المحاضرة الرابعة: القيم الذاتية والأشعة الذاتية

تحليل رياضي 2

جامعة المنارة

2023-2024

4.1 Eigenvalues and Eigenvectors القيم الذاتية والأشعة الذاتية

4.2 Diagonalization التقطير

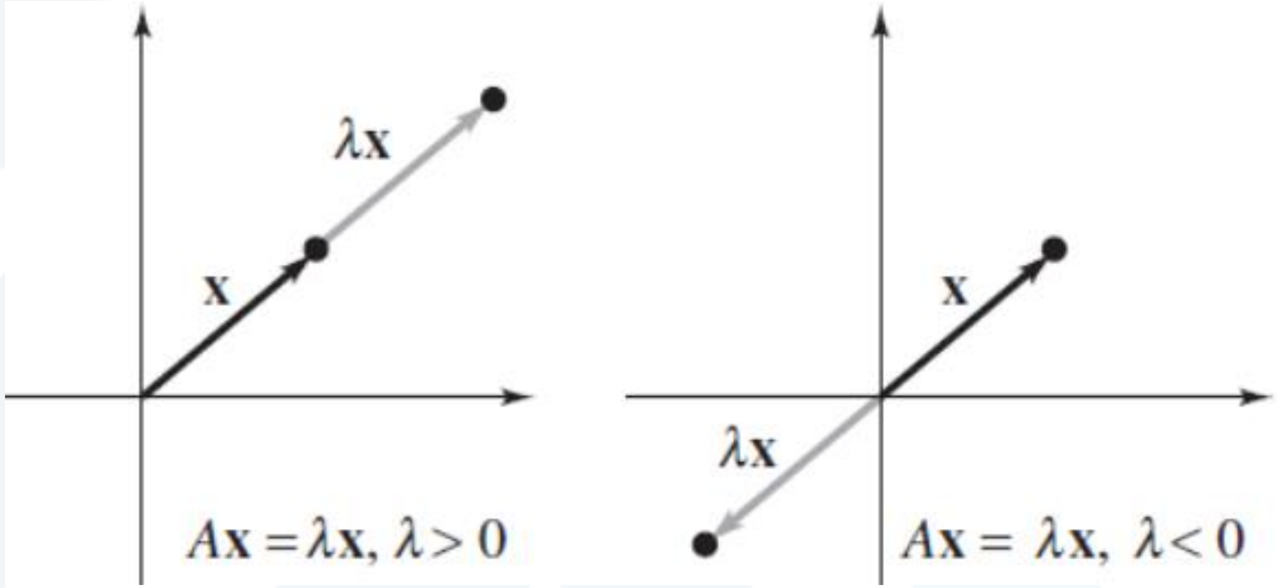
مقدمة في القيم الذاتية والأشعة الذاتية

- Eigenvalue and eigenvector:

A: مصفوفة مربعة

λ: عدد

$\boldsymbol{x}$: شعاع غير صفري $\in R^n$



قيمة ذاتية

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

شعاع ذاتي

- Ex : (تحقق فيما إذا كانت الأشعة التالية أشعة ذاتية للمصفوفة)

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad x_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad x_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

قيمة ذاتية

$$Ax_1=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=2x_1$$

شعاع ذاتي

قيمة ذاتية

$$Ax_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=(-1)x_2$$

شعاع ذاتي

- **Theorem: (Finding eigenvalues and eigenvectors of a matrix $A \in M_{n\times n}$)**

Let A is an $n\times n$ matrix.

$\det(\lambda I - A) = 0$ نوجد القيم الذاتية للمصفوفة بحل المعادلة

$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ الأشعة الذاتية هي الحلول غير الصفرية لجملة المعادلات الخطية

- Ex : (أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة التالية)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Sol:

لإيجاد القيم الذاتية نحل المعادلة:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 12 \\ -1 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1, -2$$

القيم الذاتية: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$$(1)\ \lambda_1 = -1 \Rightarrow (\lambda_1 I - A)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix},\quad t \neq 0$$

$$(2)\ \lambda_2 = -2 \Rightarrow (\lambda_2 I - A)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},\quad t \neq 0$$

تحقق: $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$

- Ex :

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة التالية

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sol:

نحل المعادلة

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3 = 0$$

القيم الذاتية: $\lambda = 2$

$\lambda = 2 \Rightarrow$ الأشعة الذاتية:

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{s}, t \neq 0$$

- Theorem : (القيم الذاتية للمصفوفة المثلثية)

If A is an $n \times n$ triangular matrix, القيم الذاتية للمصفوفة المثلثية هي عناصر القطر الرئيسي

- Ex 4: (أوجد القيم الذاتية)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Sol:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ -5 & -3 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 3)$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -3$$

Diagonalization التقطير

- **Diagonalization problem:** مسألة التقطير

إذا كانت A مصفوفة مربعة، هل بإمكاننا إيجاد مصفوفة P غير شاذة بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية

- **Diagonalizable matrix** المصفوفة القابلة للتقطير :

نقول عن المصفوفة A المربعة أنها قابلة للتقطير إذا وفقط إذا وجدت المصفوفة P غير الشاذة بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية

- **Notes:**

If there exists an invertible matrix P such that $B = P^{-1}AP$, then two square matrices A and B are called similar متشابهتين .

- Theorem:
If A and B are similar $n\times n$ matrices, then they have the same eigenvalues

إذا كانت المصفوفتان متشابهتان فهما تملكان نفس القيم الذاتية

- Ex تحقق فيما إذا كانت المصفوفة قابلة للتقطير

$$A=\begin{bmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

Sol: نحل المعادلة:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-3&0\\-3&\lambda-1&0\\0&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)^2=0$$

القيم الذاتية: $\lambda_1=4,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-2$

(1) $\lambda_1=4\Rightarrow$ الأشعة الذاتية: $p_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

$$(2)\ \lambda_2 = -2 \Rightarrow \text{الأشعة الذاتية:} \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- ملاحظات:

$$(1)\ P = \begin{bmatrix} p_2 & p_1 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(2)\ P = \begin{bmatrix} p_2 & p_3 & p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- **Theorem : (Condition for diagonalization)**

An $n\times n$ matrix A is diagonalizable if and only if it has n linearly independent eigenvectors.

نقول عن المصفوفة أنها قابلة للتقطير إذا وفقط إذا ملكت n شعاع ذاتي مستقل خطياً

- **Ex : (مصفوفة غير قابلة للتقطير)**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Sol: نحل المعادلة:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0$$ القيم الذاتية: $\lambda_1=1$

$$\lambda I - A = I - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ شعاع ذاتي: $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

المصفوفة تملك شعاعين ذاتيين مرتبطين خطياً وبالتالي المصفوفة غير قابلة للتقطير

- خطوات تقطير مصفوفة مربعة:

1. نوجد الأشعة الذاتية المستقلة خطياً $p_1, p_2, \ldots p_n$ الموافقة للقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$
2. نضع $P = [p_1 \mid p_2 \mid \cdots \mid p_n]$
3. $$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ where } Ap_i = \lambda_i p_i, \ \ i = 1,2,\ldots,n$$

- Ex : (تحقق فيا إذا كانت المصفوفة قابلة للتقطير)

Find a matrix P such that is $P^{-1}AP$ diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sol:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ 3 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$$

Eigenvalues: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$

$$(1)\ \lambda_1 = 2 \quad \Rightarrow \lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \text{Eigenvector: } p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2)\ \lambda_2 = -2 \quad \Rightarrow \lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/4)t \\ -(1/4)t \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{4} t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \text{Eigenvector: } p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(3)\ \lambda_2 = 3 \quad \Rightarrow \lambda_3 I - A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \text{Eigenvector: } p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Let } P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Notes: k is a positive integer

$$(1)\ D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \Rightarrow D^k=\begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

$$(2)\ D=P^{-1}AP \Rightarrow D^k=(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A^kP$$

$$\Rightarrow A^k=PD^kP^{-1}$$

- Theorem : (الشرط الكافي لتقطير مصفوفة)

If an $n \times n$ matrix A has n distinct eigenvalues, then the corresponding eigenvectors are linearly independent and A is diagonalizable. إذا ملكت المصفوفة قيمة ذاتية مختلفة عندئذ الأشعة الذاتية الموافقة مستقلة خطياً وتكون المصفوفة قابلة للتقطير.

- Ex : (Determining whether a matrix is diagonalizable)

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

Sol:

بما أن المصفوفة مثلثية تكون القيم الذاتية هي عناصر القطر الرئيسي

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=-3$$

لدينا ثلاث قيم ذاتية مختلفة وبالتالي المصفوفة قابلة للتقطير.