

Calculus 2

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2023-2024

Outline

cal2:

- Indeterminate Forms and L'Hôpital's Rule
- Improper Integrals
- Infinite Sequences and Series
- Functions of Several Variables
- Partial Derivatives
- Multiple Integrals
- Complex number.

Calculus 2

Lecture 1

Review

Review-Derivative

المشتقات :

DEFINITION The **derivative** of the function $f(x)$ with respect to the variable x is the function f' whose value at x is

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

provided the limit exists.

Alternative Formula for the Derivative

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Review-Derivative

- إذا كانت الدالة $x \mapsto f(x)$ اشتقاقية عند x_0 فإن ميل المماس لمنحني الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $M_0(x_0, y_0)$ منه هو $f'(x_0)$. أمّا معادلة هذا المماس فهي:
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
- إن معادلة مستقيم ميله m و يمرّ من نقطة معلومة $M_0(x_0, y_0)$ هي:
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

الدالة العددية	قاعدة الاشتقاق	مجال الاشتقاق
$h + g$	$(h + g)' = h' + g'$	$I = I_1 \cap I_2$
$h \cdot g$	$(h \cdot g)' = h' \cdot g + h \cdot g'$	$I = I_1 \cap I_2$
$k \cdot g$	$(k \cdot g)' = k \cdot g'$	$I = I_2$
$\frac{h}{g}$	$\left(\frac{h}{g}\right)' = \frac{h' \cdot g - h \cdot g'}{g^2}$	$I \subseteq (I_1 \cap I_2) \setminus \{x : g(x) = 0\}$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Review-Derivative — The Chain Rule

قاعدة: إذا كانت الدالة g اشتقاقية على مجال مفتوح I و الدالة h اشتقاقية على كل مجال محتوي في $g(I)$ فإن الدالة $h \circ g$: $(h \circ g)(x) = h(g(x))$ اشتقاقية على المجال I و قاعدة اشتقاقها هي $(h \circ g)'(x) = h'(g(x))g'(x)$

Review-Derivative

إذا كانت الدالة g اشتقاقية على مجال مفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$ وكانت الدالة f من الشكل:
 $f(x) = (g(x))^r : r \in \mathbb{Q}$ اشتقاقية على $I_1 \subseteq I$ فإن:

$$f'(x) = r(g(x))^{r-1} \cdot g'(x)$$

الدالة المثلثية	الدالة المشتقة
$f(x) = \sin(g(x))$	$f'(x) = g'(x) \cdot \cos(g(x))$
$f(x) = \cos(g(x))$	$f'(x) = -g'(x) \cdot \sin(g(x))$
$f(x) = \tan(g(x))$	$f'(x) = g'(x) \cdot (1 + \tan^2(g(x)))$ $= \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$
$f(x) = \cot(g(x))$	$f'(x) = -g'(x) \cdot (1 + \cot^2(g(x)))$ $= \frac{-g'(x)}{\sin^2(g(x))}$

Review-Derivative

إذا كانت الدالة $g(x)$ اشتقاقية على مجال مفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$ وكانت الدالة f من الشكل :

$$f(x) = e^{g(x)} \text{ فإن مشتقها : } f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)} = g'(x) \cdot f(x)$$

إذا كانت الدالة $g(x)$ اشتقاقية على مجال مفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$, وكانت الدالة f من الشكل $f(x) = \ln(g(x))$. إن f اشتقاقية على كل مجال محتوي في المجال I يكون فيه $g(x) > 0$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

ومشتقها :

Exersice

أوجد المشتق لكل من التوابع الآتية

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad I =]0, +\infty[$$

$$f(x) = \ln^2(x^3 - 1) \quad I =]1, +\infty[$$

$$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x \quad I =]0, +\infty[$$

$$f(x) = \ln(e^{2x} + 1) \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad I =]1, +\infty[$$

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \quad I =]-1, +1[$$

$$f(x) = \frac{3\sin x - \cos x}{2 + \cos x} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = (x-1)e^x \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \quad]-1, +\infty[$$

$$f(x) = \sqrt{\sin x} + 2 \quad \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}} \quad] 0, \infty[$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}$$

Exersice

أوجد المشتق لكل من التوابع الآتية

$$. \quad I =]0, \infty[\quad \text{على} \quad f(x) = (x^3 + \sqrt{x} - 2)^3$$

$$. \quad I =]-\infty, 1[\quad \text{على} \quad f(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)^4}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\cos(2x) + 2} \quad : x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{3 \cos^2 x + 4} \quad : x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin(\sqrt{2 + x^2}) \quad : x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \tan(3x) \quad : x \in \left] 0, \frac{\pi}{6} \right[$$

$$f(x) = \sin(2x^2 + x - 4) \quad : x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{2(x^3 - 5x + 2)} \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{\cos \sqrt{2-x}} \quad I =]-\infty, 2[$$

$$f(x) = e^{e^x} \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{\frac{1-x}{x}} \quad I =]-\infty, 0[$$

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-2x} \quad I = \mathbb{R}$$

Review-Integer

التكامل غير المحدد

تعريف: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ فإن مجموعة الدوال الأصلية لها على I هي من

الشكل $F(x) + c$ وتُسمى التكامل غير المحدد للدالة f و نرمزها: $\int f(x) dx = F(x) + c$

نسمي $\int$ إشارة التكامل وأصلها الحرف S أول حرف من الكلمة Sum (مجموع)

f الدالة المكاملة

x متغير التكامل

F دالة أصلية للدالة f

c ثابت كيفي يُسمى ثابت التكامل

قواعد التكامل غير المحدد لبعض التكاملات المشهورة

$\int 0 \cdot dx = c$	c ثابت كافي
$\int m \cdot dx = mx + c$	$m \neq 0$ ثابت
$\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$n \neq -1$
$\int \cos(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$	$a \neq 0$ ثابت
$\int \sin(ax+b) \cdot dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$	$a \neq 0$ ثابت
$\int \sec^2(kx) \cdot dx = \frac{1}{k} \tan(kx) + c$	$k \neq 0$ ثابت
$\int \csc^2(kx) \cdot dx = -\frac{1}{k} \cot(kx) + c$	$k \neq 0$ ثابت
$\int e^{kx} \cdot dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$	$k \neq 0$ ثابت
$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \begin{cases} \ln(x) + c & : x > 0 \\ \ln(-x) + c & : x < 0 \end{cases} \quad : x \neq 0$	$k \neq 0$ ثابت
ويمكن ان نكتب	
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c : x \neq 0$	

11	$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot dx = \ln g(x) + c$	$g(x) \neq 0$
12	$\int g'(x) e^{g(x)} dx = e^{g(x)} + c$	

التكاملات الكسرية

بوجه عام: في الكسر البسيط $\frac{p(x)}{q(x)}$ إذا كانت عوامل المقام $q(x)$ من الدرجة الأولى وغير مكررة

$$q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n} \quad (*)$$

وعندها لحساب A_1 نضرب طرفي المساواة (*) بالمقدار $(x - a_1)$ ثم نأخذ النهايات في الناتج عندما تسعى x إلى a_1 فنحصل على A_1 . ونطبق الأسلوب نفسه لحساب بقية الثوابت

التكاملات الكسرية- مثال

$$f(x) = \frac{-x + 7}{x^2 + x - 2}$$

$$\text{احسب } \int f(x) dx \text{ على المجال } D =]1, +\infty[$$

$$\frac{-x + 7}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1} \quad (*)$$

ومنه يوجد عدنان A و B يحققان :

$$\frac{-x + 7}{x - 1} = A + \frac{B(x + 2)}{x - 1}$$

لتعيين A نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x + 2$ فيكون :

$$\text{ثم نجعل } x \text{ تسعى إلى } -2 \text{ فنجد } A = \frac{7 + 2}{-2 - 1} = -3$$

وكذلك لتعيين B نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x - 1$ فيكون :

$$\text{ونجعل } x \text{ تسعى إلى } 1 \text{ فنجد } B = \frac{7 - 1}{2 + 1} = 2$$

$$\frac{-x + 7}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{-3}{x + 2} + \frac{2}{x - 1}$$

ويمكن أن نتحقق أن :

$$\frac{-x + 7}{x^2 + x - 2} = \frac{-x + 7}{(x + 2)(x - 1)}$$

$$\frac{-x + 7}{x + 2} = \frac{A(x - 1)}{x + 2} + B$$

التكاملات الكسرية

$$\int f(x) dx = \int \frac{-3}{x+2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx \quad \text{ولأن } x-1 > 0 \text{ و } x+2 > 0 \text{ في المجال } D =]1, +\infty[\text{ فإن}$$

$$\int f(x) dx = -3 \ln(x+2) + 2 \ln(x-1) + c = \ln \frac{(x-1)^2}{(x+2)^3} + c$$

Exersice

$$\int \frac{x+3}{x^2-1} dx$$

أوجد التكامل: $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$

التكامل المحدد

تعريف التكامل المحدد :

لتكن f دالةً مستمرةً على المجال $[a, b]$ ولتكن $F(x)$ دالةً أصليةً لـ $f(x)$ على $[a, b]$
عندئذٍ نعرّف $\int_a^b f(x) dx$ بالعلاقة : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Integration by Parts Formula

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx \quad (1)$$

Integration by Parts Formula for Definite Integrals

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx \quad (3)$$

Exersice

$$\int \frac{2}{x-1} dx \quad ; x \in]1, +\infty[$$

$$\int \frac{3x+6}{x^2+5x+6} dx \quad ; x \in]-\infty, -3[$$

$$I_1 = \int_0^1 x e^x dx$$

$$I = \int_1^2 \sqrt[3]{1-x} dx$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 (\sin x + x^{10}) dx$$

Thank you for your attention