

Information theory and coding

نظرية المعلومات و الترميز

مدرسة المقرر

د.بشرى علي معلا

المحاضرة الثانية عملي

المسألة الأولى

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & ? & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & ? & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

لدينا قناة مميزة بمصفوفة الضجيج الآتية:
المطلوب:

أكمل مصفوفة الضجيج. مع التعليل

احسب كمية المعلومات المتبادلة $I(X,Y)$ حيث $P(x_1)=1/4$, $P(x_2)=3/4$

الحل:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} : 1. \text{ المصفوفة هي :}$$

$$\sum_{j=1}^m P(y_j / x_i) = 1$$

التعليق:

$$P(y_1 / x_1) + P(y_2 / x_1) + P(y_3 / x_1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + P(y_2 / x_1) + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow P(y_2 / x_1) = 0$$

$$P(y_1 / x_2) + P(y_2 / x_2) + P(y_3 / x_2) = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} + P(y_2 / x_2) + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow P(y_2 / x_2) = \frac{1}{3}$$

2. حساب المعلومات المتبادلة انطلاقاً من العلاقة: $I(X,Y)=H(Y)-H(Y/X)$

يلزمنا حساب $H(Y/X)$: $H(Y/X) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 P(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{P(y_j/x_i)}$

$$P(X,Y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

بالاعتماد على $P(X,Y)=P(X) P(Y/X)$ نحصل على مصفوفة الارتباط

$$H(Y/X) = - \left[\frac{1}{8} \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{8} \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) + 3 \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{1}{3} \right) \right] = 1.437 \text{ bit}$$

بالتعويض :



جامعة
المنارة

MANARA UN
 m

$$H(Y) = \sum_{j=1}^m P(y_j) \log_2 \frac{1}{P_{y_j}}$$

يلزمنا حساب $H(Y)$ ➤

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^2 p(x_i, y_j) \quad \text{يلزمنا حساب } P(y_j) \text{ انطلاقاً من العلاقة}$$

$$P(y_1) = P(y_3) = \frac{3}{8}, P(y_2) = \frac{1}{4} \quad \text{نحصل على:}$$

$$H(Y) = - \left[\frac{3}{8} \log_2 \left(\frac{3}{8} \right) + \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{3}{8} \log_2 \left(\frac{3}{8} \right) \right] = 1.56 \text{ bit/symbol} \quad \text{بالتعويض:}$$

$$I(X, Y) = 1.56 - 1.437 = 0.123 \text{ bit}$$

بالتعويض في علاقة $I(X, Y)$

المسألة الثانية :

لتكن مصفوفة الضجيج الآتية لقناة :

المطلوب احسب $H(X,Y)$

إذا علمت أن احتمالات حدوث الدخل متساوية.

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

الحل:

بما أن احتمالات حدوث الدخل متساوية فيكون : $p(X1)=p(X2)=0.5$

$$H(X,Y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 P(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{P(x_i, y_j)}$$

نعلم أن : $P(x,y)=p(x).p(y/x)$ ومنه:

$$p(X,Y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$H(X,Y) = - \left[\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} \right] = 2.74 \text{ bit}$$

المسألة الثالثة

$$P(X, Y) = \begin{bmatrix} ? & 1/8 \\ 3/4 & 1/8 \end{bmatrix}$$

إذا كان لدينا التوزيع الآتي $P(X, Y)$:

إذا كانت احتمالات الدخل: $P(X_1) = 1/8, P(X_2) = 7/8$

المطلوب : 1. أكمل المصفوفة التوزيع (النظام).

2. احسب $H(X), H(Y)$

الحل:

الطلب الأول:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) = 1$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p(x_i, y_j) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + p(x_2, y_1) + p(x_2, y_2)$$

$$=? + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow p(x_1, y_1) = 1 - \frac{8}{8} = 0$$

الطلب الثاني:

$$H(X) = \sum_{i=1}^2 P(x_i) \cdot \log_2(1/P(x_i)) = P(x_1) \cdot \log_2(1/P(x_1)) + P(x_2) \cdot \log_2(1/P(x_2))$$

$$H(X) = \frac{1}{8} \cdot \log_2(8) + \frac{7}{8} \cdot \log_2\left(\frac{8}{7}\right) = 0.425 \text{ Bit/symbol}$$

تابع للطلب الثاني:

$$H(Y) = \sum_{i=1}^2 P(y_i) \cdot \log_2(1/P(y_i)) = P(y_1) \cdot \log_2(1/P(y_1)) + P(y_2) \cdot \log_2(1/P(y_2))$$

يلزمنا حساب $P(y_j)$ ، $P(y_j/x_i)$

$$P(x_i, y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j / x_i) \Rightarrow P(y_j / x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}$$

$$P(y_1 / x_1) = \frac{P(x_1, y_1)}{P(x_1)} = 0$$

$$P(y_2 / x_1) = \frac{P(x_1, y_2)}{P(x_1)} = \frac{1}{8} \times 8 = 1$$

$$P(y_2 / x_2) = \frac{P(x_2, y_2)}{P(x_2)} = \frac{1}{8} \times \frac{8}{7} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$$

$$P(y_1 / x_2) = \frac{P(x_2, y_1)}{P(x_2)} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{7} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$$

تابع للطلب الثاني: حساب $P(y_j)$

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^2 P(x_i) \cdot P(y_j / x_i)$$

$$P(y_1) = P(x_1) \cdot P(y_1 / x_1) + P(x_2) \cdot P(y_1 / x_2) = 0 + \frac{7}{8} \times \frac{6}{7} = \frac{6}{8}$$

$$P(y_2) = P(x_1) \cdot P(y_2 / x_1) + P(x_2) \cdot P(y_2 / x_2) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{8}$$

$$P(y_2) = 1 - P(y_1) = 1 - \frac{6}{8} = \frac{2}{8}$$

بالتعويض ينتج:

$$H(Y) = \frac{6}{8} \cdot \log_2(8/6) + \frac{2}{8} \cdot \log_2(8/2) = 0.8111 \text{ Bit/symbol}$$

المسألة الرابعة :

$$P_{(0/1)} = \frac{1}{16} \quad ; \quad P_{(1/0)} = \frac{3}{4}$$
$$P_{(0)} = \frac{3}{8} \quad ; \quad P_{(1)} = \frac{5}{8}$$

منبع معلومات يستخدم الترميز الثنائي (0,1) حيث أن :

احسب الانتروبيا المشروطة وقارنها مع الانتروبيا غير المشروطة (أي بفرض الرموز مستقلة عن بعضها البعض)

الحل:

الانتروبيا المشروطة تعطى بالعلاقة: $H_C = \sum_i \sum_j P_i \cdot P_{j/i} \cdot \log_2(1/P_{j/i})$ ومنه:

$$H_C = P_0 \sum_j P_{j/0} \cdot \log_2\left(\frac{1}{P_{j/0}}\right) + P_1 \sum_j P_{j/1} \cdot \log_2\left(\frac{1}{P_{j/1}}\right)$$

$$= P_0 \left[P_{0/0} \cdot \log_2\left(\frac{1}{P_{0/0}}\right) + P_{1/0} \cdot \log_2\left(\frac{1}{P_{1/0}}\right) \right] + P_1 \left[P_{0/1} \cdot \log_2\left(\frac{1}{P_{0/1}}\right) + P_{1/1} \cdot \log_2\left(\frac{1}{P_{1/1}}\right) \right]$$

$$P_{(0/0)} + P_{(1/0)} = 1 \quad \Rightarrow \quad P_{(0/0)} = 1 - P_{(1/0)} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{من فرضيات المسألة نحسب } P_{(1/1)}, P_{(0/0)}$$

$$P_{(1/1)} + P_{(0/1)} = 1 \quad \Rightarrow \quad P_{(1/1)} = 1 - P_{(0/1)} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

الانتروبيا المشروطة تعطى بالعلاقة:
ومنه:

$$\begin{aligned} H_C &= \frac{3}{8} \left[\frac{1}{4} \cdot \log_2(4) + \frac{3}{4} \cdot \log_2\left(\frac{4}{3}\right) \right] + \frac{5}{8} \left[\frac{1}{16} \cdot \log_2(16) + \frac{15}{16} \cdot \log_2\left(\frac{16}{15}\right) \right] \\ &= \frac{3}{8} \left[\frac{2}{4} + \frac{3}{4} \cdot 3.32 \cdot \log_{10}\left(\frac{4}{3}\right) \right] + \frac{5}{8} \left[\frac{4}{16} + \frac{15}{16} \cdot 3.32 \cdot \log_{10}\left(\frac{16}{15}\right) \right] \\ &= 0.3 + 0.21 \\ &= 0.51 \quad \text{bits} \end{aligned}$$

الانتروبيا تعطى بالعلاقة:
ومنه:

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{j=1}^2 P_j \log_2 \left(\frac{1}{P_j} \right) = P_0 \log_2 \left(\frac{1}{P_0} \right) + P_1 \log_2 \left(\frac{1}{P_1} \right) \\
 &= \frac{3}{8} \cdot \log_2 \left(\frac{8}{3} \right) + \frac{5}{8} \cdot \log_2 \left(\frac{8}{5} \right) \\
 &= 3.32 \cdot \frac{3}{8} \cdot \log_{10} \left(\frac{8}{3} \right) + 3.32 \cdot \frac{5}{8} \cdot \log_{10} \left(\frac{8}{5} \right) \\
 &= 0.53 + 0.463 \\
 &= 0.993 \approx 1 = H_{\max} \quad \text{Bit/symbol}
 \end{aligned}$$

أي أن الانتروبيا المشروطة أقل من الانتروبيا غير المشروطة.



جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY

وظيفة

أثبت أن :

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X / Y)$$

نهاية المحاضرة الثانية