5} = 2.236$$

3- معامل الاختلاف النسبي

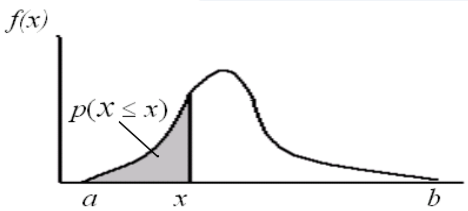
$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{2.236}{5} \times 100 = 44.72\%$$

دالة التوزيع التجميعي (C.D.F) Cumulative Distribution Function

يرمز لهذه الدالة بالرمز *(C.D.F)=F(x)* وتحسب بإيجاد الاحتمال:

$$C.D.F = F(x) = P(X \le x) = \int_a^x f(x)dx \qquad (١٤-٨)$$

ويمكن توضيحها بيانيا بالرسم التالي:



تابع مثال (**5-8**)

في المثال (**5-8**) أوجد دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$، ثم استخدم هذه الدالة لحساب احتمال أن إنفاق الأسرة يقل عن 5 آلاف جنيه.

الحل

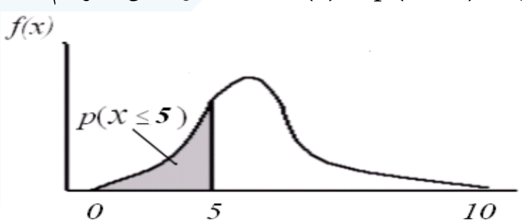
- إيجاد دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$

$$F(x) = \int_0^x f(x)\ dx$$

$$= \int_0^x 0.006x(10 - x)dx = 0.006\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^x$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]$$

- حساب الاحتمال المطلوب $F(5) = p(x \le 5)$ ، كما هو مبين بالرسم التالي:



ويمكن حساب هذا الاحتمال بالتعويض عن $x = 5$ في الدالة $F(x)$ التي تم التوصل إليها، أي أن:

$$F(5) = P(x \le 5) =$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right] = 0.006\left[125 - \frac{125}{3}\right]$$

$$= 0.006\left(\frac{250}{3}\right) = 0.5$$

أي أن 50% من الأسر يقل إنفاقها عن 5 آلاف ريال.

خصائص دالة التوزيع التجميعي

1- $F(x) \succ 0$ 2- $F(a)=0$ 3- $F(b)=1$ 4- $p(X \succ x)=1-F(x)$ 5- $f(x)=dF(x)/dx$

6/8 التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة

Continuous Probability Distributions

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة، ولها دوال كثافة احتمال محددة، وفيما يلي بعض هذه التوزيعات:

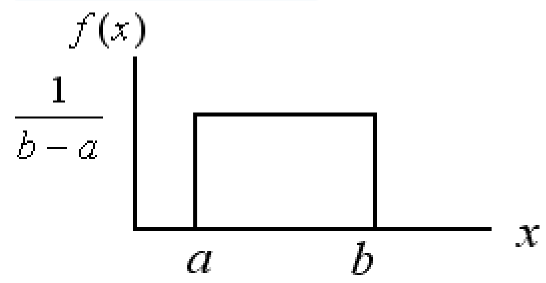
1/6/8 التوزيع المنتظم Uniform distribution

شكل دالة كثافة الاحتمال $p.d.f$

هو توزيع له دالة احتمال ثابتة، ويستخدم في حالة الظواهر التي يمكن أن تحدث بشكل منتظم، فإذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع منتظم $Uniform$، مداه هو $a<x<b$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{b-a} \quad , \quad a<x<b} \tag{١٥-٨}$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



معالم هذا التوزيع

توجد معلمتان لهذا التوزيع هما (b,a)، ولذا يكتب رمز لهذا التوزيع الصورة $x \sim U(a,b)$

خصائص التوزيع المستطيل

الوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا المتغير هما :

$$\mu=E(x)=\frac{a+b}{2} \quad , \quad \sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

على الطالب إثبات ذلك:

دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي

$$F(x) = p(X \le x) = \int_a^x f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx = \frac{x-a}{b-a} \quad (١٦-٨)$$

مثال (8-6)

استورد أحد المراكز التجارية 1500 طن بطاطس، ووضعها في مخزن، وقام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة. إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم، فأوجد الآتي:

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع.
- بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟

الحـل

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

بفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية للبيع مقاسة بالشهر، أي أن $0 < x < 12$ ، ومن ثم تأخذ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن الصورة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12} \quad , \; 0 < x < 12$$

- حساب الكمية الموجودة بالمخزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع.

بفرض أن Q هي كمية البطاطس المستوردة ، تكون الكية المتبقية بالمخزن بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع هي :

$$Q \times p(x > 7) = Q \times (1 - F(7)) = 1500(1 - \frac{7-0}{12-0}) = 625 \; Ton$$

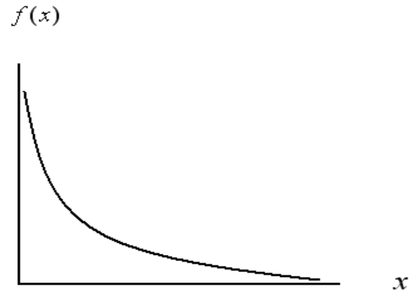
2/6/8 التوزيع الأسي السالب Negative Exponential distribution

شكل دالة كثافة الاحتمال $p.d.f$

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع أسي سالب ، مداه هو $0 < x < \infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$\boxed{f(x) = \theta e^{-\theta x} , \; 0 < x < \infty \; , \; \theta > 0} \quad (١٧-٨)$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



معالم هذا التوزيع

توجد معلمة واحدة هي (θ)

خصائص التوزيع الأسي السالب

الوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا المتغير هما:

$$\mu = E(x) = \frac{1}{\theta} \quad , \quad \sigma^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي

$$F(x) = p(X \le x) = \int_0^x f(x)dx = \left(1 - e^{-\theta x}\right)$$

مثال (8-7)

إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل في البنك تتبع توزيع أسي بمتوسط 2 دقيقة، فأوجد ما يلي.

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل.
- ما احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

الحل

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

بفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة، أي أن $0 < x < \infty$ ، فإن المتوسط $1/\theta = 2$ ، ومن ثم تصبح قيمة (θ) هي: $(\theta = 0.5)$ ، وتكتب دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن على الصورة التالية:

$$f(x) = 0.5\, e^{-0.5\, x} ,\ 0 < x < \infty$$

- حساب احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

$$p(x \le 1) = (1 - e^{-0.5x}) = (1 - e^{-0.5(1)}) = 0.3935$$

3/6/8 التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

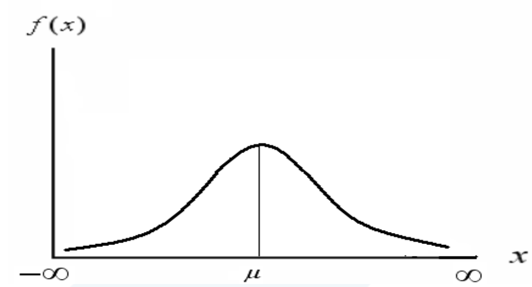
يعتبر هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما في النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي شاملا التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى هذا التوزيع، وفيما يلي عرض لهذا التوزيع.

شكل دالة كثافة الاحتمال $p.d.f$

إذا كان المتغير X متغير عشوائي له توزيع طبيعي ، مداه هو $-\infty < X < \infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , -\infty < x < \infty \ , \ \pi = 22/7 \qquad (١٨-٨)$$

وهذا التوزيع له منحنى متماثل يأخذ الصورة التالية:



فهذا المنحنى متماثل على جانبي الوسط الحسابي μ .

معالم هذا التوزيع

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما :

الوسط الحسابي : $E(x) = \mu$ والتباين : $\text{var}(x) = \sigma^2$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير x بالرموز : $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ ، وتباين σ^2 .

خصائص التوزيع الطبيعي

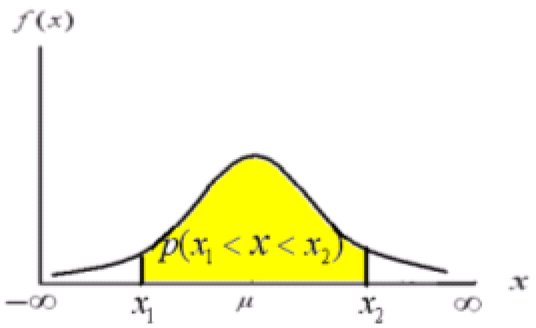
هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما، بل يشتق منه كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى المستخدمة في الاستدلال الإحصائي، ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

1- الوسط الحسابي μ **2**- والتباين σ^2

3- منحني هذا التوزيع متماثل على جانبي الوسط μ

كيفية حساب الاحتمالات $p(x_1 < X < x_2)$

بفرض أن الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(x_1 < X < x_2)$ ، وهذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



وحيث أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة (الاحتمال) تحسب بإيجاد التكامل التالي:

$$p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيين إلى عمل تحويلة رياضية Transform، يمكن استخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات، وهذه التحويلة هي:

$$z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

ويعرف المتغير الجديد z بالمتغير الطبيعي القياسي Standard Normal Variable ، وهذا المتغير له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

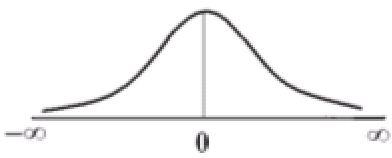
$$\boxed{f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} , -\infty < z < \infty \ , \ \pi = 22/7} \qquad (٨-١٩)$$

ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

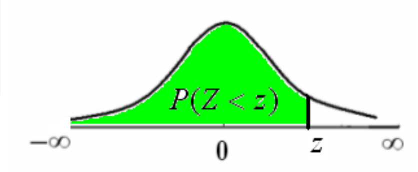
1- متوسطه هو: $E(z) = 0$ **2**- تباينه هو: $\text{var}(z) = 1$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير z بالرموز : $z \sim N(0,1)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط (0) ، وتباين (1) .

3-يأخذ المنحنى الشكل الناقوس المتماثل على جانبي الصفر:



وصمم الإحصائيون جداول إحصائية لحساب دالة التوزيع التجميعي: $F(z) = P(Z < z)$ ، كما هو مبين بالرسم التالي:

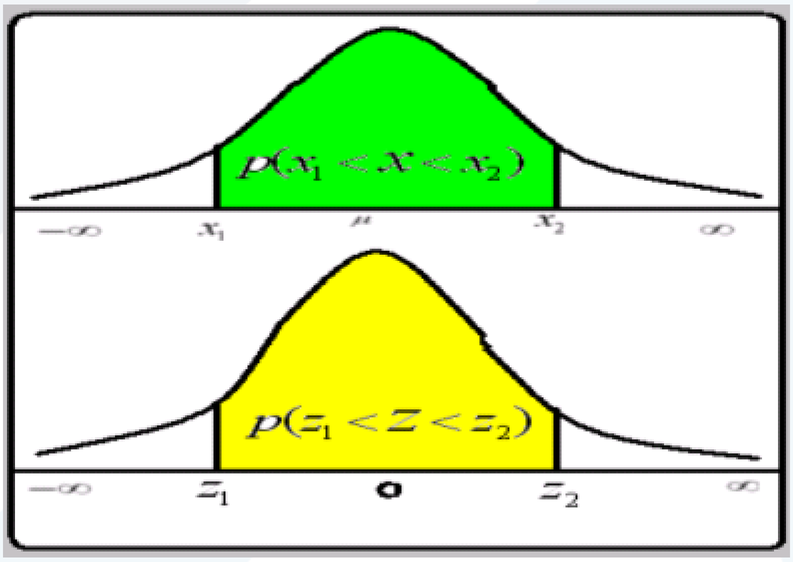


ونعود الآن إلى خطوات حساب الاحتمال $p(x_1<X<x_2)$ باستخدام التحويلة $z=(x-\mu)/\sigma$:

1- يتم تحويل القيم الطبيعية (x_1,x_2) إلى قيم طبيعية قياسية:

$z_1=(x_1-\mu)/\sigma \ , \ z_2=(x_2-\mu)/\sigma$.

2- ومن ثم يكون الاحتمال: $p(x_1<X<x_2)=p(z_1<Z<z_2)$:



3- تستخدم جداول التوزيع الطبيعي القياسي، والذي يعطي المساحة الخاصة بالاحتمال $F(z)=P(Z<z)$

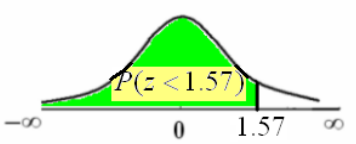
4- طريقة استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي في حساب الاحتمالات

أوجد الاحتمالات التالية:

أ- $P(z<1.57)$ ب- $P(z<-2.33)$ ج- $P(z>1.96)$ د- $P(-2.01<z<1.28)$

الحل

أ- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z<1.57)=F(1.57)$ أسفل المنحنى كما يلي



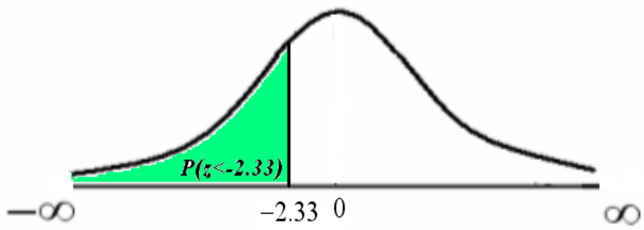
ويتم استخدام الجدول كما هو مبين :

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮										
1.00										
1.10										
1.20										
1.30										
1.40										
1.50								0.9418		
⋮										

ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(z<1.57)=F(1.57)=0.9418$

ب- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال $P(z<-2.33)=F(-2.33)$ موضحة كالتالي:

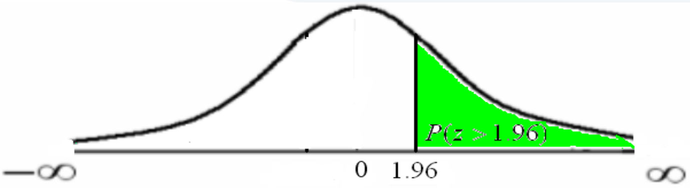
P(z<-2.33)



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.										
.										
.										
.										
-2.70										
-2.60										
-2.50										
-2.40										
-2.30				0.0099						
.										
.										
.										

ومن ثم يكون : $P(z < -2.33) = 0.0099$

ج- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z > 1.96)$ كالتالي:



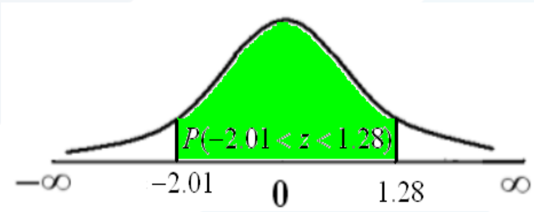
وهذا الاحتمال يحسب باستخدام خصائص دالة التوزيع التجميعي ، حيث أن :

$$P(z > 1.96) = 1 - p(z < 1.96) = 1 - F(1.96)$$

وبالكشـــف في الجدول بنفس الطريقة الســـابقة على القيمة 1.96 نجد أن : $p(z < 1.96) = 0.9750$ ،

ومن ثم يكون الاحتمال المطلوب هو: $P(z > 1.96) = 1 - 0.9750 = 0.0250$

د- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال $P(-2.01 < z < 1.28)$ هي:



وباستخدام أيضا خصائص دالة التوزيع التجميعي يمكن حساب هذا الاحتمال ، حيث أن :

$$P(-2.01 < z < 1.28) = F(1.28) - F(-2.01)$$

وبالكشف في الجدول عن هاتين القيمتين ، نجد أن:

$$P(-2.01 < z < 1.28) = 0.8997 - 0.0222 = 0.8775$$

مثـال(8-8)

إذا كان الدخل الســـنوي للأســـرة في أحد مناطق المملكة يتبع توزيع طبيعي متوســـطه 80 ألف ريال، وتباينه 900. والمطلوب:

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

2- كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال.

3- ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن60 ألف ريال ؟

4- ما هو الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول؟

الحـل

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

بفرض أن x متغير عشوائي يعبر عن الدخل السنوي بالألف ريال، وهو يتبع التوزيع الطبيعي، ومعالمه هي:

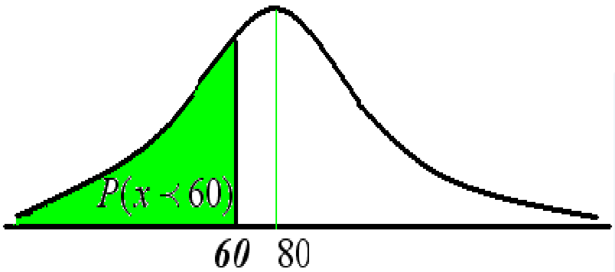
أ- المتوسط $E(x) = \mu = 80$ ب- التباين هو: $Var(x) = \sigma^2 = 900$

أي أن : $x \sim N(80,900)$

2- شكل دالة كثافة الاحتمال

$$f(x)=\frac{1}{30\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-80}{30}\right)^2} \;,\; -\infty<x<\infty \;,\; \pi=22/7$$

3- نسبة الأسر التي يقل دخلها عن60 ألف ريال هي: $P(x \prec 60)$



ويتبع الخطوات المذكورة سابقا في حساب الاحتمال كما يلي:

$$P(x<60)=p\left(z<\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(z<\frac{60-80}{30}\right)=P(z<-0.67)=F(-0.67)$$

وبالكشف مباشرة عن هذه القيمة في جدول التوزيع الطبيعي القياسي ، نجد أن

$$P(x<60)=P(z<-0.67)=0.2514$$

4- الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول: في هذه الحالة يبحث عن قيمة المتغير (x) الذي أقل منه 0.975 ، بفرض أن هذا المتغير هو (x_1) ، فإن :

$$P(x<x_1)=p\left(z<\frac{x_1-80}{30}\right)=0.975$$

بالكشف بطريقة عكسية ، حيث نبحث عن المساحة 0.9750 نجدها تقع عند تقاطع الصف 1.9 ، والعمود .06 أي أن قيمة $z=1.96$ ، ويكون :

$$1.96=\frac{x_1-80}{30} \;,\; Then \quad x_1=30(1.96)+80=138.8$$

إذا الدخل هو 138.8 ألف ريال في السنة.

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY