جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

مقدمة في نظرية الاحتمالات

الأهداف:

- تعريف الطالب بالتجارب فضاء العينة والحوادث .
- فهم التحليل المزجي .
- يتعرف على الاحتمال وتوافقه .
- التعرف على نظرية الاحتمالات الكلية وقانون .
- التعرف على المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة وخصائصها .
- التعرف على قوانين التوزيعات الاحتمالية وتطبيقاتها .

\المحتويات:

- مقدمة .
- الحوادث في الاحتمالات .
- تعريف الاحتمال .
- خواص الاحتمال .
- الاحتمالات المركبة .

1. القواعد الأساسية في الاحتمالات .
    1. جمع احتمالات لحوادث متنافية .
    2. جمع احتمالات لحوادث غير متنافية .
2. الاحتمال الشرطي .
3. قواعد ضرب الاحتمالات .
4. الاحتمال الكلي ونظرية بييز .

- تدريبات .

الاحتمالات

مقدمة:

ظهرت نظرية الاحتمالات في القرن السادس عشر والسابع عشر في القارة الأوروبية، وقد كان أول من درس هذه النظرية وأوجد بعض قوانينها العالم الرياضي باسكال، وبعده العالم فرمان وجاء العالم جاوس حيث اكتشفوا بعضاً من قواعد هذه النظرية ثم جاء العالم برنولي الذي أثبت نظرية سميث فيما بعد على يد العالم بواسون بقانون الأعداد الكبيرة، ومن ثم تطورت هذه النظرية إلى أن أصبحت علماً له أسسه وقواعده وقوانينه الخاصة وشكلت أساساً العلم الإحصاء وفرعاً من الرياضيات الحديثة ولكثير من العلوم الأخرى .

نظرية الاحتمالات : عبارة عن عدد يعبر عن إمكانية تحقيق حادث ما أو عدم تحقيقه فهو إذاً عدد حقيقي يعبر عن إمكانية تحقق الحدث بمعنى هو قيمة رقمية لتوقعات حدوث حدث ما وهذه القيمة في أغلب الأحيان عبارة عن نسبة حدوث هذا الحدث أو الفصل إذا تكرر نفس الموقف تحت نفس الظروف لعدد كبير من المرات وتنحصر قيمة الاحتمال بالمجال $0 \le p_r \le 1$.

المبادئ الأساسية لفهم وقياس الاحتمال :

a- فراغ العينة :

هو مجموع النتائج التي نحصل عليها من تجربة معينة فمثلاً عند اختيارنا الورقة واحدة من أوراق اللعب المكونة من /52/ ورقة فإن عدد عدد المحاولات التي يتم فيها اختيار هذه الورقة يساوي /52/ محاولة أي أن فراغ العينة في هذه الحالة /52/ .

b- التجربة العشوائية :

هي كل تجربة لم تكن نتيجتها النهائية معروفة مسبقاً بشكل مؤكداً بمعنى كل تجربة يمكن معرفة نتائجها الممكنة بشكل مسبق ولكن لا يمكن التنبؤ بإحدى هذه النتائج قبل إجراء بشكل مؤكد مثال ذلك .

- عند رمي قطعة نقود متزنة فإن النتيجة لابد أن تكون صورة أو كتابة ولكن لا يمكن الجزم بأن ما سيظهر الصورة أم الكتابة .
- عند رمي حجر فرد لابد وأن تكون النتيجة أحد الأوجه الستة [1,2,3,4,5,6] ولكن لا يمكن الجزم بظهور وجه معين من الأوجه الستة بصورة مؤكدة .

c- الحالات الممكنة .

هي الحالات أو النتائج المختلفة التي يمكن أن تظهر نتيجة لإجراء التجربة ممثلاً عند رمي قطعة تعود تكون نتيجتها صورة أو كتابة فيقال أن عدد الحالات الممكنة.

d- الحالات الملائمة :

هي النتائج التي تؤدي إلى تحقق الحادث الذي هو موضوع الدراسة فإذا كان الحادث الحصول على عدد فردي في حالة رمي حجر نرو فإن الحالات التي تحقق هذا الحادث هي الحصول على /1 أو 3 أو 5/ فتسمى هذه الأوجه بالحالات الملائمة أو المواتية .

وبناءً عليه فالاحتمال هو التعريف المبني على فكرة التكرار النسبي عند تكرار تجربة ما /n/ وكان n(A) هو عدد المرات التي تحقق فيها الحادث /A/ من /n/ مرة لكان التكرار النسبي للحادث هو :

$$p(A)=\lim_{x\to\infty}\frac{n(A)}{N}$$

مثال :

احتمال ولادة ذكر في مجتمع ما خلال عام وليكن عدد المواليد n= 20000 مولود وكان عدد المواليد الذكور m= 10500 ذكر فاحتمال ولادة ذكر يساوي :

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{10500}{20000}=0.52$$

e- الحالات المتماثلة :

إذا كان لدينا عدة كرات متجانسة في الكثافة ولها نفس الوزن والحجم ووضعناها في كيس وسحبنا كرة واحدة فإن هذه الكرات تكون حالات متماثلة أي يكون لكل منها نفس الاحتمال في السحب أي متكافئة الظهور عند السحب .

f- الحادث البسيط :

هو الحادث غير القابل للتجزئة أي هو الحادث الذي يتألف من مشاهدة واحدة فقط مثال : عند رمي حجر نرو فالإمكانيات الممكنة لهذه التجربة هي : n=[1,2,3,4,5,6] .

g- الحوادث المركبة :

هي الحوادث التي يمكن تفكيكها إلى حوادث أبسط مثال الحصول على رقم فردي عند رمي حجر النرو حيث أن هذا الحادث مركباً من ثلاثة أرقام هي: (1,2,3) .

h- الحادث المستحيل :

هو الحادث الذي يستحيل وقوعه ويرمز له بـ ϕ

مثال : إذا كان الحادث (A) حادث يعبر عن مجموع الأرقام على الوجهين العلويين عند رمي حجر النرو فإن حصولنا على العدد /13/ حادث مستحيل لأنه أكبر من مجموع أعداد أي وجهين $p(A)=(A\cup\phi)$. $p(\phi)=0$

i- الحوادث الأكيدة :

الحادث الأكيد هو الحادث الذي يساوي فضاء العينة نفسه

مثال : حصولنا على أحد الأرقام الستة عند رمي حجر النرو .

j- الحوادث المستقلة :

يعتبر الحادثين B, A حادثين مستقلين إذا كان وقوع إحداهما لا يؤثر في وقوع الحادث الآخر أو عدم حدوث الآخر .

مثال : عند إلقاء قطعة تعود فإن ظهور الصورة حادث مستقل عن ظهور الكتابة أو عند رمي حجر نرو حوادث مستقلة عن بعضها البعض لأن الحصول على أي رقم حادث مستقل عن الحصول على الأرقام الأخرى .

k- الحوادث المتنافية :

نقول على حادثين إنهما متنافيان إذا كان وقوع إحداهما ينفي وقوع الآخر

مثال: إلقاء قطعة نقود فإن الحصول على الصورة فيفي الحصول على الكتابة وبالتالي فإن تقاطع حادثين متنافيين حادث مستحيل $A \cap B = \phi$ والحوادث المتنافية هي حوادث مستقلة .

l- الحوادث المتقاطعة :

نقول عن حادثين B, A أنهما متقاطعان إذا كان هناك إمكانية تحقق الحادث A والحادث B في آن واحد أي $A \cap B$.

m- اجتماع حادثين :

نقول عن اجتماع حادثين B, A أنه حادث آخر C يتحقق إذا تحقق الحادث A أو الحادث B أو A و B معاً ويعبر عن ذلك بـ $A \cup B$.

n- الحوادث المتممة :

عبارة عن الحادث الذي يتحقق إذا لم يتحقق الحادث الأصلي أي الحادث المتمم يرمز له بـ $\bar{A}$ يتحقق إذا لم يتحقق الحادث A أي : $\bar{A} = \Omega - A$

مثال : متمم الحادث A الممثل لحادث الحصول على عدد زوجي عند رمي حجر النرو هو الحادث $\bar{A}$ الممثل لحصولنا على عدد فردي وبالتالي فإن $A \cup B$ حادث أكيد .

ملاحظة : إن الحادثين B, A حادثان يستقلان إذا كان حدوث إحداهما لا تؤثر على حدوث الآخر. مثال : نتائج رمي حجر نرو ونشير هنا إلى أن الحوادث المتنافية هي بالضرورة مستقلة ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح بمعنى أن الحوادث غير المتنافية قد تكون في تجربة مستقلة عن بعضها البعض وفي تجربة أخرى غير مستقلة وهذا يتعلق بطبيعة عملية السحب ويمكن تميز حالتين من السحب .

الأولى : السحب مع الإعادة :

كيس فيه /25/ كرة سوداء و/10/ كرات بيضاء نقوم بسحب كرتين على التوالي يرمز بـ A لحادث يسحب كرة سوداء وبـ B لحادث السحب كرة بيضاء فلو سحبنا كرة في المرة الأولى ولنفترض أنها سوداء وأعيدت إلى الكيس وبالتالي فإن عدد المرات الممكنة لم يتغير وبالتالي فإن احتمال سحب الكرة الثانية لا يتأثر فالحادثان مستقلان .

الثانية : السحب بدون إعادة :

عندما نسحب الكرة الأولى ويسجل لونها ولم تعاد إلى الكيس نجد أن عدد الحالات مثلاً البيضاء تنقص بمقدار كرة واحدة في السحبة الثانية وفي مثل هذه الحالات نقول أن A هو حادث غير مستقل عن الحادث B وتسمى هذه الحوادث غير مستقلة أو حوادث شرطية .

تعريف الاحتمال :

الاحتمال هو نسبة عددية غير سالبة محصورة بين الصفر والواحد الصحيح حيث تدل القيمة صفر على حالة استحالة الحدوث والقيمة واحد على الحادث الأكيد الوقوع ويمكن حسابه بطريقتين هما:

1- الاحتمال النظري: هو عبارة عن نسبة عدد الحالات الملائمة إلى عدد الحالات الممكنة الحدوث ويعبر عنه بالعلاقة .

$$p(A)=\frac{n(A)}{N(s)}$$

ويصلح هذا التعريف فقط عندما تكون نتائج التجربة العشوائية متماثلة أو مكافئة الظهور .

مثال: كيس فيه /8/ كرات حمراء و/3/ كرات بيضاء ما هو احتمال سحب كرة بيضاء .

الحل: عدد الحالات الممكنة = /11/ وعدد الحالات الملائمة = /3/

احتمال سحب كرة بيضاء يساوي :

$$p(B)=\frac{nB}{Ns}=\frac{3}{11}$$

مثال: ماهو احتمال ظهور رقم زوجي عند رمي حجر النرد مرة واحدة .

الحل: S=(1,2,3,4,5,6) عدد الحالات الممكنة $n(s)=6$

نفرض أن A حادث ظهور رقم زوجي أي أن

$$A=[2,4,6]=n(A)=3$$

ومنه

$$p(A)=\frac{3}{6}=0.5$$

2- الاحتمال التجريبي : عند إجراء تجربة عشوائية مرات متتالية عددها /n/ مرة وكان عدد مرات ظهور حادثة ما فيها ولتكن A هو m فإن احتمال حدوث الحادثة A يعطى بالعلاقة :

$$p(A)=\lim_{x\to\infty}\frac{m}{n}$$

ويسمى المقدار $\left(\frac{m}{n}\right)$ بالتكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي .

مثال: سحبت ثلاث ورقات بطريقة عشوائية من ورق اللعب والبالغ /52/ ورقة ماهو احتمال الحصول على 1- ملك . 2- أس .

الحل: إن عدد الطرق الممكنة لاختيار ملك واحد هو: $C_4^1=\frac{4!}{1!(4-1)!}=4$

إن عدد الطرق الممكنة لاختيار /2/ أس هو: $C_4^2=\frac{4!}{2!2!}=6$

إذن عدد الطرق الممكنة لاختيار /1/ ملك و/2/ أسين هو:

$$m=C_4^1 * C_4^2=4*6=24$$

∴ عدد الطرق الممكنة لاختيار /3/ ورقات من بين العدد الكلي /52/ هو:

$$n=C_{52}^3 \qquad C_{52}^3=\frac{52!}{3!49!}=2200$$

ويمكن فإن احتمال الحصول على ملك واحد وأسين هو:

$$p(A)=\frac{m1}{n}=\frac{24}{2200}=0.0011$$

خواص الاحتمال :

1- إن قيمة احتمال لأي حادثة ولتكن (A) تقع ضمن المجال (0.1) أي $0\le p(A)\le 1$.

2- إن احتمال المجموعة الشاملة $p(s)$ يساوي الواحد أي أن $p(s)=1$.

3- إن احتمال المجموعة الخالية يساوي صفر أي أن $p(\phi)=0$.

4- إذا كان لدينا حادثين B, A وتنافين أي أن $A\cap B=\phi$ فإن احتمال حدوث A أو B هو : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.

5- إذا كان لدينا /n/ من الحوادث المتنافية ثنائياً هي $A_1,A_2,......,A_n$ أي أن حدوث A_1 أو A_2 هو: $p(A_1\cup A_2)=p(A_1)+p(A_2)$.

6- إذا كان لدينا /n/ من الحوادث المتنافية ثنائياً هي : $A_1,A_2,......,A_n$ أي أن $A_1\cap A_2=\phi$ لكل قيم $i\ne j$ فإن

$$p(A_1\cup A_2\cup,.....,\cup A_n)=p(A_1)+p(A_2)+....+p(A_n)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)$$

7- إذا كان لدينا عدد لا نهائي من الحوادث المتنافية ثنائياً $A_1,A_2,....,A_n$ أي أن $A!\cap A!=\phi$ لكل قيم $i=j$ فإن :

$$p(A_1\cup A_2\cup A_3....)=p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)+...=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)$$

8- إذا كان A حادث ما وكان $\bar{A}$ متمم الحادث A فإن :

$$(A\cup\bar{A})=\Omega=s$$

$$p(A\cup\bar{A})=p(s)=p(\Omega)$$

$$p(A)+p(\bar{A})=1$$

$$p(A)=1-p(\bar{A})$$

$$p(\bar{A})=1-(A)$$

مثال : إذا كان احتمال وصول طالب إلى المحاضرة في الوقت المحدد 0.7 فما احتمال وصول الطالب متأخراً ؟

$$p(\bar{A}) = 1 - 0.7 = 0.3$$

نظرية : إذا كان B, A أي حادثتين في فضاء العينة Ω فإن :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

مثال: شب حريق في إحدى العمارات واتصل الحارس بمركزين للإطفاء فإذا كان احتمال وصول الإطفائية الأولى خلال دقيقتين يساوي 0.9

واحتمال وصول الاطفائية الثانية خلال دقيقتين يساوي 0.8

واحتمال وصول الاثنين معاً إلى المكان خلال دقيقتين يساوي 0.72

فما هو احتمال وصول الاطفائية الأولى والثانية خلال دقيقتين ؟

الحل :

A وصول الاطفائية الأولى .

B وصول الاطفائية الثانية .

$A \cap B$ وصول الاطفائيتين معاً خلال دقيقتين .

وبالتالي فإن احتمال وصول الاطفائية الأولى أو الثانية خلال دقيقتين هو احتمال اتحاد الحادثين B, A وبالتالي :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$= 0.90 + 0.80 - 0.72 = 0.98$$

الاحتمالات المركبة :

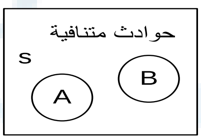
القواعد الأساسية في الاحتمالات :

- **قواعد جمع الاحتمالات (حوادث متنافية) :**

إذا كانت لدينا الحوادث A و B حوادث متنافية أي لا يمكن أن تتحقق معاً بمعنى أن تقاطعهما مستحيل أي أن : $A \cap B = \phi$

بمعنى آخر الحوادث المتنافية إن حدوث أحدهما يؤدي إلى استمالة حدوث الآخر أو أي من الحوادث الأخرى فإن :

احتمال وقوع أي حادث من الحوادث المتنافية يساوي مجموع احتمالات وقوع هذه الحوادث



وبالتالي فإن احتمال اجتماع حادثتين متنافيتين A و B يساوي إلى مجموع احتماليهما أي:

$$\boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)}$$

بمعنى : لنفترض قمنا بإجراء /n/ تجربة فكان عدد المرات التي تحقق فيها A هو K وعدد المرات التي تحقق فيها B هو l فعندما يكون لدينا حسب تعريف الاحتمال :

$$p(A)=\frac{k}{n} \quad ; \quad p(B)=\frac{\ell}{n}$$

وبما أن الحادثتين متنافيتين لا يمكن أن يتحققا معاً نرمز بـ C إلى حادث $(A\cup B)$ والذي يتحقق إذا تحقق A أو B أو B, A معاً فعندما يكون عدد المرات التي يتحقق فيها C خلال التجربة k+l أي :

$$p(c)=\frac{k+\ell}{n}=\frac{k}{n}+\frac{\ell}{n}$$

ومنها نستنتج أن : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

نظرية :

إن احتمال تحقق اجتماع /n/ حادثاً متنافياً يساوي احتمالات تلك الحوادث أي :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)$$

نتيجة :

إذا كانت الحوادث $A_1,A_2,A_3,....,A_n$ متنافية وتشكل مجموع كلية شاملة من الحوادث فإن مجموع احتمالاتها يساوي الواحد أي أن :

$$\sum_{i=1}^{n}p(A_i)=1$$

البرهان : بما أن $A_1,A_2,A_3,....,A_n$ تشكل مجموعة كلية إذن :

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4....\cup A_n=\Omega$$

$$p(\Omega)=1$$

$$p\left(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4....\cup A_n\right)=1$$

وبما أن الحوادث متنافية إذن :

$$\left(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\right)=p\left(A_1\right)+p\left(A_2\right)+p\left(A_3\right)+...+p\left(A_n\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}p(A)=1$$

نتيجة 2 :

بما أن الحادث A ومتممة $\bar{A}$ حادثان متنافيان ويشكلان مجموع كلية إذن يكون لدينا:

$$p(A)+p(\bar{A})=1$$

مثال: نفترض لدينا صندوق يحوي 200 كرة منها 70 كرة حمراء (R) و80 كرة بيضاء (W) و50 كرة سوداء (B) .

سحبنا كرة بشكل عشوائي المطلوب حساب احتمال أن تكون الكرة :

1- حمراء أو بيضاء .

2- حمراء أو سوداء .

الحل:

نرمز بـ R إلى حادث الكرة الحمراء واحتمال حدوثها = $\frac{70}{200}$

نرمز بـ W إلى حادث الكرة بيضاء = $\frac{80}{200}$

نرمز بـ B إلى حادث الكرة سوداء = $\frac{50}{200}$

وبالتالي فإن الحوادث B, W, R حوادث متنافية لأن تحقق أياً من الحوادث يلغي تحقق الحوادث الأخرى .

1- إن الحادث يتحقق إذا كانت الكرة حمراء أو بيضاء وبالتالي :

$$p(R \cup W) = p(R) + p(W)$$

$$= \frac{70}{200} + \frac{80}{200} = \frac{150}{200}$$

2- إن الحادث الثاني يتحقق إذا كانت الكرة حمراء أو سوداء أي :

$$p(R \cup B) = p(R) + p(B)$$

$$= \frac{70}{200} + \frac{50}{200} = \frac{120}{200}$$

مثال: يطلق أحد الرماة طلقة واحدة على هدف مؤلف من ثلاثة مناطق I II III

فإذا علمنا أن احتمال وقوع الإصابة في هذه المناطق هي:

I=0.15 II=0.23 III=0.12 على الترتيب فما هو احتمال عدم إصابة الهدف؟

الحل :

نرمز لحادث عدم إصابة الهدف بـ A وعندها يكون حادث الإصابة هو الحادث المتمم $\bar{A}$ ومن الواضح أن إصابة الهدف (الحادث $\bar{A}$) يمكن أن يتحقق بتحقق أحد الحوادث.

$\bar{A}_1 \leftarrow$ ضمن المنطقة I

$\bar{A}_2 \leftarrow$ ضمن المنطقة II

$\bar{A}_3 \leftarrow$ ضمن المنطقة III

أي : $\bar{A} = \bar{A} \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$

وبما أن الحوادث متنافية يكون :

$$p(\bar{A})=p(\bar{A}_1)+p(\bar{A}_2)+p(\bar{A}_3)$$
$$=0.15+0.23+0.17=0.55$$

وعندها يكون لدينا :

$$p(A)=1-p(\bar{A})$$
$$=1-0.55=0.45$$

مثال: مكتبة تتضمن :

%20 كتب إنكليزية E

%30 كتب عربية A

%25 كتب إسبانية S

%15 كتب فرنسية F

%90

أما نسبة الكتب الألمانية G= %10 =G=100-90

سحبنا كتاب

- احتمال أن يكون الكتاب باللغة الألمانية: $p(G)=10\%$ أي 0.10
- احتمال أن يكون باللغة E أو A : $p(A)=0.30$ $p(E)=0.20$
- احتمال أن يكون الكتاب باللغة الفرنسية: $p(F)=0.15$
- احتمال أن يكون الكتاب باللغة الإسبانية: $p(S)=0.25$

إن مجموع الحوادث :

$$p(E)+p(A)+p(S)+p(F)+p(G)=1$$

1- احتمال أن يكون الكتاب المسحوب باللغة الألمانية :

$$p(G)=1-[p(E)+p(A)+p(S)+p(F)]$$
$$=1-(0.20+0.30+0.25+0.15)]$$
$$=1-0.90=0.10$$

2- احتمال أن يكون الكتاب باللغة E أو A :

$$p(E\cup A)=p(E)+p(A)=0.20+0.30=0.50$$

3- احتمال أن يكون الكتاب G, F, E :

$$p\left(G\cup F\right)\cup E\right)=p\left(G\right)+p\left(F\right)+p\left(E\right)$$
$$=0.10+0.15+0.20=0.45$$

4- احتمال ألا يكون الكتاب باللغة E أو A :

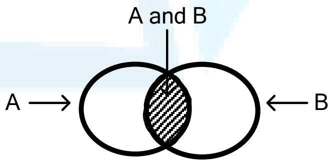
نرمز لحادث كون الكتاب باللغة الإنكليزية أو العربية بـ F والحادث المتمم $\bar{F}$

$$p\left(F\right)+p\left(\bar{F}\right)+=1$$
$$p\left(\bar{F}\right)=1-p\left(F\right)$$
$$=1-0.50=0.50$$

وهو احتمال ألا يكون الكتاب باللغة الإنكليزية أو العربية .

<u>حالة /2/ :</u>

أما إذا كان الحادثان B, A غير متنافية (مستقلة مشتركة) عند عدم اشتراط تنافي الحادثين B, A يكون المقصود بالحادث A أو B وقوع A على انفراد أو وقوع B على انفراد أو وقوع الحادثين B, A معاً . كما في الشكل التالي :



غير متنافية

الآن نقول أن $p\left(A\right)+p\left(B\right)$ تمثل مجموع الحالات الموافية للحادث A مضافاً إليها مجموع الحالات الموافية للحادث B مع الإشارة إلى البدائل من الحالات الموافية للحادث A أو للحادث B تتضمن الحالات الموافية لوقوع B, A معاً .

وفي هذه الحالة فإن جمع $p\left(A\right)$ و $p\left(B\right)$ فإننا نجمع $p\left(A,B\right)$ مرتين لهذا لابد من طرح $p\left(A,B\right)$ مرة واحدة لنحصل على الاحتمال $p\left(A\ \ B\right)$ أي :

$$p\left(AB\right)=\ (\ \ )+\ (\ \ )-ApBpApB$$ أو

أي

$$p\left(A\cup B\right)=p\left(A\right)+p\left(B\right)-p\left(A\cap B\right)$$

<u>ملاحظة هامة :</u>

إن الصيغة السابقة تعتبر قانوناً عاماً صالحاً لجمع أنواع الحوادث وإذا كان لدينا n حادث مثلاً ثلاثة حوادث A, B, C

$$p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)$$
$$-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$$

أي إذا كان لدينا n حادث فيكون :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)-\sum_{i\langle j}^{n}p(A_i\cap A_j)+\sum_{i\langle j\langle k}^{n}p(A_i\cap A_j\cap A_k)$$
$$(-1)^{n-1}p(A_1\cap A_2\cap A_3.....\cap A_n)$$

مثال :

إذا كان A حادث اجتياز طالب لامتحان الإحصاء يساوي : $p(A)=0.80$ وكان B حادث اجتيازه لامتحان الرياضيات $p(B)=0.75$ فإن احتمال اجتياز الطالب لأحد الامتحانين على الأقل يساوي

$$p(A\cap B)=0.65$$
$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$
$$=0.80+0.75-0.65=0.90$$

مثال:

احتمال قبول طالب في جامعة دمشق $p(A)=0.60$

في جامعة تشرين $p(B)=0.30$

في جامعة حلب $p(C)=0.10$

أوجد احتمال حصول هذا الطالب على قبول واحد على الأقل .

$$p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)$$
$$-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$$
$$=0.60+0.30+0.10-(0.60*0.30)-(0.60*0.10)$$
$$-(0.30*0.10)+(0.60*0.30*0.10)$$
$$=0.60+0.30+0.10-0.18-0.06-0.03+0.018=0.712$$

مثال: إن علمت أن عدد طلاب قسم المحاسبة 250 طالباً تقدموا جميعاً لاختبار الرياضيات والمحاسبة/1/ وكانت نسبة النجاح في مقرر الرياضيات 0.70 ونسبة النجاح في إحدى المقررين على الأقل 0.88 واحتمال النجاح في المقررين معً 0.42 .

أوجد عدد الطلاب الراسبين في مقرر المحاسبة/1/ .

الحل :

نرمز لاحتمال نجاح الطلاب في الرياضيات بـ $p(A)$

ونرمز لاحتمال نجاح الطلاب في محاسبة/1/ بـ $p(B)$

فيكون :

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

$$0.88=0.70+p(B)-0.42$$

$$p(B)=0.88+0.42-0.70=0.60$$

وهي احتمال نجاح الطلاب في مقرر المحاسبة /1/ .

احتمال الرسوب في مقرر المحاسبة /1/ يساوي :

$$p(\hat{B})=1-p(B)=1-0.60=0.40$$

ومنه يكون عدد الطلاب يساوي : $n=0.40*250=100$ طالباً

الاحتمال الشرطي :

إذا كان B,A حادثين في فراغ العينة S لتجربة عشوائية ما، فإن احتمال وقوع الحادث A هو $p(A)$ ويسمى الاحتمال غير المشروط للحادثة A أما إذا كان لدينا معلومات إضافية عن وقوع الحادث B فإن معرفة هذه المعلومة سيؤثر على احتمال وقوع الحادث A وفي كثير من الحالات نحتاج إلى إيجاد احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B ويسمى هذا بالاحتمال الشرطي ويرمز له بـ $p(A/B)$ أي احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B .

<u>تعريف</u> : إذا كانت B, A حادثين في فراغ العينة وكانت $p(B\rangle 0)$ فإن

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

في حالة $p(B)=0$ لا يوجد معنى للاحتمال المشروط وذلك لأنه في هذه الحالة تكون B حادث مستحيل وهذا يتعارض مع حساب احتمال A بشرط وقوع B .

من التعريف السابق نجد أن :

$$p(A\cap B)=p(B)*p(A/B)$$

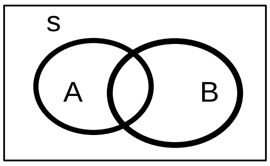
كما يمكن أن يكون $p(A\cap B)=p(A)*p(B/A)$

وهذا يتوقف على أي الحادثين يقع أولاً وتسمى هذه القاعدة بقاعدة الضرب ويمكن تعميمها لأكثر من حادث فإذا كانت لدينا $A_1,A_2,A_3,....,A_n$ في فراغ العينة فإن :

$$p(A_1\cap A_2\cap A_3)=p(A_1)*p(A_2/A_1)*p(A_3/A_1A_2)$$

$$p(A_1\cap A_2...\cap A_n)=p(A_1)*p(A_2/A_1).....p(A_n/A_1..A_2*A_{n-1})$$

ويمكن أن تتصور أن الاحتمال $p(A/B)$ يقيس الاحتمال النسبي للحادثة A بالنسبة للفراغ B كما هو واضح في الشكل التالي :



وذلك لأننا تشترط وقوع الحادث B أي أنه معلوم مسبقاً أن نتائج الحادثة B فقط هي التي سوف تحدث عند إجراء التجربة أما بقية النتائج في S وليست في B فإنها لن تقع لذلك فإننا نتوقع عند حدوث A أن النتائج التي تكون في A وتكون في نفس الوقت في B سوف تقع أي أن نتائج $A \cap B$ هي التي سوف تحدث وذلك كما رأينا أن :

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

إذا S فراغاً محدوداً متساوي الاحتمال فإن

$$p(A/B) = \frac{\text{عدد العناصر في } (A\cap B)}{\text{عدد عناصر في } B}$$

$$= \frac{\text{عدد الطرق التي يمكن أن تظهر بها A وB معاً}}{\text{عدد الطرق التي يمكن أن تظهر بها B}}$$

مثال :

إذا كان احتمال نجاح أحمد في الامتحان هو $\frac{1}{2}$ واحتمال نجاح وليد وأحمد هو $\frac{1}{3}$

أوجد احتمال نجاح وليد إذا علم بأن أحمد قد نجح .

الحل:

نفرض أن الحادثين B, A تمثلان :

A = { نجاح أحمد } $\Leftarrow \; p(A)=\frac{1}{2}$

B = { نجاح وليد }

ومنه : $p(A\cap B)=$ { نجاح أحمد ووليد } $= p(A\cap B)=\frac{1}{3}$

وعليه يكون احتمال نجاح وليد إذا علم نجاح أحمد يساوي :

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}=0.67$$

ملاحظة : $\boxed{p(A\cap B)=p(B\cap A)}$

- **قواعد ضرب الاحتمالات :**

نظرية: إذا كانت الحادثان B, A حادثين مستقلين فإن احتمال تقاطعهما يساوي إلى جداء احتمالهما أي :

$$p(A\cap B)=p(A)*p(B)$$

وإذا كان لدينا n حادث نجد أن احتمال حدوث حادثين مستقلين أو أكثر معاً يساوي حاصل ضرب احتمال حدوث كل واحد من هذه الحوادث بعضها ببعض .

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=p(A_i)*p(A_2)*p(A_3)....p(A_n)$$

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}p(A_i)$$

مثال :

صندوق يحتوي على /8/ كرات حمراء- 3/ كرات حمراء- /1/ سوداء حيث يوجد

8 كرات حمراء $\longleftarrow$ A $\longleftarrow p(A)=\dfrac{8}{12}$

3 كرات بيضاء $\longleftarrow$ B $\longleftarrow p(B)=\dfrac{3}{12}$

1 واحدة حمراء $\longleftarrow$ C $\longleftarrow p(C)=\dfrac{1}{12}$

سحبنا كرتين مع الإعادة

فما هو احتمال أن نحصل على كرة حمراء وأخرى بيضاء؟

كرة بيضاء وأخرى سوداء؟

1- احتمال سحب كرة حمراء وأخرى بيضاء $\quad p(A\cap B)=\dfrac{8}{12}*\dfrac{3}{12}$

2- احتمال سحب بيضاء = سوداء $\quad p(B\cap C)=\dfrac{3}{12}*\dfrac{1}{12}$

3- احتمال سحب كرتين من النوع A $\quad p(A\cap A)=\dfrac{8}{12}*\dfrac{8}{12}$

4- احتمال سحب كرة بيضاء أو حمراء أو سوداء

$$p(A\cap B\cap C)=\frac{8}{12}*\frac{3}{12}*\frac{1}{12}$$

أما إذا كان الحادثان غير مستقلان فإن حساب احتمال تقاطعهما يعتمد على مفهوم الاحتمال الشرطي حيث تستخدم نظرية الاحتمالات الرمز $p(A/B)$ او يقرأ احتمال تحقق الحادث A بشرط تحقق الحادث B بشروط مسبقة أو الاحتمال الشرطي للحادث (A) بالنسبة إلى الحادث B

فإن

$$p(A\cap B)=p(A)*p(B/A)\qquad p(A)\neq 0$$

$$p(B\cap A)=p(B)*p(A/B)\qquad p(B)\neq 0$$

وهذا ما يسمى بالضرب التبادلي .

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=p(A_1)*p(A_2/A_1)*p(A_3/A_i)$$

بمعنى الاحتمال الشرطي

إذا كان لدينا الحادثين B, A وكان $p(B)$ لا يساوي الصفر فإن الاحتمال الشرطي للحادث A بشرط وقوع الحادث B يعطى بالعلاقة :

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}\qquad p(B)\rangle 0$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث A بشرط وقوع الحادث B يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ B, A على احتمال الحادث B .

نعود إلى معطيات المثال السابقة .

1- اوجد احتمال حصولنا على كرة بيضاء في السحبة الأولى وكرة حمراء في السحبة الثانية (علماً بأن السحب بدون إعادة) .

$$p(A\cap B)=p(B)*p(A/B)=\frac{3}{12}*\frac{8}{11}$$

2- احتمال حصولنا على كرة حمراء في السحبة الأولى وكرة سوداء في السحبة الثانية .

$$p(A\cap C)=p(A)*p(C/A)=\frac{8}{12}*\frac{1}{11}$$

مثال :

نفترض أننا أطلقنا ثلاثة طلقات على هدف واحد وكان احتمل إصابة الهدف لكل من الطلقات هو :

$$p_1=0.4\qquad p_2=0.5\qquad p_3=0.7$$

المطلوب:

1- احسب احتمال إصابة الهدف بطلقة واحدة فقط .
2- احسب احتمال إصابة الهدف بطلقتين فقط .
3- احسب احتمال إصابة الهدف بثلاث طلقات فقط .
4- احسب احتمال إصابة الهدف بطلقة واحدة على الأقل .

الحل :

نرمز إلى حادث إصابة الهدف بـ A ومن الواضح أن هذا الحادث A يمكن أن يتحقق بعدة طريق (حالات ملائمة) أو حوادث مركبة متنافية .

- تحقق الإصابة من خلال الطلقة الأولى وعدم تحققها بالثانية والثالثة .

- تحقق الإصابة من خلال الطلقة الثانية وتحققها الأولى والثالثة .
- تحقق الإصابة من خلال الطلقة الثالثة وتحققها الأولى والثانية .

1- نرمز A_1 , A_2 , A_3 إلى حوادث إصابة الهدف وبالطلقة الأولى والثانية والثالثة

وبـ $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ إلى حوادث المتممة للحوادث السابقة .

أما الحوادث المركبة هي :

$$A \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$
$$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$$
$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$$

وهي تمثل حالات الإصابة بطلقة واحدة فقط وعندها يكون :

$$p(A) = p(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) + p(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$$
$$= p(A_1) * p(\bar{A}_2) p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1) * p(A_2) p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1) * p(\bar{A}_2) p(A_3)$$
$$= (0.4)(0.5)(0.3) + (0.6)(0.5)(0.3) + (0.6)(0.5)(0.7) = 0.36$$

2- نرمز لحادث إصابة الهدف بطلقتين بـ B :

$$p(B) = p(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A} \cap A_2 \cap A_3)$$
$$= (0.4)(0.5)(0.3) + (0.4)(0.5)(0.7) + (0.6)(0.5)(0.7) = 0.41$$

3- احتمال إصابة الهدف بثلاث طلقات :

$$C = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = p(A) * p(A_2) p(A_3)$$
$$= (0.4)(0.5)(0.7) = 0.14$$

4- احتمال إصابة الهدف بطلقة واحدة على الأقل D :

$$D = A \cup B \cup C$$
$$p(D) = p(A) + p(B) + p(C) = 0.36 + 0.41 + 0.14$$
$$p(D) = 0.91$$

يمكننا حساب احتمال الحادث D بطريقة أخرى .

$$\bar{D} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = (0.6)(0.5)(0.3) = 0.09$$
$$p(D) = 1 - p(\bar{D}) = 1 - 0.09 = 0.91$$

مثال:

إذا كان احتمال حضور مدير شركة ما، في يوم ما، يساوي /0.9/ واحتمال حضور مساعده في ذلك اليوم /0.95/ واحتمال حضور واحد منهما على الأقل /0.97/

أوجد احتمال :

1- حضور المدير ومساعده .
2- حضور المدير وحده .
3- حضور مساعده وحده .

الحل : نرمز لحضور المدير بـ A

نرمز لحضور المساعد بـ B

نرمز لحضور المدير ومساعده $A \cap B$

أ- حادث حضور واحد منهما على الأقل يعبر عنه بالحالات $A \cup B$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$0.97 = 0.90 + 0.95 - p(A \cap B)$$
$$0.97 = 1.85 - p(A \cap B)$$
$$p(A \cap B) = 1.85 - 0.97 = 0.88$$

ب- حضور المدير وحده :

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$$
$$= p(A) - p(A \cap B) = 0.90 - 0.88 = 0.02$$

ج- احتمال حضور مساعده وحده :

$$p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) = 0.95 - 0.88 = 0.07$$

مثال:

إذا كانت لدينا حادثتان B, A فيقال بأن الحادثتين مستقلتان إذا تحققت واحد فقط من الآتي :

$$-p(A / B) = p(A)$$
$$-p(B / A) = p(B)$$
$$-p(A \cap B) = p(A) * p(B)$$

أثبت أن :

$$p(A \cap B) = p(B \cap A) = p(A / B) - p(B) = p(B / A) * p(A)$$

الحل :

$$\therefore A \cap B = B \cap A$$

$$\therefore p(A \cap B) = p(B \cap A) \qquad (1)$$

$$p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$p(A / B) * p(B) = p(A \cap B) \qquad (2)$$

$$p(B / A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

$$\therefore p(B / A) * p(A) = p(B \cap A) \qquad (3)$$

ومن العلاقات نجد أن :

$$p(A \cap B) = p(B \cap A) = p(A / B) * p(B) = p(B / A) * p(A)$$

مثال :

إذا كان نجاح وليد وامتحان الرياضيات $\left(\frac{1}{4}\right)$ واحتمال نجاح أحمد $\left(\frac{1}{2}\right)$ في نفس الامتحان واحتمال نجاح الاثنين معاً هو $\left(\frac{1}{6}\right)$.

أثبت هل أن نجاح وليد مستقلاً عن نجاح أحمد أم لا؟

الحل:

نفترض أن الحادثين (A), (B) يمثلان :

A = { نجاح وليد } $\Rightarrow p(A) = \frac{1}{4}$

B = { نجاح أحمد } $\Rightarrow p(B) = \frac{1}{2}$

$A \cap B$ = { نجاح الاثنين معاً } $\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$$\therefore p(A) * p(B) = \frac{1}{4} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

أي أن : $p(A \cap B) \neq p(A) * p(B) \frac{1}{6} \neq \frac{1}{8}$

ومنه نستنتج أن الحادثين غير مستقلين بمعنى أن نجاح وليد غير مستقل عن نجاح أحمد.

مثال:

ليكن لدينا الحادثان (A), (B) بحيث أن :

$$p(A) = 0.5$$

$$p(\bar{B}) = 0.6$$

$$p(A \cup B) = 0.8$$

أوجد ما يلي :

$1-p(B)$

$2-p(\bar{A}\cup\bar{B})$

$3-p(A/\bar{B})$

$4-p(B/A)$

الحل: يمكن إيجاد قيمة الاحتمالات السابقة كما يلي :

$$1-p(B)+p(\bar{B})=1$$

$$donc: p(B)=1-p(\bar{B})$$
$$=1-0.6=0.4$$

$$2-p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$
$$p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)$$
$$=0.5+0.4-0.8=0.1$$

$$donc: p(\bar{A}\cup\bar{B})=p(\overline{A\cap B})$$
$$=1-p(A\cap B)$$
$$=1-0.1=0.9$$

$$3-p(A/\bar{B})=\frac{p(A\cap\bar{B})}{p(\bar{B})}$$

$$donc: p(A\cap\bar{B})=p(A)-p(A\cap B)$$
$$=0.5-0.1=0.4$$

$$p(A/\bar{B})=\frac{p(A\cap\bar{B})}{p(\bar{B})}=\frac{0.4}{0.6}=0.67$$

$$4-p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{0.1}{0.5}=0.2$$

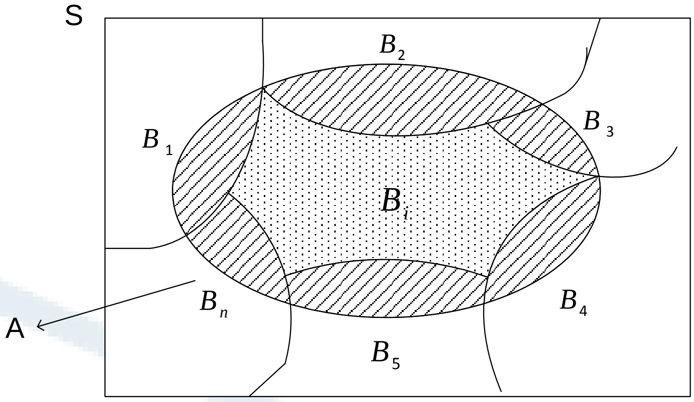
الاحتمال الكلي :

إذا كانت لدينا(n) حادثة متنافية وهي $[B_1,B_2,B_3,......B_n]$ ضمن قضاء العينة (S) بحيث أن $[p(B_i)\geq 0\ ,\ \forall_i\ ,\ i=1,2...n]$ فإن احتمال أي حادثة ولتكن (A) في المجموعة الشاملة (S) يكون :

$$p(A)=p(B_i)*p(A/B_i)+p(B_2)*p(A/B_2)+....+p(B_n)*p(A/B_n)$$

أو تكتب

$$\boxed{p(A)=\sum_{i=1}^{n}p(B_i)*p(A/B_i)}$$



شكل Venn

يتضح من شكل Venn بأن الحادثة (A) هي عبارة عن إيجاد تقاطعات الحوادث المتنافية $\left[B_1 \cap A, B_2 \cap A, \ldots, B_n \cap A\right]$ أي أن:

$$A = \left(B_1 \cap A\right) \cup \left(B_2 \cap A\right) \cup \left(B_3 \cap A\right) \cup \ldots . \cup \left(B_n \cap A\right)$$

وبأخذ الاحتمال للطرفين نجد أن:

$$\begin{aligned} p(A) &= p\left[\left(B_1 \cap A\right) \cup \left(B_2 \cap A\right) \cup \ldots . . \cup \left(B_n \cap A\right)\right] \\ &= p\left(B_1 \cap A\right) + p\left(B_2 \cap A\right) + \ldots . + p\left(B_n \cap A\right) \\ &= p\left(B_1\right) * p\left(A / B_1\right) + p\left(B_2\right) * p\left(A / B_2\right) + \ldots . + p\left(B_n\right) * p\left(A / B_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p\left(B_i\right) * p\left(A / B_i\right) \end{aligned}$$

$$p(A) \rangle 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots . , n$$

مثال:

مصنع به ثلاثة مكائن هي I, II, III تنتج على التوالي 0.35 ، 0.40 ، 0.25 من إنتاج المصنع الكلي، علماً أن نسبة المعيب من إنتاج المكائن الثلاث هي على الترتيب [6%، 3%، 8%] فإذا اختبرت وحدة واحدة من الإنتاج عشوائياً، فما هو احتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة؟

الحل:

- نفرض أن الحوادث A, B, C تمثل على التوالي:

A = { سحب وحدة من الماكنة الأولى I } $\Rightarrow p(A) = 0.35$

B = { سحب وحدة من الماكنة الثانية II } $\Rightarrow p(B) = 0.40$

C = { سحب وحدة من الماكنة الثالثة III } $\Rightarrow p(C) = 0.25$

وعليه فإن مجموع الاحتمالات أعلاه يساوي :

$$p(A)+p(B)+p(C)=1$$

- نفرض أن D تمثل سحب وحدة معيبة أي:

D = { سحب وحدة معينة } $\Rightarrow p(D)=?$

تمثل احتمال سحب وحدة معينة الماكنة (I) $p(D/A)=0.06$

احتمال سحب وحدة معينة من الماكنة (II) $p(D/B)=0.03$

احتمال سحب وحدة معينة من الماكنة (III) $p(D/C)=0.08$

ويحسب نظرية الاحتمال الكلي فإن احتمال الحصول على وحدة معينة يساوي:

$$p(D)=p(A)*p(D/A)+p(B)*p(D/B)+p(C)*p(D/C)$$

$$p(D)=0.35*0.06+0.40*0.03+0.25*0.08=0.053$$

نظرية بييز: Thearie de Bayes:

إذا كان لدينا (n) حادثة متنافية هي $[A_1,A_2,A_3,....,A_n]$ ضمن قضاء العينة (S) بحيث أن:

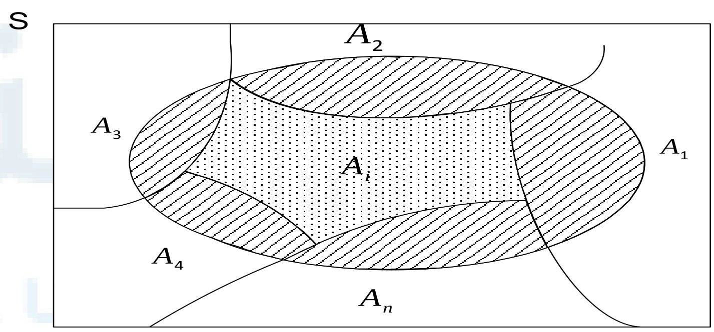
$$[A_i \cap A_i=\phi,\forall_i \neq j, ij=1,2,...,n]$$

وأن $[S=A_n \cup ...A_3 \cup A_2 \cup A_1]$

وإذا كانت الحادثة (B) معرفة على نفس قضاء العينة S وإن جميع الاحتمالات الشرطية معلومة $[p(B/A_i), j=1,2,...,n]$ فإن:

$$p(A_i/B)=\frac{p(B/A_i)*p(A_j)}{\sum_{i=1}^{n}p(B/A_i)*p(A_i)}$$

وتسمى بنظرية بييز نسبة إلى العالم توماس بييز 1763 .



شكل Venn

$$donc : p(A_i / B) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(B)} \qquad (1)$$

$$p(A_j / B) = \frac{p(B_j / A)}{p(B)} \qquad (2)$$

ويتضح من شكل venn بأن الحادثة (B) هي عبارة عن

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup .... \cup (A_n \cap B)$$

ويأخذ الاحتمال للطرفين نحصل على:

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + ... + p(A_n \cap B)$$
$$= p(B / A_1) * p(A_1) + p(B / A_2) * p(A_2) + ... + p(B / A_n) * p(A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p(B / A_i) * p(A_i) \qquad (3)$$

وبتعويض ناتج هذه العلاقة في العلاقة (2) ينتج:

$$p(A_i / B) = \frac{p(B / A_i) * p(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(B / A_i) * p(A_i)}$$

مثال: ثلاثة مصانع لإنتاج المصابيح الكهربائية I, II, III لأحد المحال التجارية فإذا كانت هذه المصانع التي يبيعها المخزن التجاري، وكان احتمال وإنتاج مصباح معيب من المصانع الثلاث هي على الترتيب [6% ، 3% ، 8%] فإذا اشترى شخص مصباح واحد من هذا المخزن أحسب احتمال أن يكون المصباح معيب ومن إنتاج المصنع الثاني.

الحل:

نفرض أن: $A_1 =$ المصباح من إنتاج المصنع I

$A_2 =$ المصباح من إنتاج المصنع II

$A_3 =$ المصباح من إنتاج المصنع III

B= المصباح تالف

ونعلم أن: $p(A_1) = 0.35$

$p(A_2) = 0.40$

$p(A_3) = 0.25$

وكذلك: $p(B / A_1) = 0.06$

$$p(B/A_2)=0.03$$
$$p(B/A_3)=0.08$$

حيث أن: $B=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup(A_3\cap B)$

$$p(B)=\sum_{i=1}^{3}p(A_i)*p(B/A_i)$$
$$=0.35*0.06+0.40*0.03+0.25*0.08=0.053$$
$$p(A_2/B)=\frac{p(B/A_2)*p(A_2)}{p(B)}$$
$$p(A_2/B)=\frac{0.60-0.03}{0.053}=\frac{12}{53}=0.23$$

مثال: الجدول الآتي يبين عدد الشركات التي تم الاستمارة فيها مصنفة حسب البلد والصناعة .

البلد	صناعات كيميائية	صناعة النقل	صناعة الآلات	المجموع
1	19	13	2	34
2	8	6	2	16
مجموع	27	19	4	50

المطلوب: أوجد احتمال الشركة المختارة والتي ستكون :

1- شركة الآلات من الدولة /2/ .
2- شركة النقل .
3- شركة الآلات بشرط المستثمر الدورة /2/ .
4- إما الدولة أو شركة صناعات الآلات .

الحل:

- نرمز إلى الدولة /1/ بـ A_1 والدولة /2/ بـ A_2
- صناعة كيميائية B_1 صناعة نقل بـ B_2
- صناعة آلات B_3

احتمال الشركة المختارة هي :

a- شركة الآلات من الدولة /2/ :

$$p(B_3\cap A_2)=p(A_2)*p(B_3/A_2)=\frac{16}{50}*\frac{2}{16}=\frac{2}{50}$$

b- شركة النقل:

$$p(B_2)=p(A_1\cap B_2)+p(A_2\cap B_2)$$
$$=p(A_1)p(B_2/A_1)+p(A_2)*p(B_2/A_2)$$
$$=\frac{34}{50}*\frac{13}{34}+\frac{16}{50}*\frac{6}{16}=\frac{13}{50}+\frac{6}{50}=\frac{19}{50}$$

c- شركة الآلات بشرط الدولة /2/ :

$$p(B_3/A_2)=\frac{p(B_3\cap A_2)}{p(A_2)}$$
$$=\frac{\frac{2}{50}}{\frac{16}{50}}*\frac{2}{50}*\frac{50}{16}=\frac{1}{8}=0.25$$

حيث أن:

$$p(A_2)=p(A_2\cap B_1)+p(A_2\cap B_2)+p(A_2\cap B_3)$$
$$=p(B_1)*p(A_2/B_1)+p(B_2)*p(A_2/B_2)+p(B_3)*p(A_2/B_3)$$
$$=\frac{27}{50}*\frac{8}{27}+\frac{19}{50}*\frac{6}{19}+\frac{4}{50}*\frac{2}{4}$$
$$=\frac{8}{50}+\frac{6}{50}+\frac{2}{50}=\frac{16}{50}$$

أما الدولة /1/ أو الشركة /3/

$$p(A_1\cup B_3)=p(A_1)+p(B_3)-p(A_1\cap B_3)$$
$$=p(A_1)+p(B_3)-p(B_3)*p(A_1/B_3)$$
$$=\frac{34}{50}+\frac{4}{50}-\frac{\cancel{4}}{50}*\frac{2}{\cancel{4}}$$
$$=\frac{34}{50}+\frac{4}{50}-\frac{2}{50}=\frac{36}{50}=0.72$$

تدريبات

1)- أجري امتحانات للإحصاء على /200/ طالب فنجح في الامتحان الأول /160/ طالب ونجح في الامتحان الثاني /140/ طالب ونجح في الامتحانين معاً /124/ طالب .

- أوجد احتمال نجاح الطلاب في الامتحان الأول والامتحان الثاني والامتحانين معاً.
- أوجد احتمال نجاح الطلاب الامتحان الأول أو الامتحان الثاني.

2)- إذا كان احتمال أن يتخرج طالب من برنامج التعليم المفتوح بتقدير ممتاز أو بتقدير جيد جداً يساوي 0.7 وإذا كان احتمال أن يتخرج بتقدير جيد جداً يساوي 0.5 . أوجد احتمال أن يتخرج الطالب بتقدير ممتاز؟

3)- إذا كان احتمال ارتفاع سعر الفائدة هو 0.8 وفي حالة الارتفاع سينتج عنها احتمال انخفاض الرقم القياسي لأسعار السوق بمقدار 0.9، وإذا لم ترتفع الفائدة فإن احتمال انخفاض الرقم القياسي لأسعار السوق بمقدار 0.4

أوجد احتمال انخفاض الرقم القياسي لأسعار السوق .

4)- صندوقان يحتوي الأول على /5/ كرات حمراء و/4/ كرات خضراء، أما الصندوق الثاني يحتوي على /7/ كرات حمراء و/3/ كرات خضراء. اختير أحد الصناديق عشوائياً وسحبنا منه كرة بطريقة عشوائية . المطلوب:

أ- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة خضراء.

ب- إذا تم سحب كرة وتبين أنها خضراء فما هو احتمال أن تكون هذه الكرة من الصندوق الأول؟

5)- لتكن لدينا الحادثتين (A) و(B) بحيث أن:

$$p(A \cup B) = 0.9 \quad , \quad p(\bar{B}) = 0.8 \quad , \quad p(A)0.4$$

أوجد الاحتمالات التالية:

$$4)p(B/A) \ , \ 3)p(A/\bar{B}) \ , \ 2)p(\bar{A} \cup \bar{B}) \ , \ 1)p(B)$$

6)- أثبت أن:

$$p(A \cap B) = p(B \cap A) = p(A/B) * p(B) = p(B/A) * p(A)$$

حل تدريبات

الحل /1/ : نفرض أن:

حادث نجاح الطلاب في الامتحان الأول بـ A

حادث نجاح الطلاب في الامتحان الثاني بـ B

- احتمال نجاح الطلاب في الامتحان الأول يساوي: $p(A)=\frac{160}{200}=0.8$

- احتمال نجاح الطلاب في الامتحان الثاني يساوي: $p(B)=\frac{140}{200}=0.7$

- احتمال نجاح الطلاب في الامتحانين معاً يساوي: $p(A\cap B)=\frac{124}{200}=0.62$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$
$$=0.8+0.7-0.62=0.88$$

أي أن احتمال نجاح الطلاب في الامتحان الأول أو الامتحان الثاني = 0.88 .

الحل /2/ : نفرض أن:

حادث أن يتخرج الطالب بتقدير ممتاز بـ A

حادث أن يتخرج الطالب بتقدير جيد جداً بـ B

وحيث أن الحاثين B, A منفصلين فإن:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$$
$$0.7=p(A)+0.5$$
$$p(A)=0.7-0.5=0.2$$

أي أن $p(A)=0.2$

الحل /3/ :

احتمال ارتفاع الفائدة $p(A)=0.8$

احتمال انخفاض الرقم القياسي لأسعار السوق $p(B)$

إن الاحتمال المتمم $\bar{A}$ هو عدم ارتفاع سعر الفائدة هو:

$$p(\bar{A})=1-0.8=0.2$$

وعلى افتراض أن الأحداث مستقلة فإن:

$$p(B/A)=0.9$$
$$p(B/\bar{A})=0.4$$

وبحسب قاعدة ضرب الاحتمالات فإن:

$$p(A\cap B)=p(A)*p(B/A)=(0.80)(0.9)=0.72$$
$$p(B\cap \bar{A})=p(\bar{A})*p(B/\bar{A})=(0.2)(0.4)=0.08$$

وعليه فإن:

$$p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap \bar{A})$$
$$=0.72+0.08=0.80$$

ومما سبق إذا كان B, A حادثين شاملين ومتنافيين فإن: $p(A)+p(B)=1$

وإذا كان B, A حادثين شاملين ومتنافيين ومتماثلين فإن: $p(A)+p(B)=\frac{1}{2}$

وإذا رمزنا لحادث عدم وقوع A بـ $\bar{A}$ فإن الحادثين A , $\bar{A}$ مكونان حادثين متنافيين وشاملين كأن يكون الشخص مدخن وغير مدخن .

الحل /4/ :

نفرض أن الحوادث B_2 , B_1 التالية تمثل ما يلي:

سحب الكرة من الصندوق الأول: B_1

سحب الكرة من الصندوق الثاني: B_2

$$\therefore p(B_1)=p(B_2)\frac{1}{2}$$

نفرض أن (G) تمثل الكرة المسحوبة بأنها خضراء G

يمثل احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق الأول: $p(G/B_1)=\frac{4}{9}$

يمثل احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق الثاني: $p(G/B_2)=\frac{3}{10}$

1- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة خضراء اللون، نستخدم نظرية الاحتمال الكلي أي أن:

$$p(G)=p(G/B_1)*p(G/B_1)+p(G/B_2)*p(G/B_2)$$
$$=\frac{4}{9}*\frac{1}{2}+\frac{3}{10}*\frac{1}{2}=0.37$$

2- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق الأول إذا كانت المسحوبة خضراء

$$p(B_1/G)=\frac{p(G/B_1)*p(B_1)}{p(G/B_1)*p(B_1)+p(G/B_2)*p(B_2)}$$

$$=\frac{0.22}{0.37}=0.59$$

الحل /5/ :

يمكن إيجاد قيمة الاحتمالات السابقة كالآتي:

$$1)\, p(B)+p(\bar{B})=1$$

$$p(B)=1-p(\bar{B})\Rightarrow 1-0.6=0.4$$

$$2)\, p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

$$p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)$$

$$=0.5+0.4-0.8=0.1$$

$$\therefore p(\bar{A}\cup\bar{B})=p\left(\overline{A\cap B}\right)=1-0.1=0.9$$

$$3)\, p(A/\bar{B})=\frac{p(A\cap\bar{B})}{p(\bar{B})},\, p(A\cap\bar{B})=p(A)-p(A\cap B)$$

$$=\frac{0.4}{0.6}\approx 0.67$$

$$4)\, p(B/A)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}=\frac{0.1}{0.5}=0.20$$

الحل /6/ :

$$\therefore\; A\cap B=B\cap A$$

$$p(A\cap B)=p(B\cap A)\qquad (1)$$

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

$$p(A/B)*p(B)p(A\cap B)\qquad (2)$$

$$p(B/A)*p(B\cap A)$$

$$\therefore p(B/A)*p(A)=p(B\cap A)\qquad (3)$$

من العلاقات الثلاث أعلاه نجد أن:

$$p(A\cap B)=p(B\cap A)=p(A/B)*p(B)+p(B/A)*p(A)$$

وهو المطلوب

الفقرات الرئيسية (نوع الخط Sakkal majalla وحجم الخط Bold 16)

نص المحاضرة (نوع الخط Sakkal majalla وحجم الخط 14)