

المحاضرة الرابعة عملي: القيم الذاتية والأشعة الذاتية

تحليل رياضي 2

جامعة المنارة

2023-2024

تحقق في كل مما يلي أن λ_i قيمة ذاتية للمصفوفة A وأن $\mathbf{x}_i$ الشعاع الذاتي الموافق

① $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \mathbf{x}_1 = (1, 0)$
 $\lambda_2 = -2, \mathbf{x}_2 = (0, 1)$

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{x}_1$$

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_2 \mathbf{x}_2$$

② $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1, \mathbf{x}_1 = (1, 1)$
 $\lambda_2 = 2, \mathbf{x}_2 = (5, 2)$

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{x}_1$$

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \mathbf{x}_2$$

③ $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 5, \mathbf{x}_1 = (1, 2, -1) \\ \lambda_2 &= -3, \mathbf{x}_2 = (-2, 1, 0) \\ \lambda_3 &= -3, \mathbf{x}_3 = (3, 0, 1) \end{aligned}$

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{x}_1$$

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 \mathbf{x}_2$$

$$A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_3 \mathbf{x}_3$$

تحقق فيما إذا كان $\mathbf{x}$ شعاع ذاتي للمصفوفة A

① $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(a) $\mathbf{x} = (1, 2)$

(b) $\mathbf{x} = (2, 1)$

(c) $\mathbf{x} = (1, -2)$

(d) $\mathbf{x} = (-1, 0)$

(a) $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ليس شعاع ذاتي

(b) $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

شعاع ذاتي مع قيمة ذاتية 8

(c) $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

شعاع ذاتي مع قيمة ذاتية 3

(d) $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ليس شعاع ذاتي

② $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(a) $\mathbf{x} = (2, -4, 6)$
(b) $\mathbf{x} = (2, 0, 6)$
(c) $\mathbf{x} = (2, 2, 0)$
(d) $\mathbf{x} = (-1, 0, 1)$

$$(a) A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -16 \\ 24 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

شعاع ذاتي مع قيمة ذاتية 4

$$(b) A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -16 \\ 12 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

لا يمثل شعاع ذاتي

$$(c) A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}$ is an eigenvector of A (with a corresponding eigenvalue -2)

$$(d) A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}$ is an eigenvector of A (with a corresponding eigenvalue -2)

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة في كل من الحالات التالية:

① $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(a) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & 3 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda = \lambda(\lambda - 7) = 0$

(b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 7$

$$\lambda_1 = 0, \begin{bmatrix} \lambda_1 - 6 & 3 \\ 2 & \lambda_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(t, 2t): t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_1 = 0$ is $(1, 2)$

$$\lambda_1 = 7, \quad \begin{bmatrix} \lambda_2 - 6 & 3 \\ 2 & \lambda_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(-3t, t) : t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_2 = 7$ is $(-3, 1)$

$$\textcircled{2} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(a) \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$(b) \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1 = 2, \begin{bmatrix} \lambda_1 - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda_1 - 3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(t, 0, 0): t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_1 = 2$ is $(1, 0, 0)$

$$\lambda_2 = 3, \begin{bmatrix} \lambda_2 - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda_2 - 3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(0, t, 0): t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_2 = 3$ is $(0, 1, 0)$

$$\lambda_3 = 1, \begin{bmatrix} \lambda_3 - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda_3 - 3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$S = \{(-t, -2t, t) : t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_3 = 1$ is $(-1, -2, 1)$

③ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

$$(a) |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 & 2 \\ 6 & -6 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 3)^2 = 0$$

(b) $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3$ (repeated)

$$\lambda_1 = -3, \begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 & -2 & 2 \\ 2 & \lambda_1 - 5 & 2 \\ 6 & -6 & \lambda_1 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 2 & -8 & 2 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(t, t, 3t): t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_1 = -3$ is $(1, 1, 3)$

$$\lambda_2 = 3, \begin{bmatrix} \lambda_2 - 1 & -2 & 2 \\ 2 & \lambda_2 - 5 & 2 \\ 6 & -6 & \lambda_2 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(s - t, s, t): s, t \in R\}$. So, two eigenvectors corresponding to $\lambda_2 = 3$ are $(1, 1, 0)$ and $(1, 0, -1)$

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

- (a) أوجد القيم الذاتية للمصفوفة A
(b) أوجد الأشعة الذاتية للمصفوفة A
(c) تحقق فيما إذا كانت المصفوفة A قابلة للتقطير
(d) احسب A^7

$$(a) \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$$

$$(b) \quad \lambda_1 = -1, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 & -2 \\ -4 & \lambda_1 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$S = \{(t, -t) : t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_1 = -1$ is $(1, -1)$

$$\lambda_2 = 5, \quad \begin{bmatrix} \lambda_2 - 1 & -2 \\ -4 & \lambda_2 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(t, 2t) : t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_2 = 5$ is $(1, 2)$

$$(c) P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(d) A = PDP^{-1} \Rightarrow A^7 = PD^7P^{-1}$$

$$A^7 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^7 & 0 \\ 0 & 5^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26041 & 26042 \\ 52084 & 52083 \end{bmatrix}$$

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة في كل من الحالات التالية

① $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

② $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

③ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

تحقق فيما إذا كانت المصفوفة قابلة للتقطير في كل من الحالات التالية

① $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

③ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

② $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

④ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$