جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

التحليل الرياضي ١

محاضرة 2 ميكاترونيكس

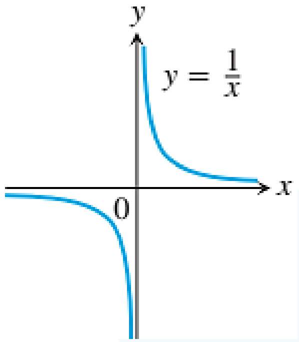
عملي

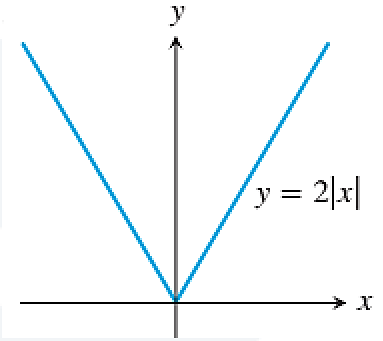
Prepared by
Dr. Sami INJROU

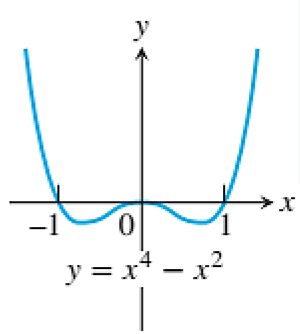
التوابع الحقيقية

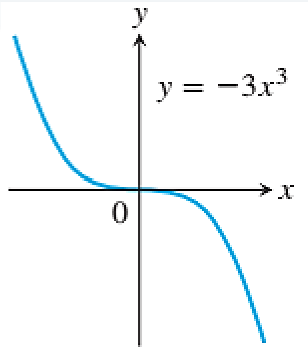
تمارين

5 أي من التوابع الآتية متباين وأي منها غير متباين









6 أوجد التابع العكسي لكل من التابعين الآتيين إن أمكن ذلك

$f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$ $\qquad$ $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$

7 أوجد صيغة $f \circ g \circ h$

$$f(x) = \frac{x+2}{3-x}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad h(x) = \sqrt{2-x}$$

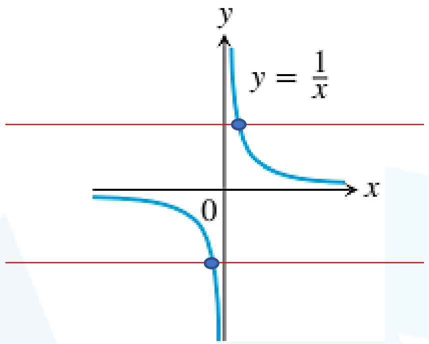
8 ليكن لدينا التابع $F(x) = \ln^2(x^2+1)$ أوجد التوابع f, g, h بحيث يكون $F(x) = f \circ g \circ h(x)$

9 ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{x}{x-2}$، أوجد $y = g(x)$ بحيث يكون $(f \circ g)(x) = x$.

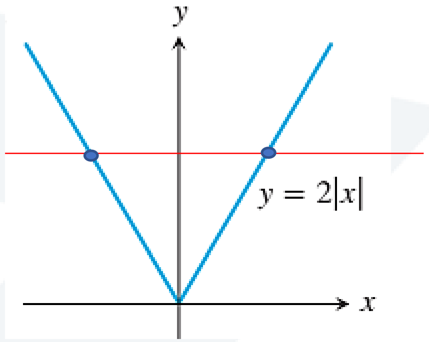
تمارين

5 أي من التوابع الآتية متباين وأي منها غير متباين

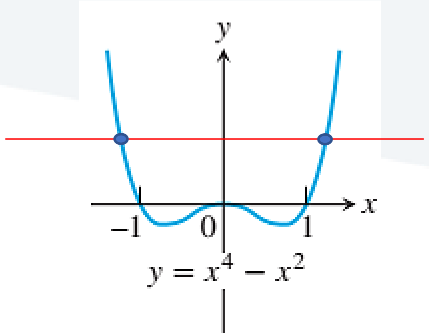
الحل



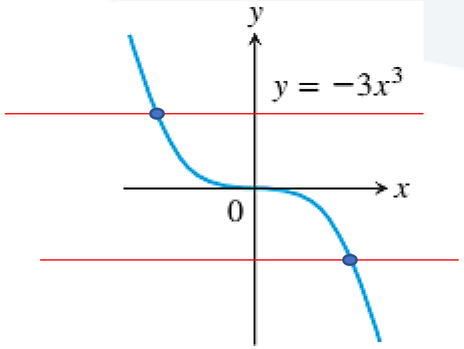
تابع متباين حسب اختبار الخط الأفقي



تابع غير متباين حسب اختبار الخط الأفقي



تابع غير متباين حسب اختبار الخط الأفقي



تابع متباين حسب اختبار الخط الأفقي

6 أوجد التابع العكسي لكل من التابعين الآتيين إن أمكن ذلك

$f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$

$f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$

الحل

$f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$

نتحقق من كون التابع متباين على المجال المعطى

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

التابع المعطى متباين

تمارين

نحل المعادلة $y = x^2 + 1$

$$x^2 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y - 1}$$

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 1} \quad ; \quad y \geq 1$$

نستبدل كل x بـ y وكل y بـ x، فنحصل على التابع $y = f^{-1}(x)$.

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1} \quad ; \quad x \geq 1$$

$f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$

نتحقق من كون التابع متباين على المجال المعطى

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^{2/3} = x_2^{2/3} \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^2} = \sqrt[3]{x_2^2} \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

التابع المعطى متباين

نحل المعادلة $y = x^{2/3}$

$$x^2 = y^3 \Rightarrow x = \sqrt{y^3} = y^{3/2}$$

$$x = f^{-1}(y) = y^{3/2} \quad ; \quad y \geq 0$$

نستبدل كل x بـ y وكل y بـ x، فنحصل على التابع $y = f^{-1}(x)$.

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x^3} \quad ; \quad x \geq 0$$

تمارين

7 أوجد صيغة $f \circ g \circ h$

$$f(x) = \frac{x+2}{3-x}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad h(x) = \sqrt{2-x}$$

الحل

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f\left(g\left(\sqrt{2-x}\right)\right) = f\left(\frac{\left(\sqrt{2-x}\right)^2}{\left(\sqrt{2-x}\right)^2+1}\right) = f\left(\frac{2-x}{3-x}\right) = \frac{\frac{2-x}{3-x}+2}{3-\frac{2-x}{3-x}} = \frac{8-3x}{7-2x}$$

8 ليكن لدينا التابع $F(x) = \ln^2\left(x^2+1\right)$ أوجد التوابع f, g, h بحيث يكون $F(x) = f \circ g \circ h(x)$

الحل

$$h(x) = x^2+1, \quad g(x) = \ln x, \quad f(x) = x^2$$

9 ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{x}{x-2}$، أوجد $y = g(x)$ بحيث يكون $(f \circ g)(x) = x$.

الحل

$$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow f(g(x)) = x \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)-2} = x \Rightarrow g(x) = (g(x)-2)x = x \cdot g(x) - 2x$$

$$\Rightarrow g(x) - x \cdot g(x) = -2x \Rightarrow g(x) = -\frac{2x}{1-x} = \frac{2x}{x-1}$$

نهاية تابع عددي

تمارين

1 احسب النهايات الآتية

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$$

2 استخدم مبرهنة الحصر لاثبات أن $\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)=0$

3 استخدم النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ لحساب النهايات الآتية:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{\sin^2 3x}$$

4 احسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2} \qquad \lim_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$$

تمارين

1 احسب النهايات الآتية

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$$

الحل

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+3)(x+1)}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-3+1}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x-10}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-5)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-5)=2-5=-3$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x+3)-4}=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}+2\right)=\sqrt{4}+2=4$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 4}\frac{x(4-x)}{2-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 4}\frac{x(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})}{2-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 4}x\left(2+\sqrt{x}\right)=4(2+2)=16$$

تمارين

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+8}-3\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+8)-9}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{-2}{3+3}=-\frac{1}{3}$$

2 استخدم مبرهنة الحصر لاثبات أن $\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)=0$

الحل

$$-1\le\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)\le 1 \text{ for } x\neq 0 \qquad \Rightarrow -x^2\le x^2\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)\le x^2 \xrightarrow{\lim_{x\to 0} x^2=0} \lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)=0$$

تمارين

3 استخدم النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ لحساب النهايات الآتية:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{\sin^2 3x}$$

الحل

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(2\sin\theta\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{(2\sin\theta\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{(2\sin\theta\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{(2\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\frac{0}{(2)(2)}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{\sin^2 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x(1-\cos x)}{9x^2}}{\frac{\sin^2 3x}{9x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{9x}}{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{9}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{9}(0)}{1^2}=0$$

تمارين

3 احسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2} \qquad \lim_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$$

الحل

$$\lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$$

$|x+2|=(x+2)$

$x>-2$

$$\lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2^+}(x+3)=((-2)+3)=1$$

$$\lim_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$$

$|x+2|=-(x+2)$

$x<-2$

$$\lim_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}(x+3)\left[\frac{-(x+2)}{(x+2)}\right]=\lim_{x\to -2^-}(x+3)(-1)=-(-2+3)=-1$$