

Information theory and coding

نظرية المعلومات و الترميز

مدرسة المقرر

د.بشرى علي معلا

عنوان المحاضرة الثانية

قياس المعلومات (يتبع)

الغاية من المحاضرة الثانية:

✓ تنمية المفاهيم الرياضية التي تستخدم لقياس المعلومات:

- الانتروبيا المشروطة
- انتروبيا النظام
- كمية المعلومات المتبادلة

بعض خواص الانتروبيا

1. تابع الانتروبيا هو رقم غير سالب $H(X) \geq 0$

2. انتروبيا جداء عدة منابع مستقلة = مجموع انتروبيات كل منبع على حدى

$$H(X_1.X_2.....X_n) = H(X_1) + H(X_2) + \dots + H(X_n)$$

3. انتروبيا جداء منبعين لا على التعيين (قد يكونا غير مستقلين) يعطى بالعلاقة:

$$H(X.Y) = H(X) + H(Y / X)$$

الانتروبيا المشروطة (1/9)

➤ إذا كانت الرموز **غير مستقلة** يظهر مفهوم جديد و هو **الانتروبيا المشروطة (conditional entropy)** و نرمز لها بـ H_C

➤ تخضع المنابع المتقطعة لبعض القواعد المتعلقة بإمكانية اختيار الرموز المتتابعة حيث أن الرموز المتداخلة تقلل من المعلومات المنتجة لأنها تقلل من عدم التأكد.

مثال :

في اللغة الانكليزية، تخضع كتابة نص ما لقواعد الإملاء و القواعد العامة لمتوسط احتمالات ورود الحروف والكلمات والجمل وهذا يعطي مثلاً واضحاً عن الرموز المتداخلة و أسس التردد النسبي.

مثلاً

احتمال ورود الحرف U في اللغة الانكليزية هو $P_U = 0.02$

لكن احتمال وروده بعد الحرف Q هو $P_{U|Q} \approx 1$

الانتروبيا المشروطة (2/9)

SOURCE

❖ من أجل منبع ذي رموز غير مستقلة:

إذا كان الرمز (j) هو الرمز التالي للرمز (i)

فتكون المعلومات المستفيدة من حدوث الرمز (j) إذا كان الرمز (i) معطى هي $\log_2\left(\frac{1}{P_{j/i}}\right)$

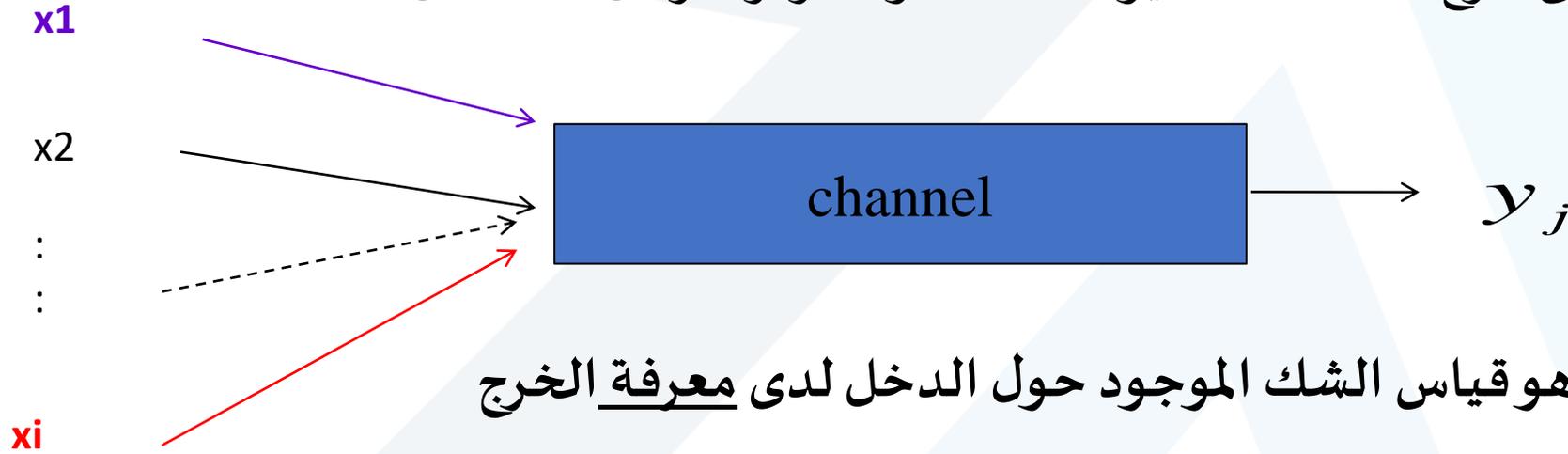
و منه الانتروبيا المشروطة للمنبع تعطى بالعلاقة:

$$H_C = \sum_i \sum_j P_i \cdot P_{j/i} \cdot \log_2\left(\frac{1}{P_{j/i}}\right) \quad \text{bit/symbol}$$

الانتروبيا المشروطة (3/9)

❖ من أجل قناة اتصال:

إذا ظهر الرمز y_j على خرج القناة عندئذ يوجد شك حول الرمز المرسل عند دخل القناة



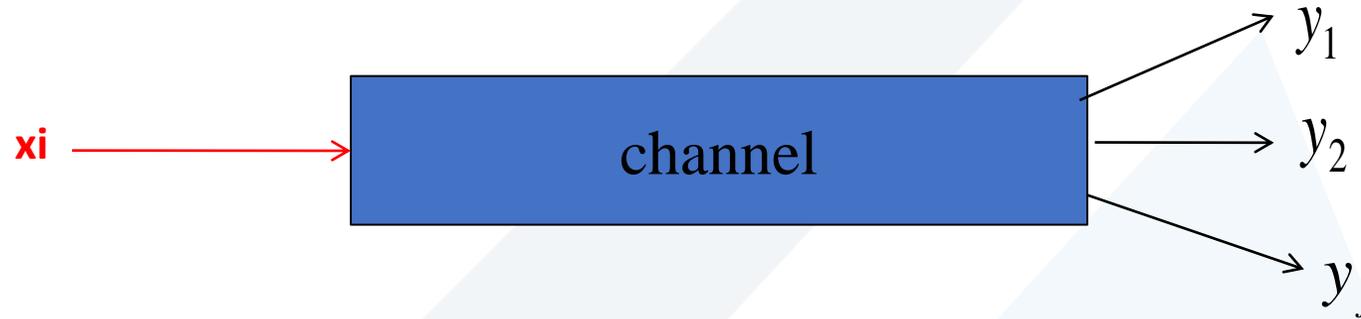
هنا نعرف الارتياب: هو قياس الشك الموجود حول الدخل لدى معرفة الخرج

$$H(X / Y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i / y_j) \quad \text{bit}$$

الانتروبيا المشروطة (4/9)

❖ من أجل قناة اتصال:

إذا كان دخل القناة هو الرمز x_i عندئذ يوجد شك حول الرمز المستقبل عند خرج القناة



هنا نعرف الخطأ الوسطي: قياس للشك حول الخرج لدى معرفة الدخل

$$H(Y / X) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(y_j, x_i) \log_2 P(y_j / x_i) \quad \text{bit}$$



الانتروبيا المشروطة (5/9)

تعرف انتروبيا النظام (Joint Entropy) بالعلاقة: ❖

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i, y_j) \text{ bit}$$

حيث:

$$\log_2 P(x, y) = \log_2 (P(x) \cdot P(y/x)) = \log_2 P(x) + \log_2 P(y/x)$$

$$P(x, y) = P(x) \cdot P(y/x)$$



جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY

الانتروبيا المشروطة (6/9)

❖ انطلاقاً من العلاقة الأساسية السابقة نحصل على الانتروبيا النظام بالعلاقتين الآتيتين:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y / X)$$

أي انتروبيا النظام هي انتروبيا الدخل مضافاً إليها الخطأ الوسطي

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X / Y)$$

أي انتروبيا النظام هي انتروبيا الخرج مضافاً إليها الارتباب

الانتروبيا المشروطة (7/9)

❖ نميز الحالتين الآتيتين:

1. إذا كان لدينا قناة اتصال ذات ضجيج قوي جداً:

في هذه الحالة لا يكون هناك أي ارتباط شرطي بين الدخل و الخرج:

$$P(x_i/y_j) = P(x_i) \Rightarrow H(X/Y) = H(X)$$

$$\Rightarrow H(X, Y) = H(Y) + H(X/Y) \text{ لدينا}$$

$$\Rightarrow H(X, Y) = H(Y) + H(X) \text{ بالتعويض:}$$

$$\} \Rightarrow H(X, Y) = H(Y) + H(X)$$

$$P(y_j/x_i) = P(y_j) \Rightarrow H(Y/X) = H(Y)$$

$$\Rightarrow H(X, Y) = H(Y) + H(X/Y) \text{ لدينا}$$

$$\Rightarrow H(X, Y) = H(Y) + H(X) \text{ بالتعويض:}$$



الانتروبيا المشروطة (8/9)

❖ نميز الحالتين الآتيتين:

2. إذا كان لدينا قناة خالية من الضجيج:

في هذه الحالة لا يوجد ترتيب أو خطأ في الدخل و الخرج :

$$H(X/Y) = 0 \Rightarrow H(X,Y) = H(Y) + H(X/Y) \Rightarrow H(X,Y) = H(Y)$$

$$H(Y/X) = 0 \Rightarrow H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) \Rightarrow H(X,Y) = H(X)$$

$$\Rightarrow H(X,Y) = H(Y) = H(X)$$

الانتروبيا المشروطة (9/9)

تعطى مصفوفة الاحتمالات الشرطية كالآتي:

$$P(X / Y) = \begin{bmatrix} P(x_1 / y_1) & P(x_1 / y_2) & \dots & P(x_1 / y_m) \\ P(x_2 / y_1) & P(x_2 / y_2) & \dots & P(x_2 / y_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(x_n / y_1) & P(x_n / y_2) & \dots & P(x_n / y_m) \end{bmatrix}$$

الارتياب:

$$P(Y / X) = \begin{bmatrix} P(y_1 / x_1) & P(y_2 / x_1) & \dots & P(y_m / x_1) \\ P(y_1 / x_2) & P(y_2 / x_2) & \dots & P(y_m / x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1 / x_n) & P(y_2 / x_n) & \dots & P(y_m / x_n) \end{bmatrix}$$

الخطأ الوسطي:
(مصفوفة الضجيج)



جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY

الفائض والفائض النسبي للمنبع

➤ فائض المنبع:

هو الفرق بين القيمة الأعظمية للانتروبيا و القيمة الحقيقية لها.

$$\rho = H_{\max}(X) - H(X)$$

يعطى بالعلاقة:

➤ الفائض النسبي المنبع:

هو النسبة بين فائض المنبع و القيمة الأعظمية للانتروبيا.

$$\rho_s = \frac{\rho}{H_{\max}(X)} = 1 - \frac{H(X)}{H_{\max}(X)}$$

يعطى بالعلاقة:

المعلومات المتبادلة (1/7) Mutual Information

➤ تعريفها:

تقيس المعلومات المنتقلة عبر القناة عند إرسال الرمز x_i و استقبال الرمز y_j

➤ رياضياً:

$$I(x_i, y_j) = \log_2 \frac{P(x_i / y_j)}{P(x_i)} \quad \text{bits}$$

للمناقشة:

1. من أجل قناة خالية من الضجيج:

كل خرج y_j يكون متعلق حصرياً بالدخل x_i الخاص به. أي يتشكل زوج (دخول-خرج) $input - output(x_i, y_j)$

$$P(x_i / y_j) = 1 \Rightarrow I(x_i, y_j) = \log_2 \frac{1}{P(x_i)} \quad \text{bits}$$

أي أن المعلومات المتبادلة = المعلومات الذاتية

المعلومات المتبادلة (2/7) Mutual Information

2. من أجل قناة ذات ضجيج قوي جداً:
لا يكون الدخل و الخرج مرتبطين, أي أن

$$P(x_i / y_j) = P(x_i) \Rightarrow I(x_i, y_j) = \log_2 1 = 0 \text{ bits}$$

أي لا توجد أية معلومات متبادلة



المعلومات المتبادلة (3/7) Mutual Information

ومنهُ: ➤

معدل حساب المعلومات المتبادلة بين كل أزواج (دخول - خرج) لقناة معطاة هو معدل المعلومات المتبادلة:

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \cdot I(x_i, y_j)$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \cdot \log_2 \frac{P(x_i / y_j)}{P(x_i)} \quad \text{bit}$$

المعلومات المتبادلة (4/7) Mutual Information

❖ انطلاقاً من العلاقة الأساسية السابقة نحصل على المعلومات المتبادلة بالعلاقتين الآتيتين:

$$I(X, Y) = H(X) - H(X / Y)$$

أي كمية المعلومات المتبادلة = انتروبيا الدخل - الارتياب

$$I(X, Y) = H(Y) - H(Y / X)$$

أي كمية المعلومات المتبادلة = انتروبيا الخرج - الخطأ الوسطي



علاقات أساسية مفيدة

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j)$$


$$P(x_i, y_j) = P(y_j) \cdot P(x_i / y_j)$$


$$P(x_i) = \sum_{j=1}^m P(y_j) \cdot P(x_i / y_j)$$

$$P(y_i) = \sum_{i=1}^n P(x_i, y_j)$$


$$P(x_i, y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j / x_i)$$


$$P(y_j) = \sum_{i=1}^n P(x_i) \cdot P(y_j / x_i)$$



المعلومات المتبادلة (5/7) Mutual Information

$$I(X, Y) = H(X) - H(X / Y) \quad \text{أثبت أن: } \blacktriangleright$$

العلاقة الأساسية للمعلومات المتبادلة:

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \cdot \log_2 \left[\frac{P(x_i / y_j)}{P(x_i)} \right]$$

و منه نكتب:

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 \left[\frac{1}{P(x_i)} \right] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 \left[\frac{1}{P(x_i / y_j)} \right]$$



جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY

المعلومات المتبادلة (6/7) Mutual Information

لدينا العلاقات الأساسية الآتية: ➤

$$P(x_i, y_j) = P(y_j) \cdot P(x_i / y_j)$$

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^m P(y_j) \cdot P(x_i / y_j) = \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j)$$

ونعلم أن: ➤

$$H(X) = \sum_{i=1}^n P(x_i) \cdot \log_2 \left[\frac{1}{P(x_i)} \right]$$

$$H(X / Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \cdot \log_2 \left[\frac{1}{P(x_i / y_j)} \right]$$



المعلومات المتبادلة (7/7) Mutual Information

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 \left[\frac{1}{P(x_i)} \right]}_{H(X)} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 \left[\frac{1}{P(x_i / y_j)} \right]}_{H(X/Y)}$$

و منه:

$$I(X, Y) = H(X) - H(X/Y)$$

خصائص المعلومات المتبادلة

$$P(x_i, y_j) = P(y_j) \cdot P(x_i / y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j / x_i) \quad \text{بما أن:}$$

بالتعويض في علاقة المعلومات المتبادلة يكون:

$$\Rightarrow I(X, Y) = I(Y, X)$$

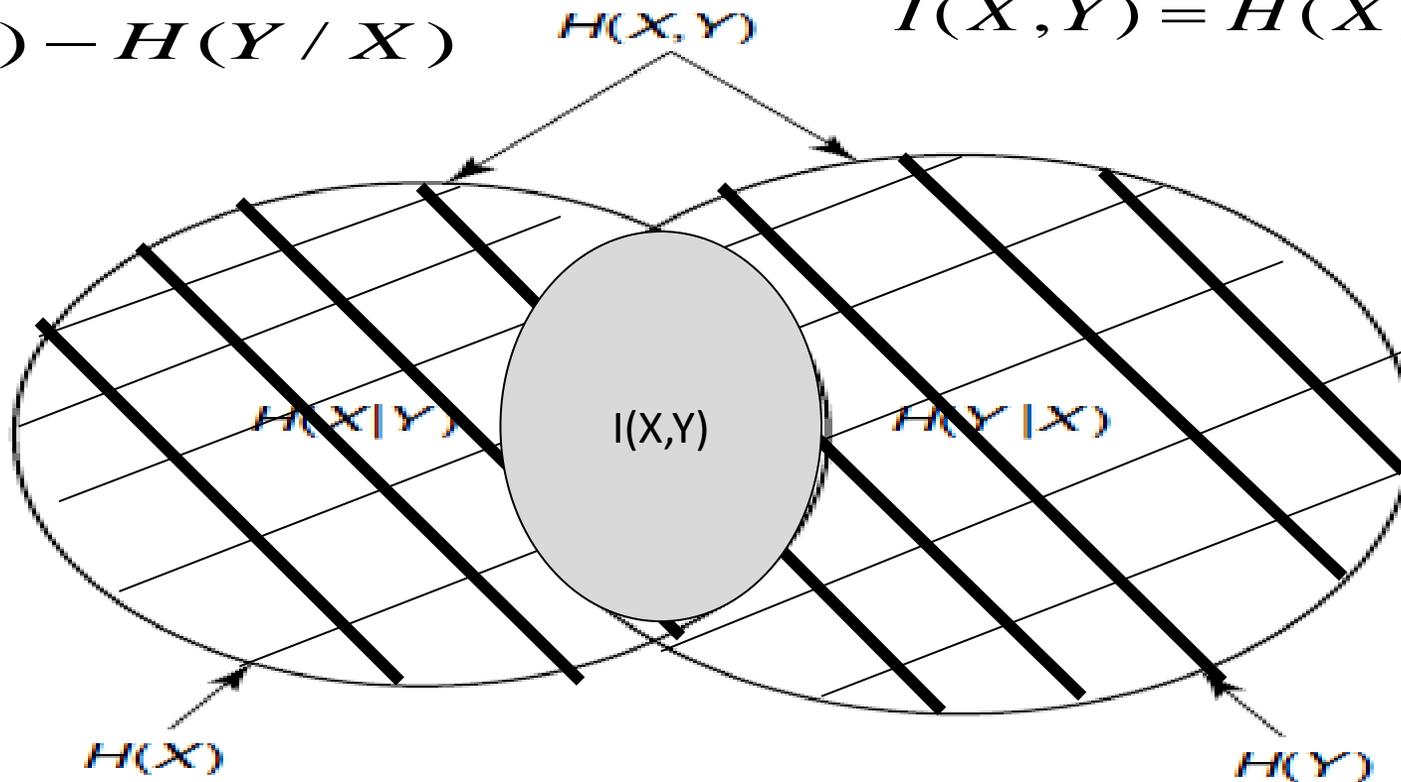
العلاقة بين مختلف مفاهيم الانتروبيا و المعلومات المتبادلة

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X / Y)$$

$$I(X, Y) = H(Y) - H(Y / X)$$

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y / X)$$

$$I(X, Y) = H(X) - H(X / Y)$$



نهاية المحاضرة الثانية