قسم الروبوت و الأنظمة الذكية

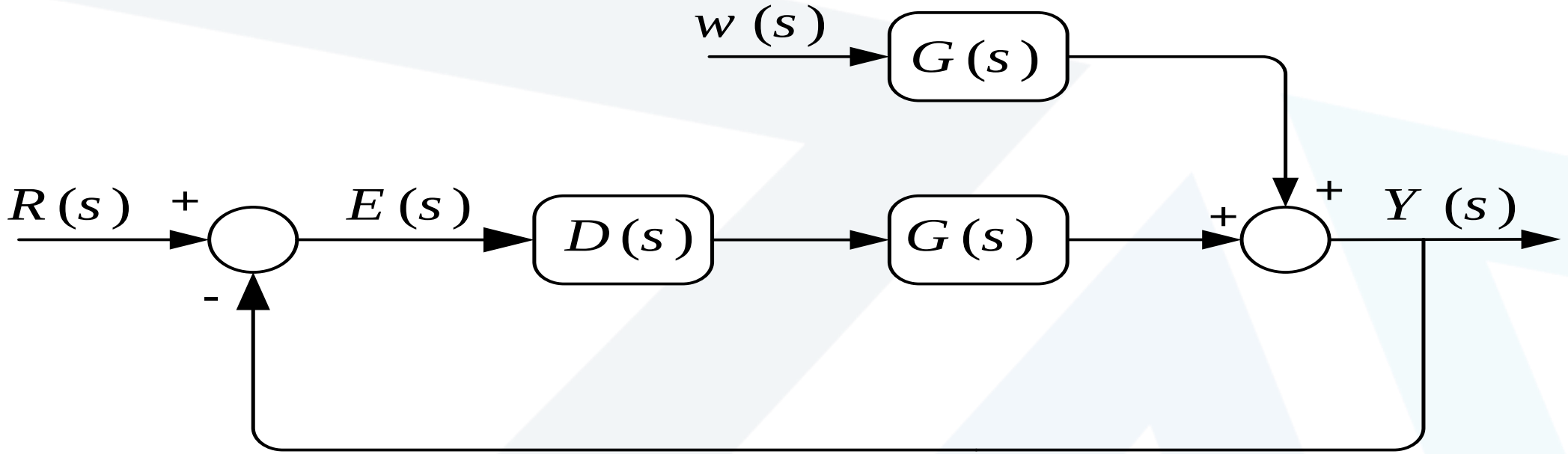
عميد الكلية
د. إياد حاتم

نظم التحكم اللاخطي
Nonlinear Control systems

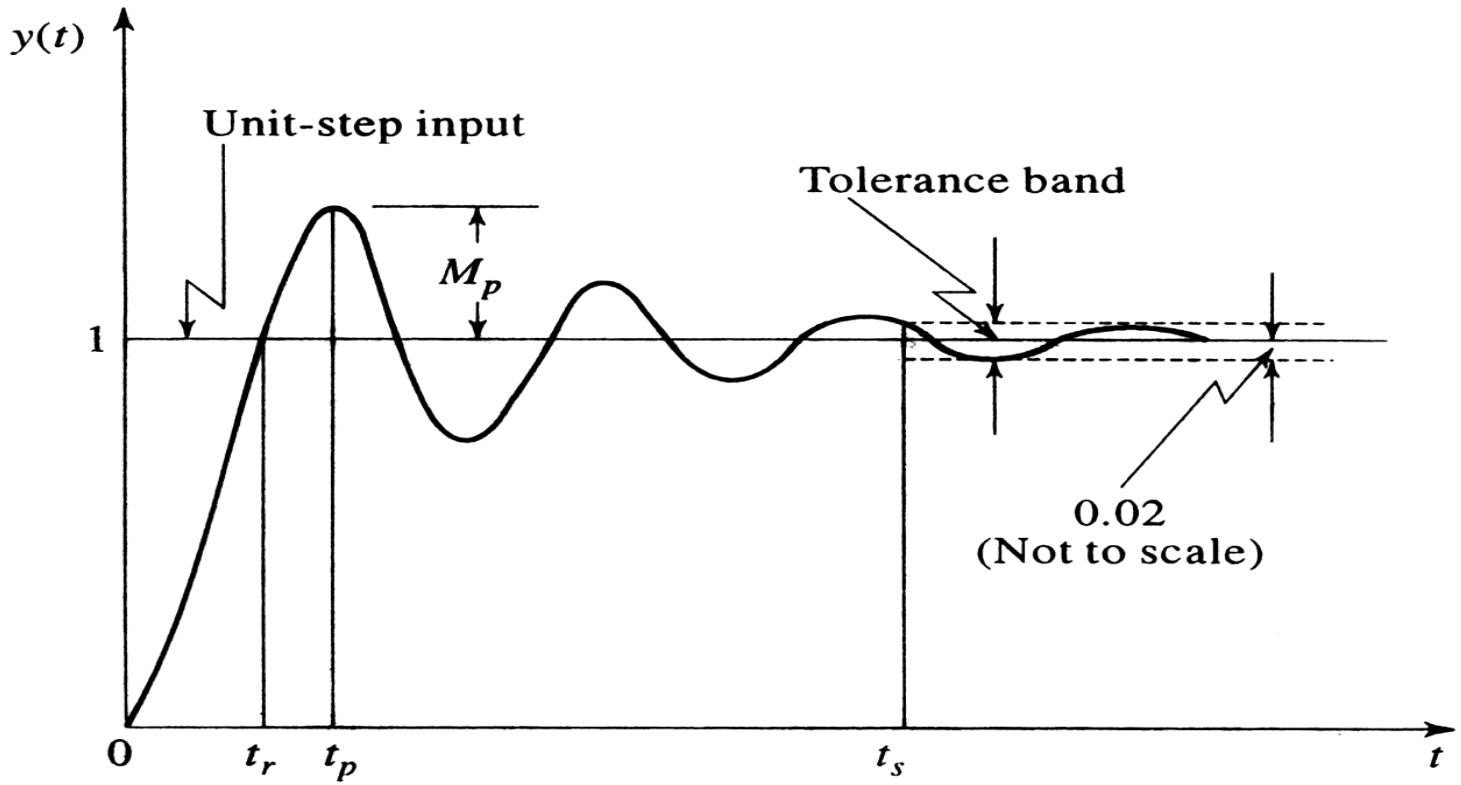
مدرس المقرر

د.بلال شيحا

مقدمة

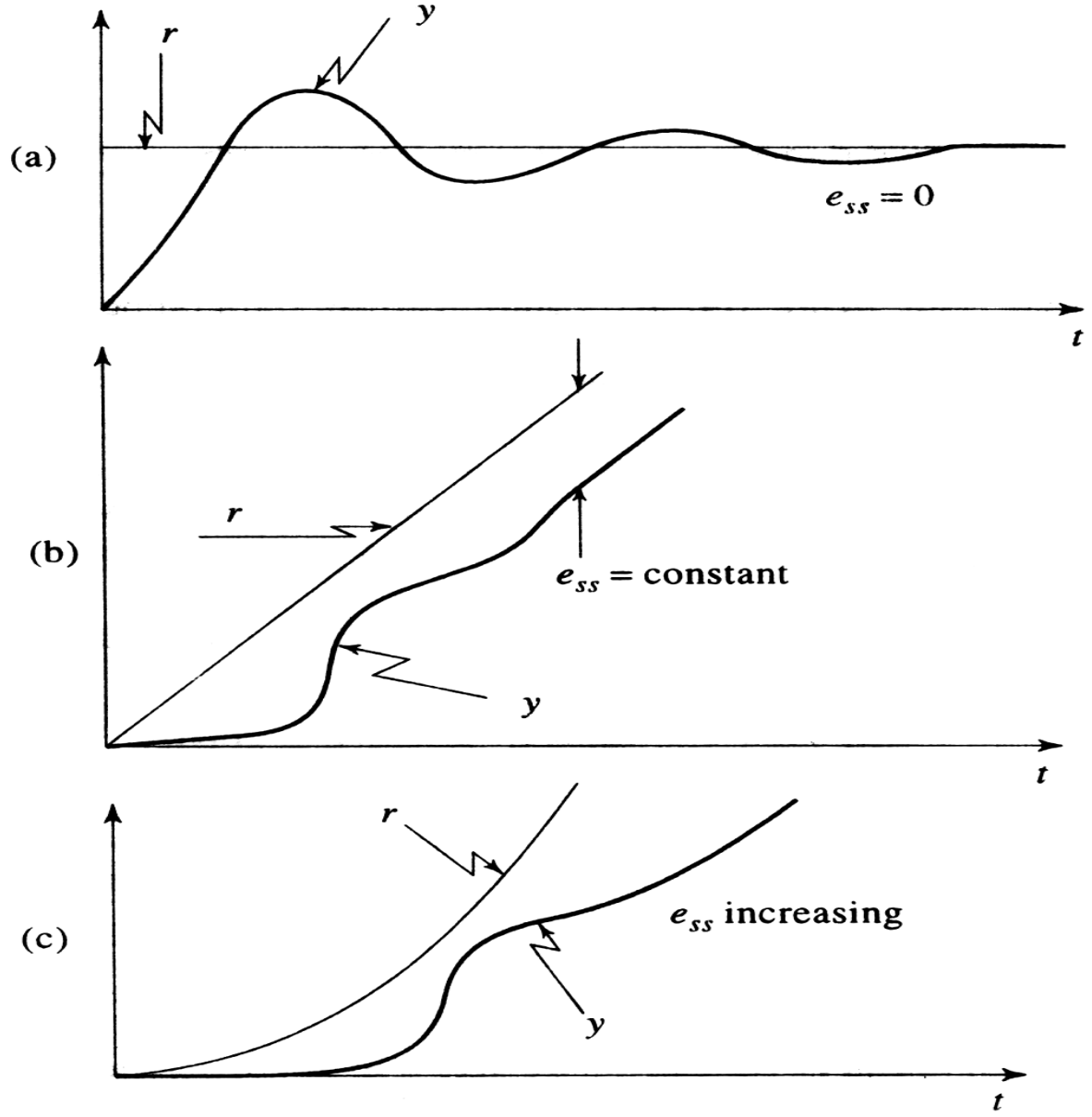


الاستجابة العابرةTransient Response

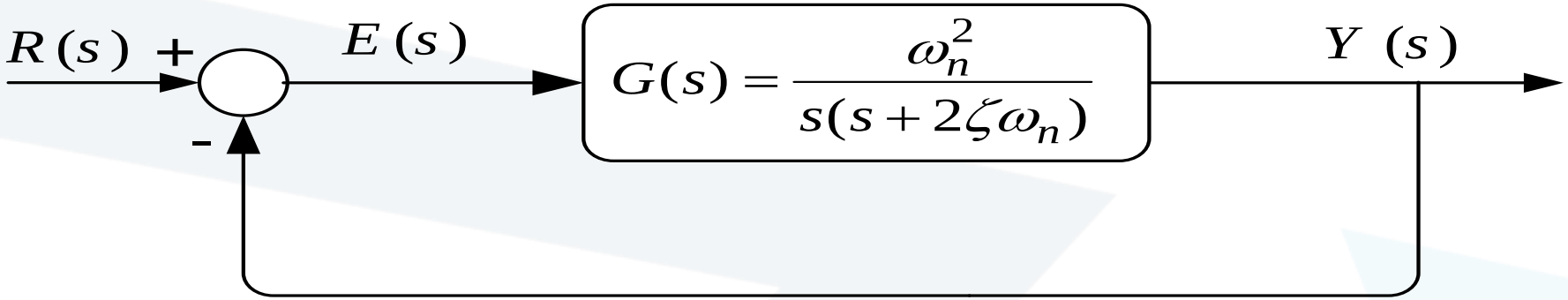


استجابة الحالة الثابتةSteady – State Response

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} [r(t) - y(t)]$$



مقدمة



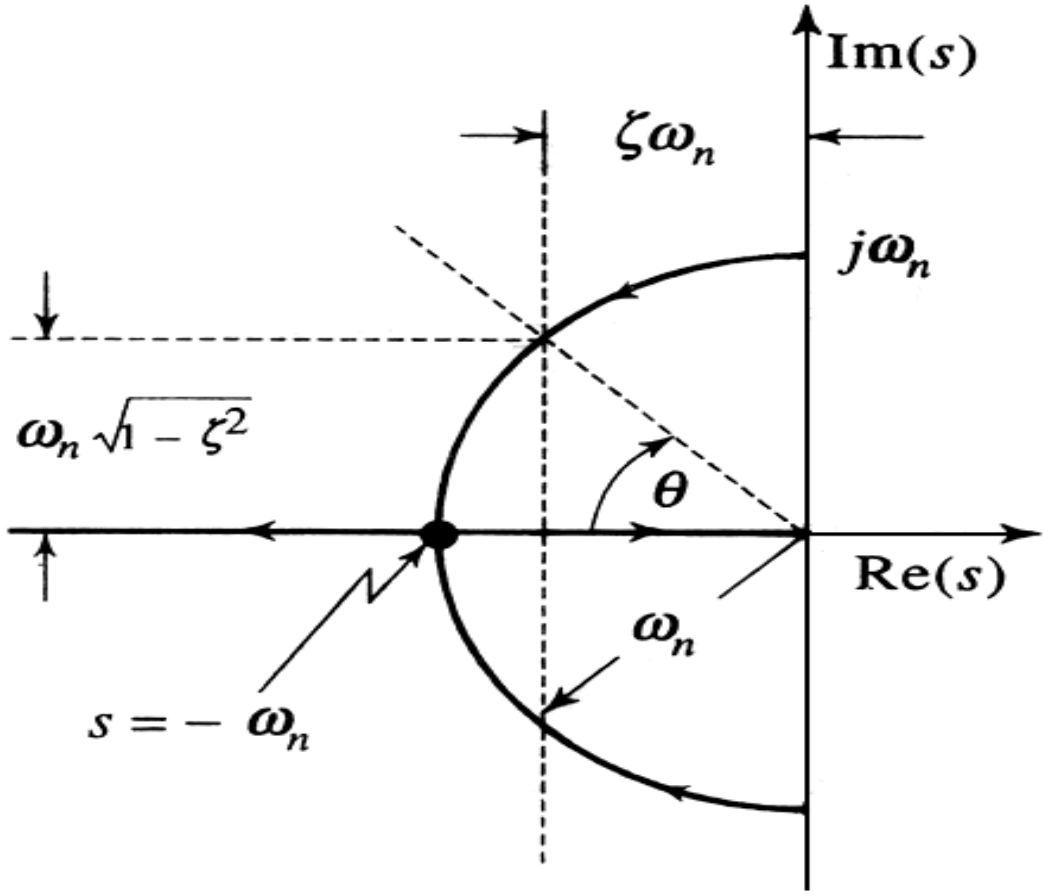
$$\frac{Y\ (s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\ \zeta\omega_n\ s + \omega_n^2}$$

$$\Delta(s) = s^2 + 2\ \zeta\ \omega_n s\ + \omega_n^2\ = 0$$

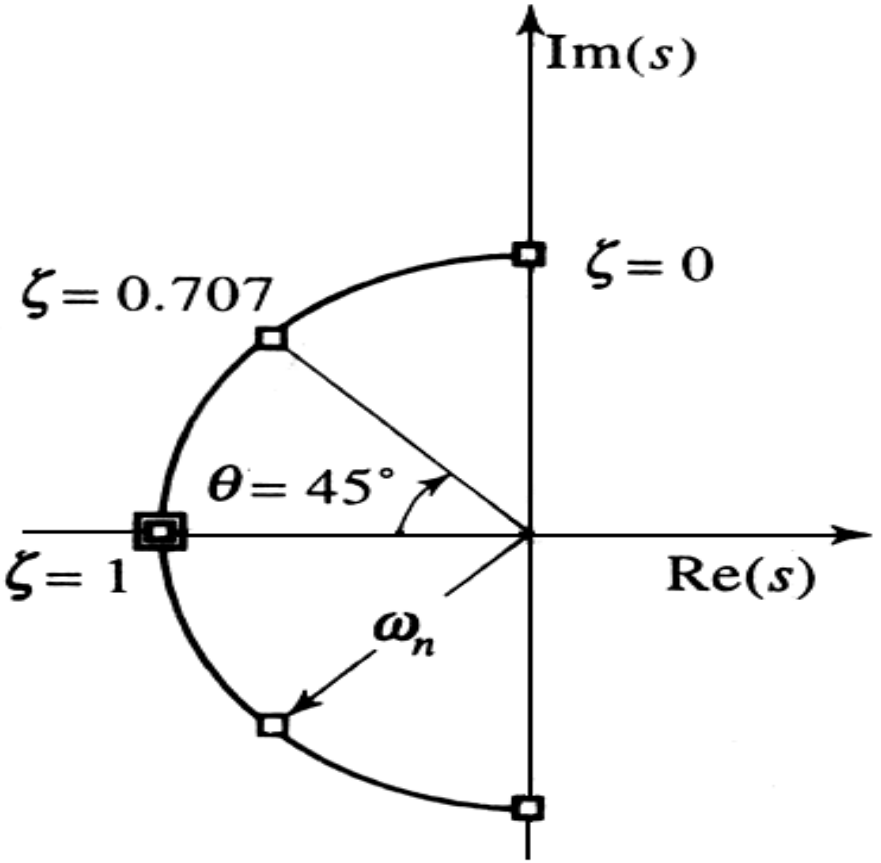
$$s_{1,2} = -\zeta\ \omega_n \pm\ j\ \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$0 < \zeta < 1 \qquad \theta = \cos^{-1}\zeta$$

مقدمة



(a)



(b)

$$s_{1,2} = -\zeta\,\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

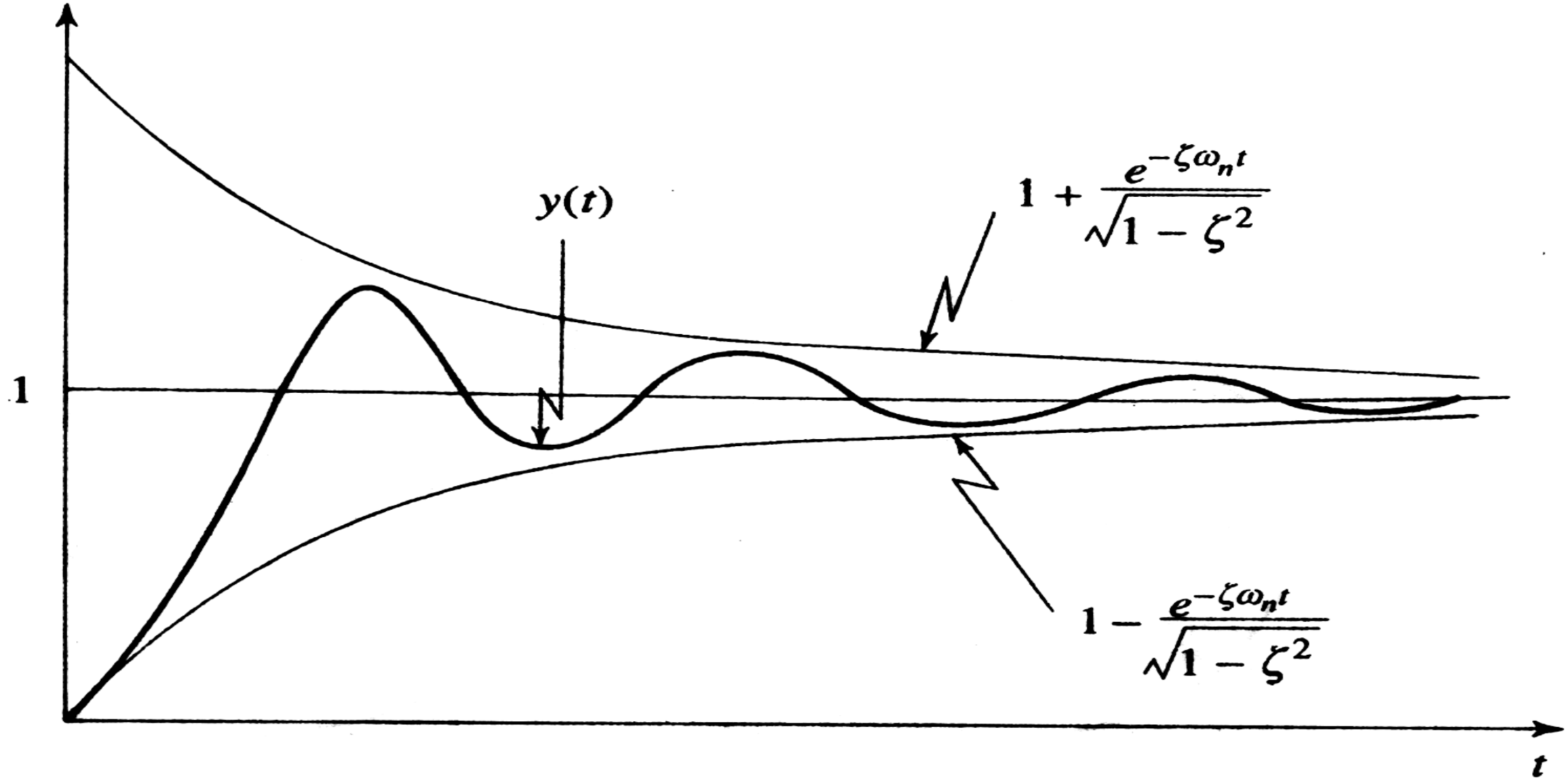
مقدمة

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

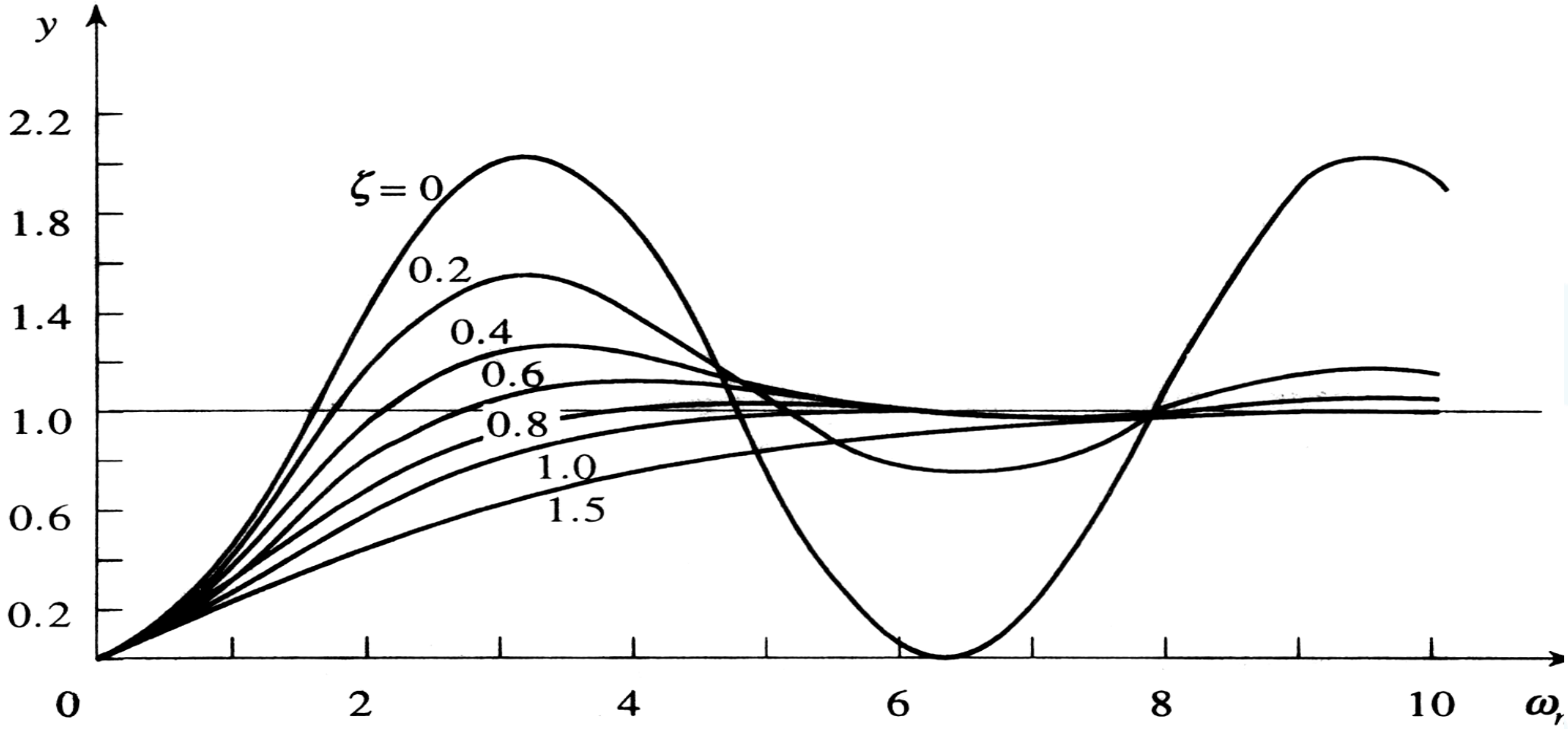
$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \theta\right) \qquad 0 < \zeta < 1 \qquad \theta = \cos^{-1}\zeta$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad \left[1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] \qquad \tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$$

مقدمة

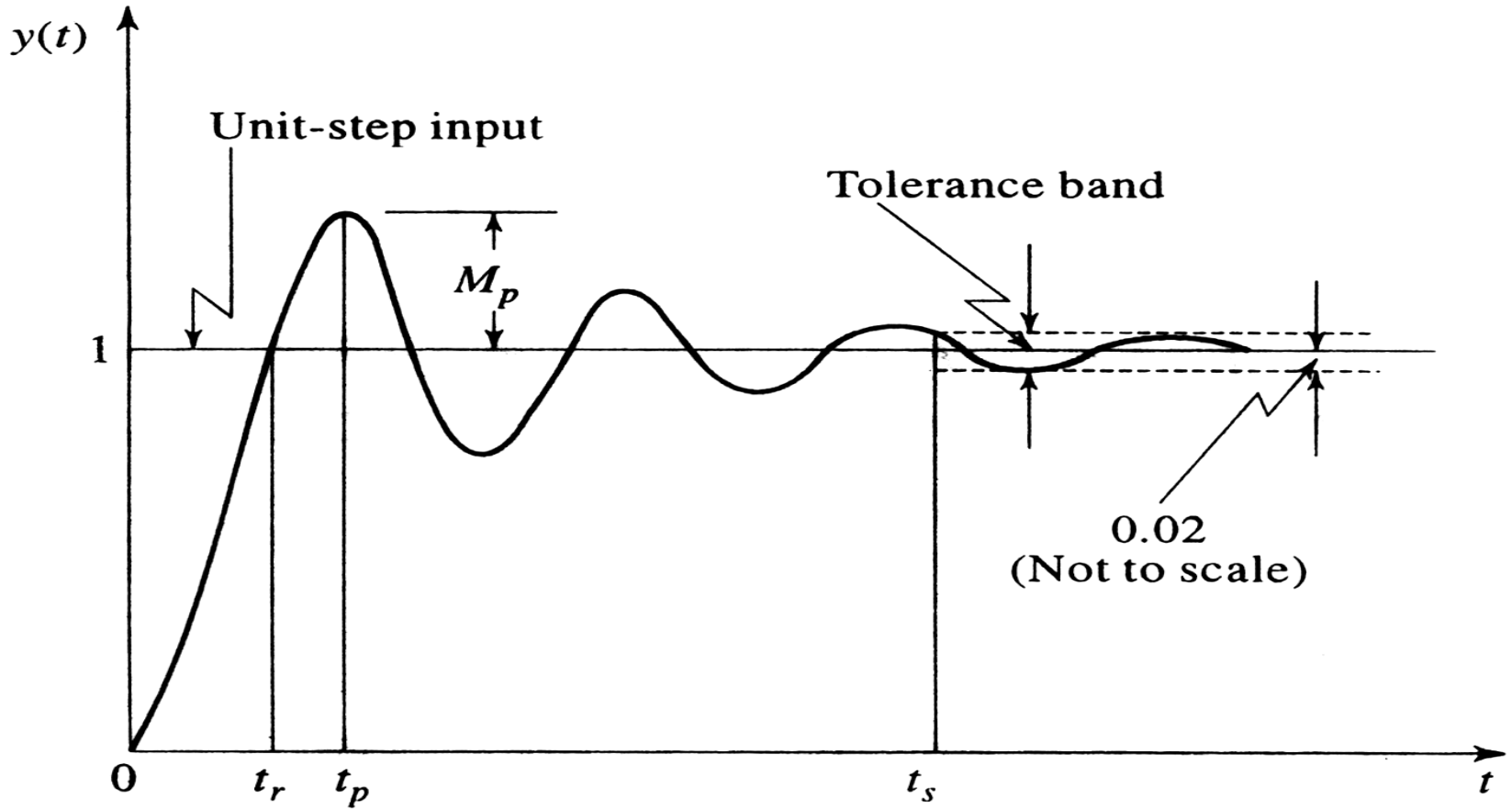

y(t)
$1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$
1
$1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$
t

مقدمة



زمن الارتفاع Rise Time

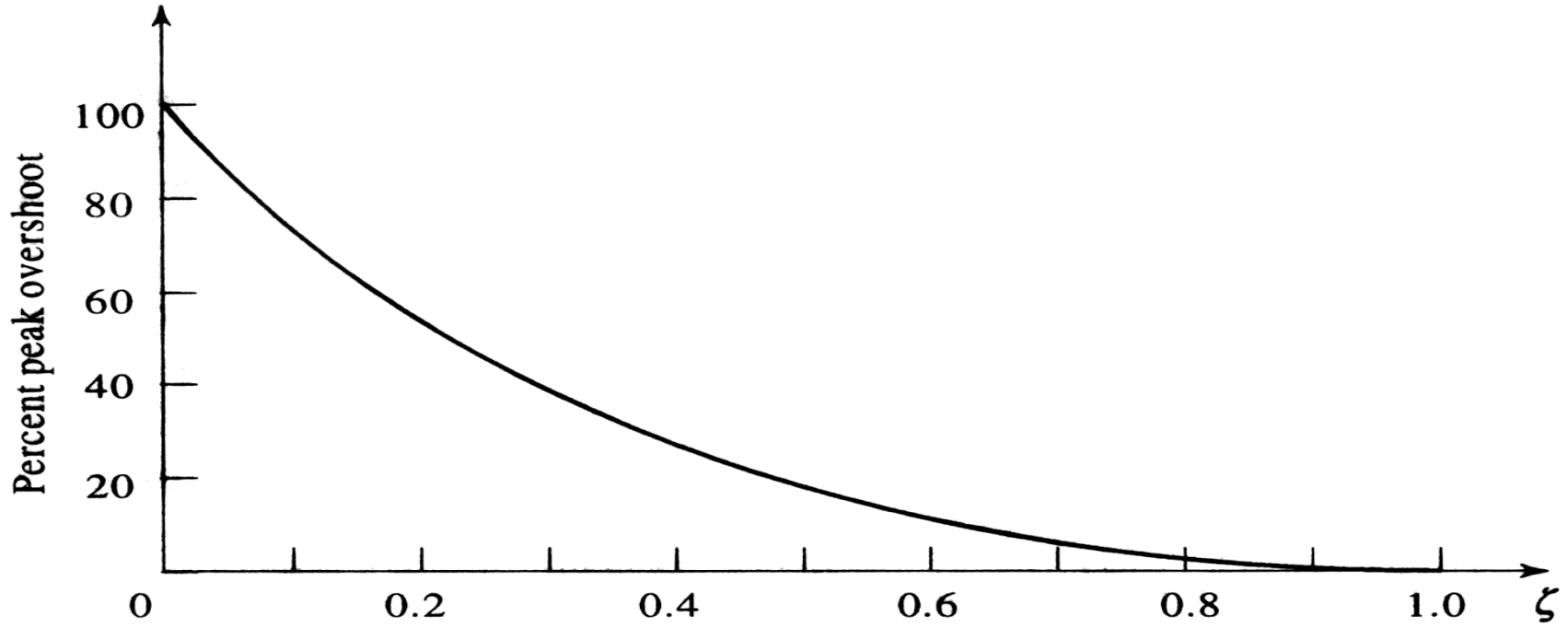
$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad , \quad \theta = \cos^{-1}\zeta$$



قمة التجاوز Peak Overshoot

$$M_p = 100.e^{\frac{-\pi\ \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\ \%$$

$$\zeta^2 = \frac{\left[\ln\left(M_p\right)\right]^2}{\left[\ln\left(M_p\right)\right]^2 + \pi^2}$$



زمن الاستقرار Settling Time

$$t_s\,(5\%\,tolerance) \cong \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad , \quad 0 < \zeta < 0.68$$

$$t_s\,(2\%\,tolerance) \cong \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad , \quad 0 < \zeta < 0.8$$

خطأ الحالة الثابتةSteady–State Error

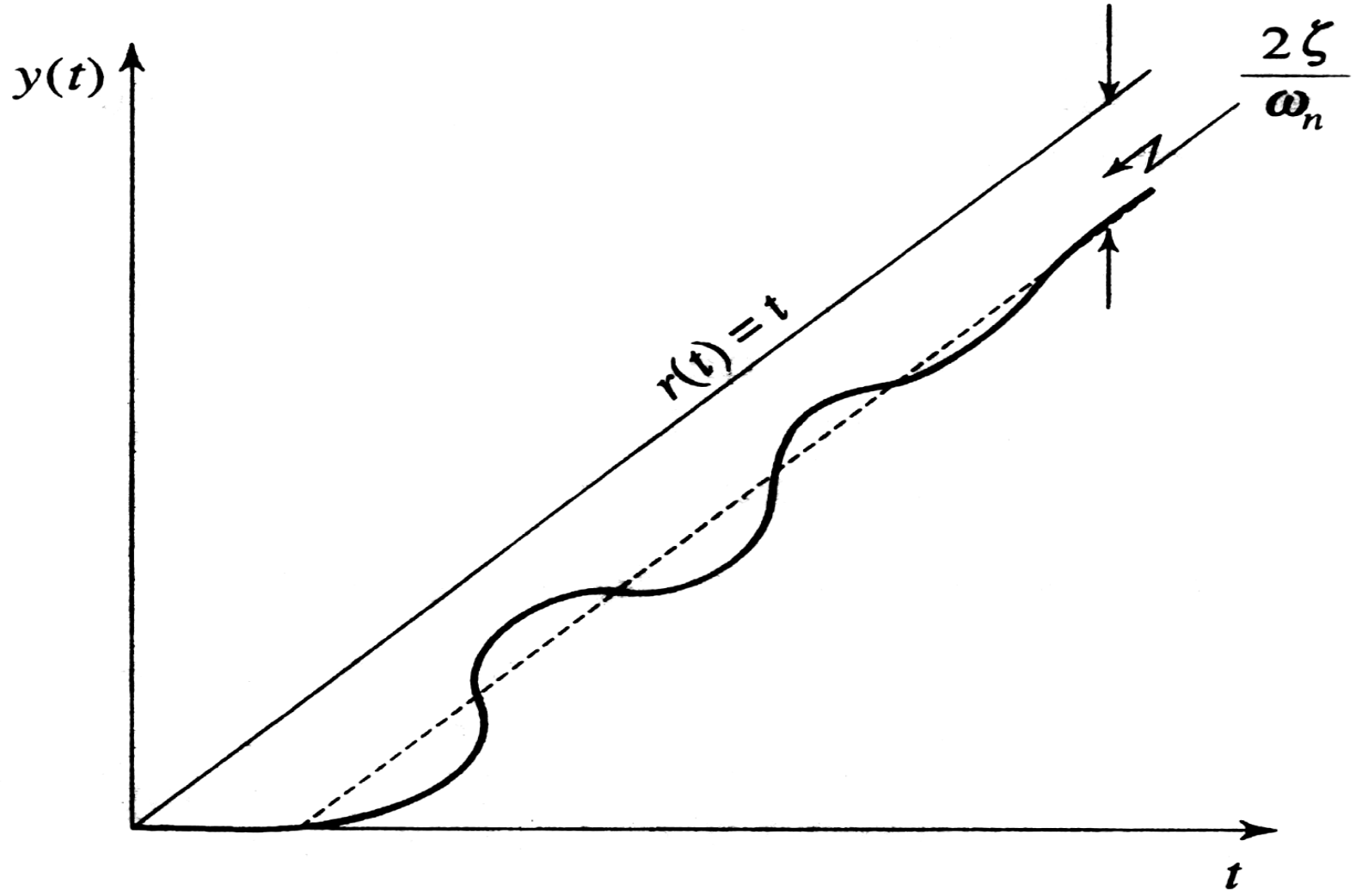
$$e_{ss}\Big|_{unit\ step} = \lim_{t\to\infty}\left[1-y(t)\right]=0$$

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2\left(s^2+2\ \zeta\ \omega_n\ s+\omega_n^2\right)}$$

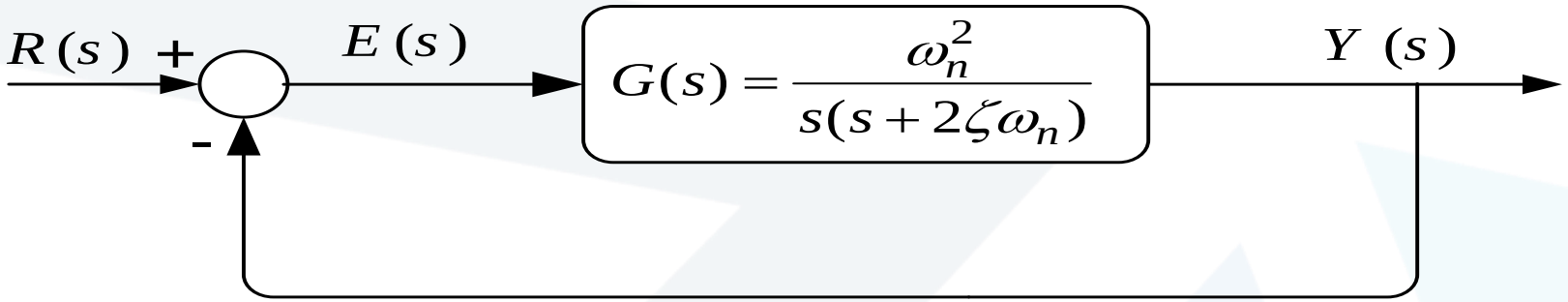
$$y(t)=t-\frac{2\zeta}{\omega_n}+\frac{e^{-\zeta\,\omega_n t}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t+2\theta\right) \qquad 0<\zeta<1$$

$$e_{ss}\Big|_{unit\ ramp} = \lim_{t\to\infty}\left[t-y(t)\right]=\frac{2\zeta}{\omega_n}$$

خطأ الحالة الثابتةSteady–State Error



خطأ الحالة الثابتةSteady–State Error



$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s) = \frac{s\left(s+2\zeta\,\omega_n\right)}{s^2+2\,\zeta\,\omega_n\,s+\omega_n^2} R(s)$$

$$E(s) = \frac{s+2\zeta\,\omega_n}{s\left(s^2+2\,\zeta\,\omega_n\,s+\omega_n^2\right)}$$

$$e_{ss}\Big|_{unit\ ramp} = \lim_{S\to 0} sE(s) = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

تأثيرات صفر إضافي و قطب إضافي
Effects of an Additional Zero and an Additional Pole

$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\ \zeta\ \omega_n\ s+\omega_n^2}$$

$$M_1(s)=\frac{Y_1(s)}{R(s)}=\frac{(s+\alpha)\frac{\omega_n^2}{\alpha}}{s^2+2\ \zeta\ \omega_n\ s+\omega_n^2}$$

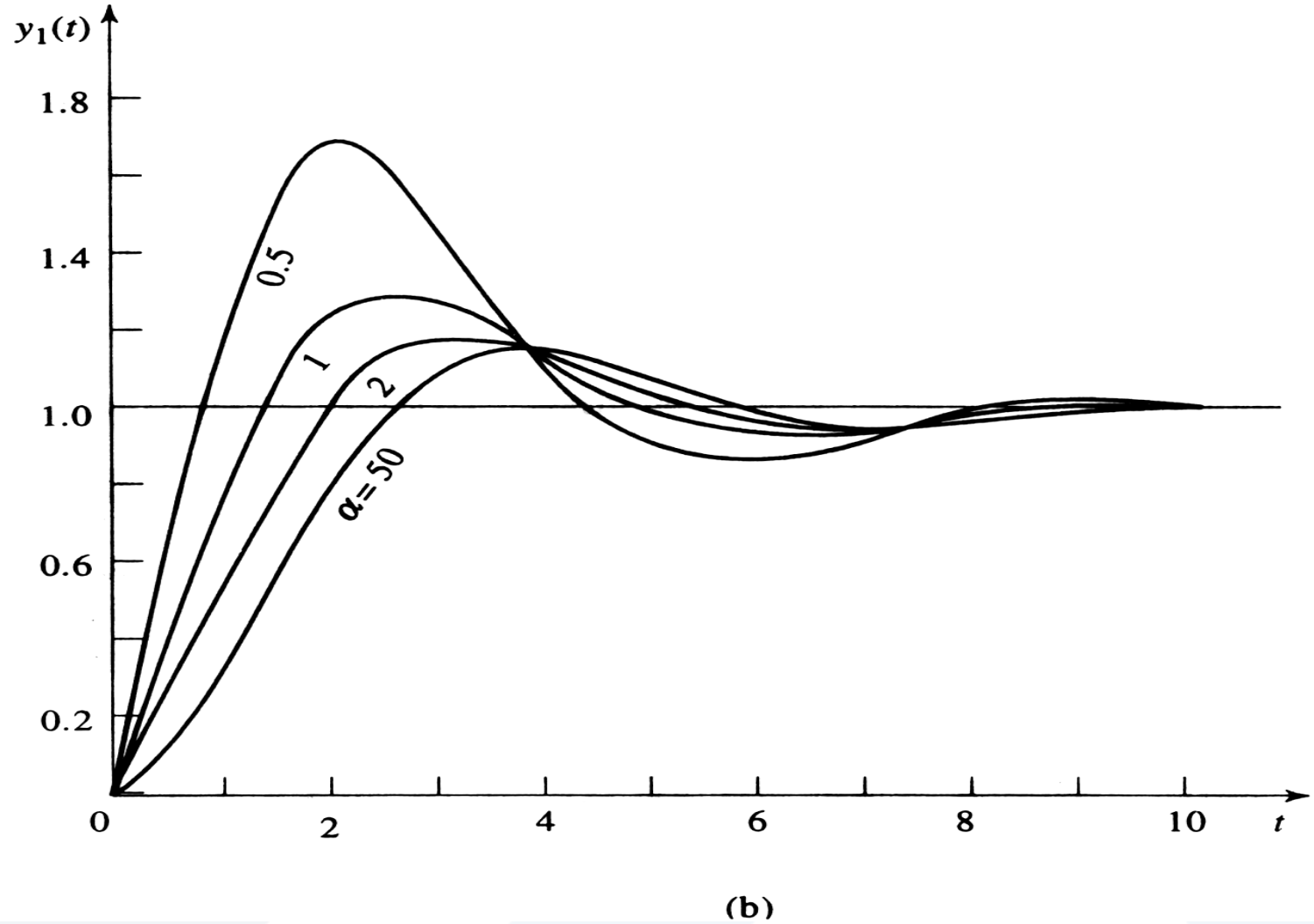
$$Y_1(s)=\frac{(s+\alpha)\frac{\omega_n^2}{\alpha}}{s\left(s^2+2\ \zeta\ \omega_n\ s+\omega_n^2\right)}$$

$$=\frac{\omega_n^2}{s\left(s^2+2\ \zeta\ \omega_n\ s+\omega_n^2\right)}+\frac{s}{\alpha}\frac{\omega_n^2}{s\left(s^2+2\ \zeta\ \omega_n\ s+\omega_n^2\right)}$$

$$=Y\ (s)+\frac{s}{\alpha}Y\ (s)$$

تأثيرات صفر إضافي و قطب إضافي

Effects of an Additional Zero and an Additional Pole



(b)

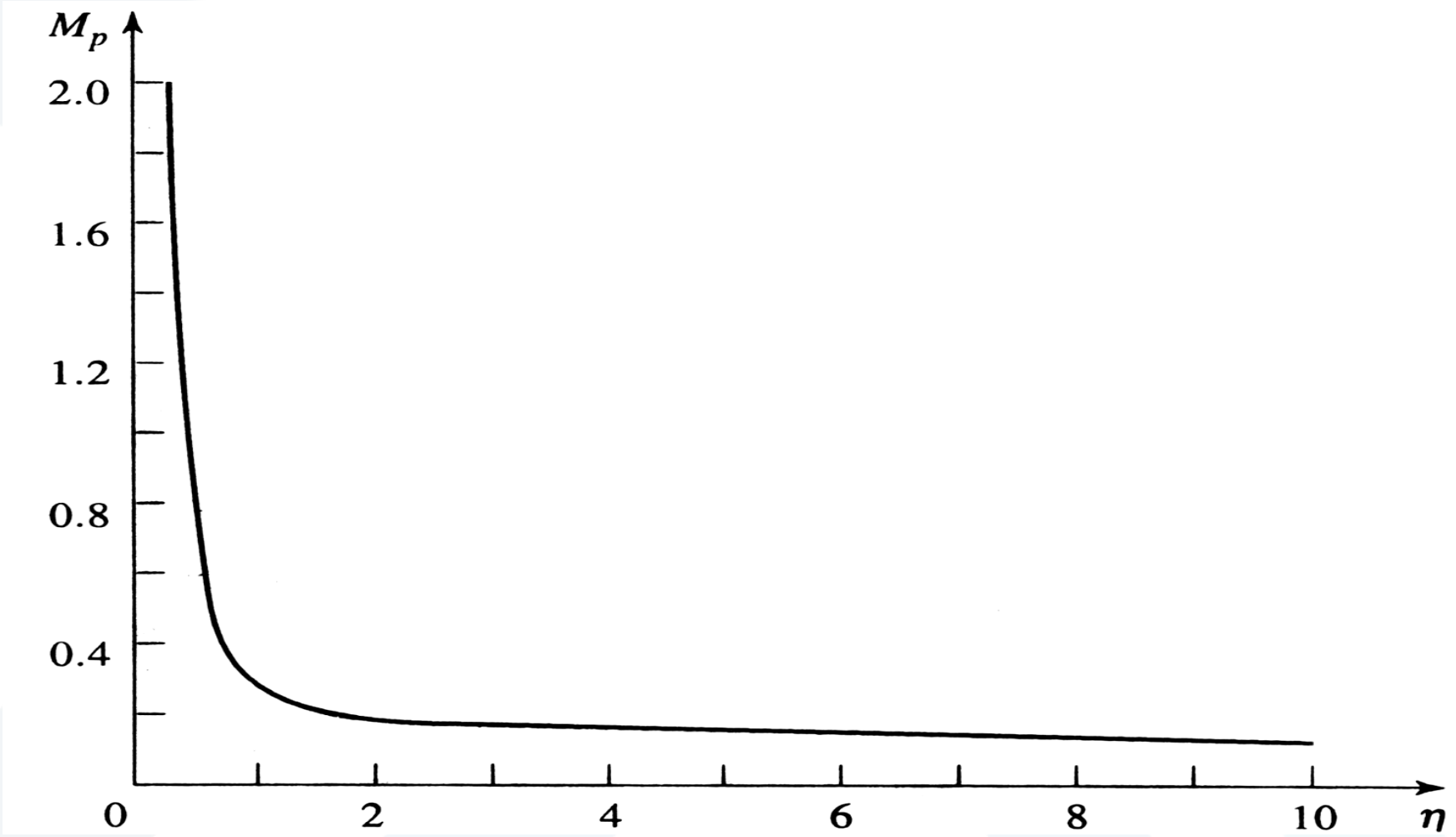
تأثيرات صفر إضافي و قطب إضافي

Effects of an Additional Zero and an Additional Pole

$$\alpha = \eta\,\zeta\,\omega_n$$

$$\zeta = 0.5$$

$$\omega_n = 1$$



تأثيرات صفر إضافي و قطب إضافي

Effects of an Additional Zero and an Additional Pole

$$M_2(s) = \frac{Y_2(s)}{R(s)} = \frac{\alpha\omega_n^2}{(s+\alpha)\left(s^2 + 2\ \zeta\ \omega_n\ s + \omega_n^2\right)}$$

$$Y_2(s) = \frac{\alpha\omega_n^2}{s\,(s+\alpha)\left(s^2 + 2\ \zeta\ \omega_n\ s + \omega_n^2\right)}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{s} + \frac{A_1}{(s+\alpha)} + \frac{A_2}{s + \zeta\ \omega_n - j\ \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{A_2^*}{s + \zeta\ \omega_n + j\ \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

تأثيرات صفر إضافي و قطب إضافي

Effects of an Additional Zero and an Additional Pole

$$A_1 = \frac{\omega_n^2\ \alpha}{\alpha e^{j\pi} K e^{j(\pi+\phi)} K e^{j(\pi-\phi)}} = \frac{\omega_n^2}{K^2 e^{j\pi}} = -\frac{\omega_n^2}{K^2}$$

$$A_2 = \frac{\alpha}{2K\sqrt{1-\zeta^2}\, e^{j(\pi-\theta+\frac{\pi}{2}+\phi)}} = \frac{\alpha\ e^{j(\frac{\pi}{2}+\theta-\phi)}}{2K\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$y_2(t) = 1 - \frac{\omega_n^2}{K^2}\ e^{-\alpha t} + \frac{\alpha}{K\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t + \theta + \frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}|A_1| = 1 \quad , \quad \lim_{\alpha\to 0}|A_2| = 0$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}|A_1| = 0 \quad , \quad \lim_{\alpha\to\infty}|A_2| = \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}}$$

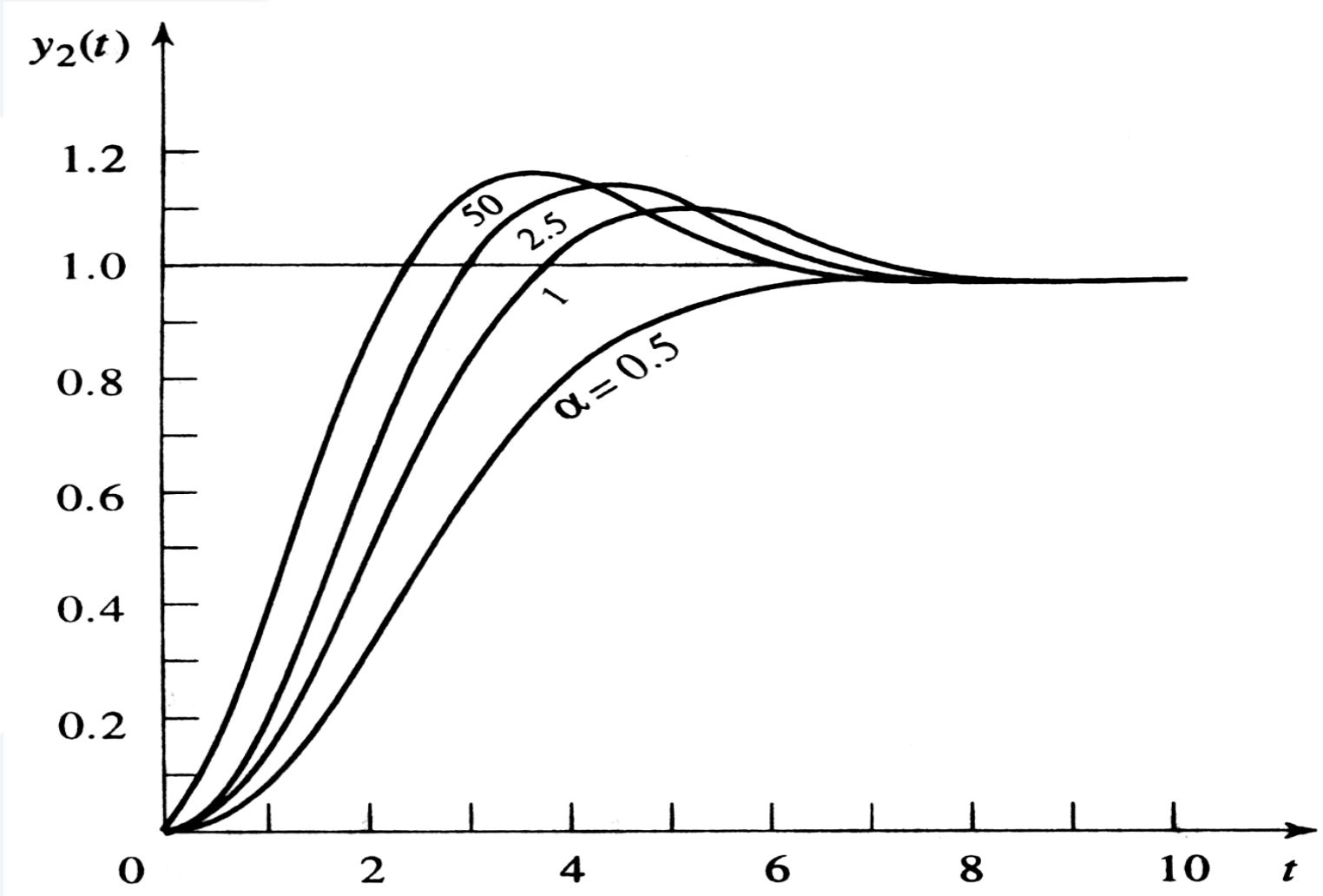
و

تأثيرات صفر إضافي و قطب إضافي

Effects of an Additional Zero and an Additional Pole

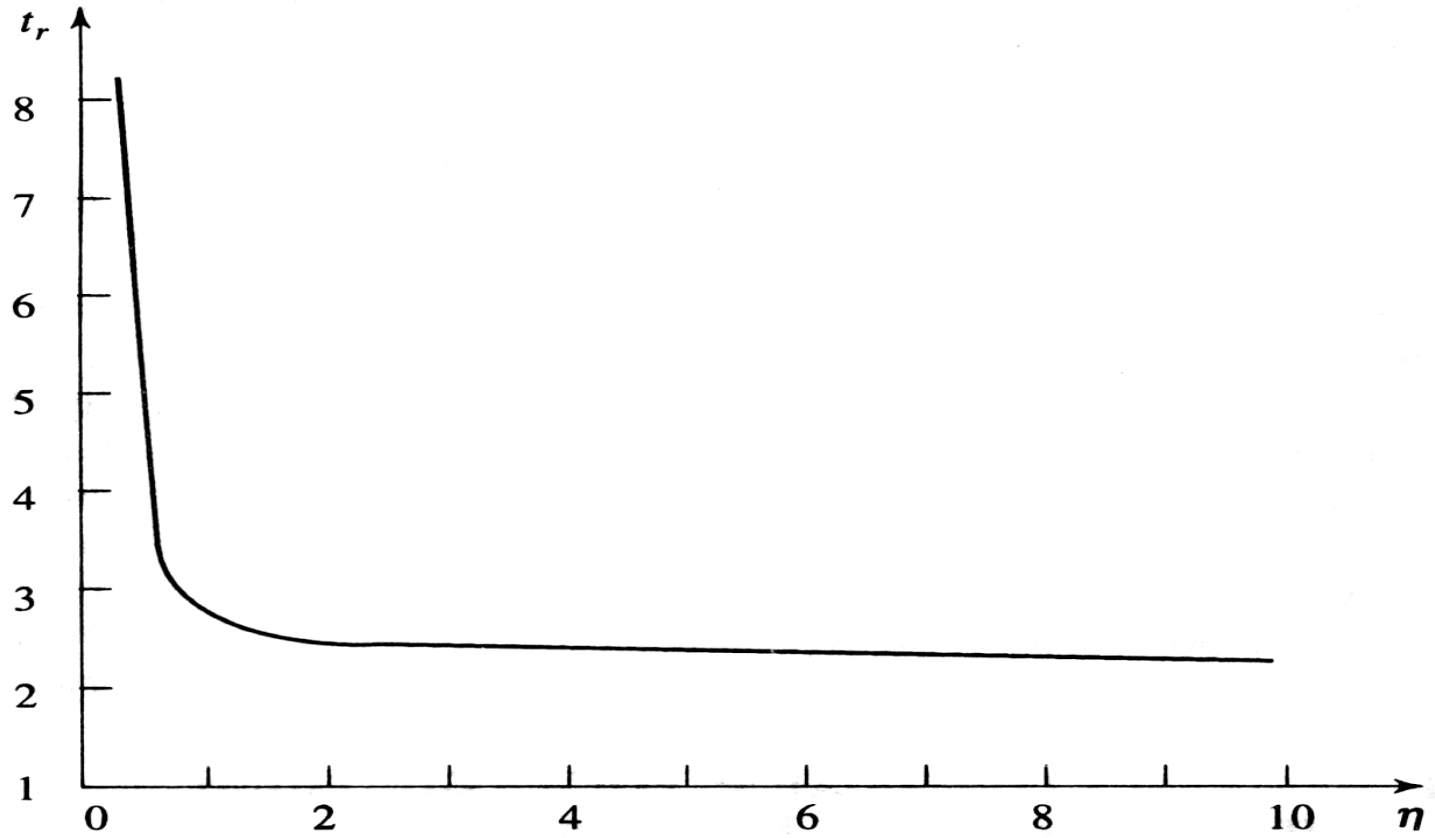
$$\zeta = 0.5,\ \omega_n = 1$$

$$s = -\alpha = -\eta\,\zeta\,\omega_n$$

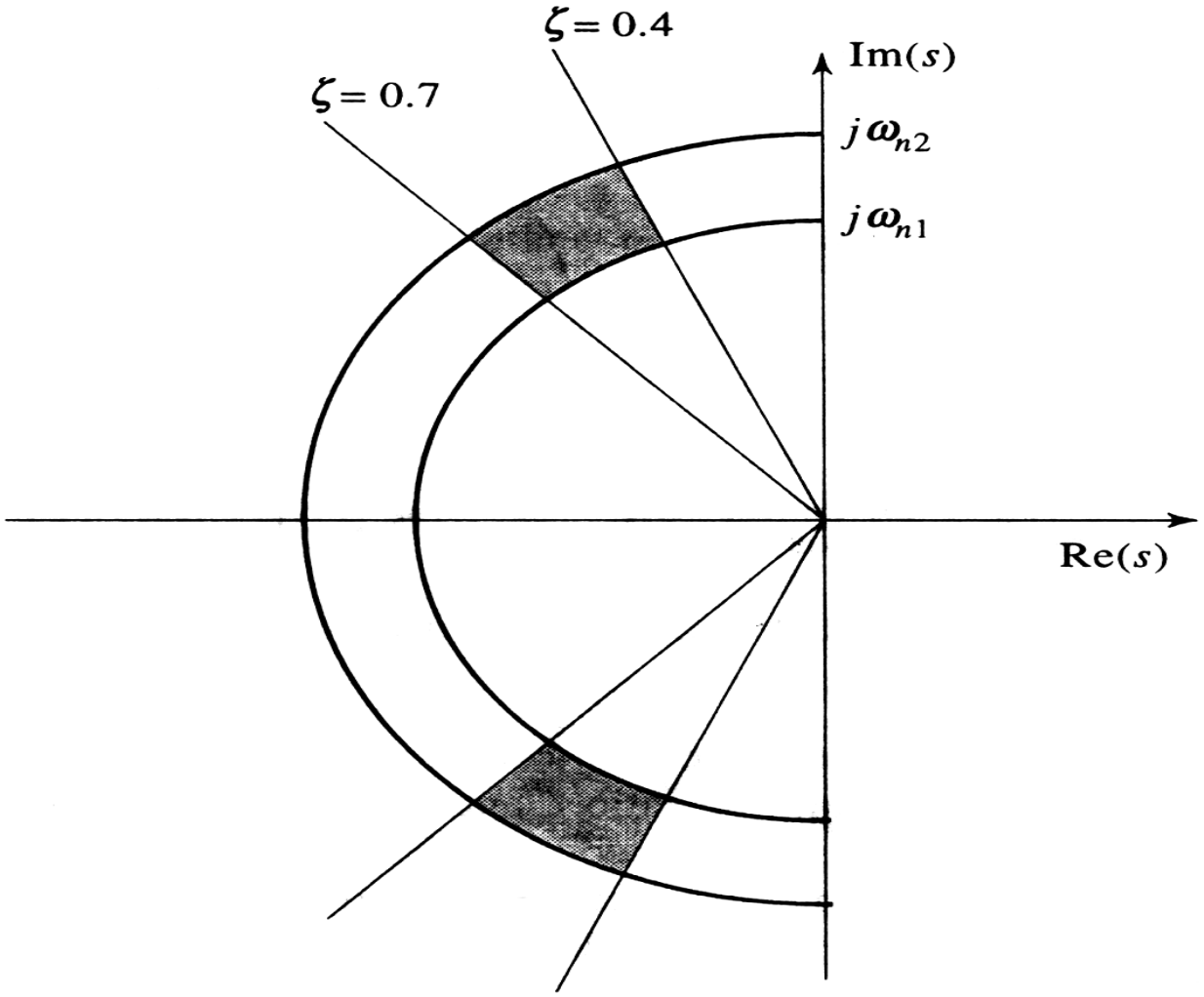


تأثيرات صفر إضافي و قطب إضافي
Effects of an Additional Zero and an Additional Pole

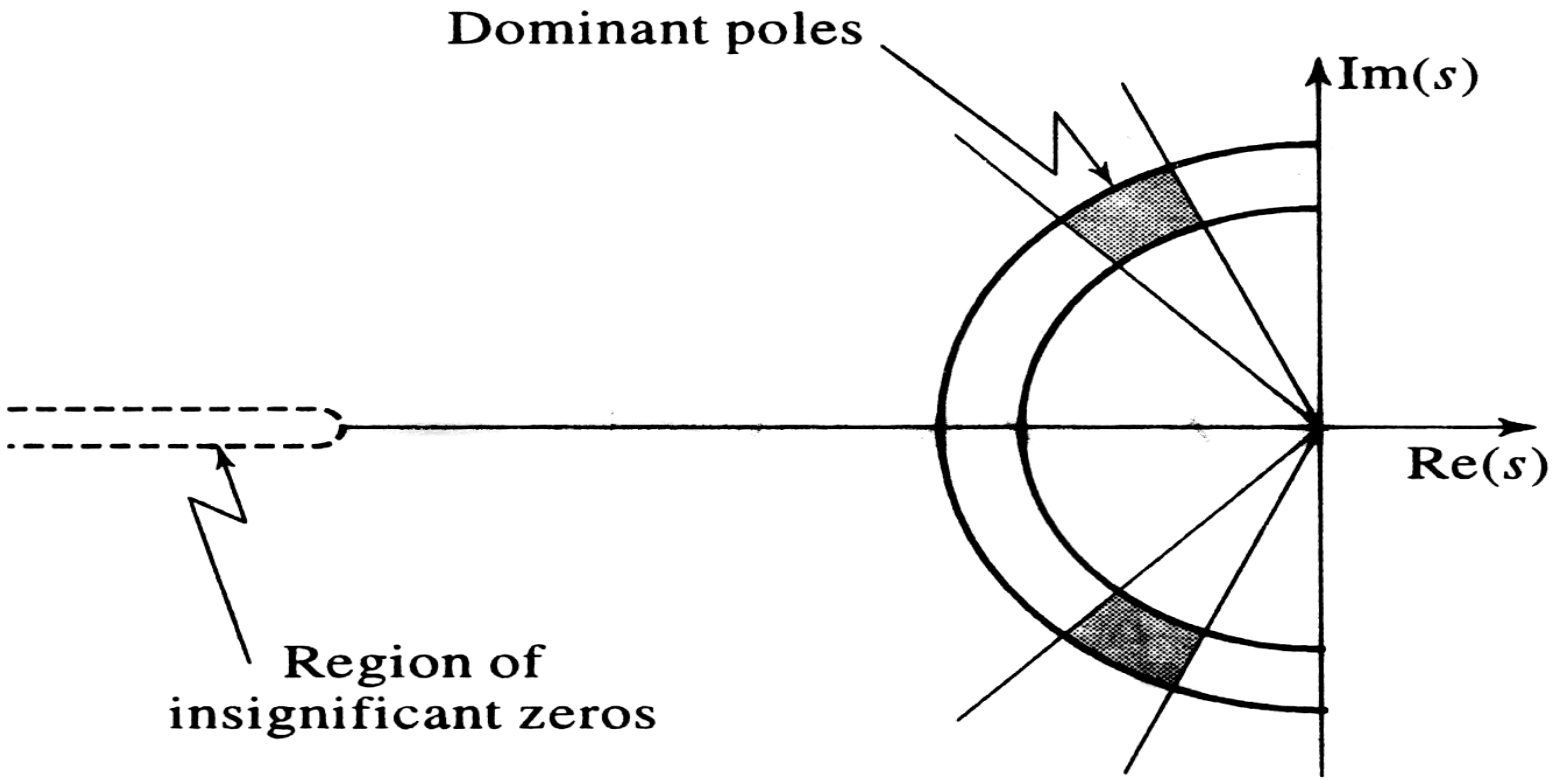
$$\zeta = 0.5, \quad \omega_n = 1$$



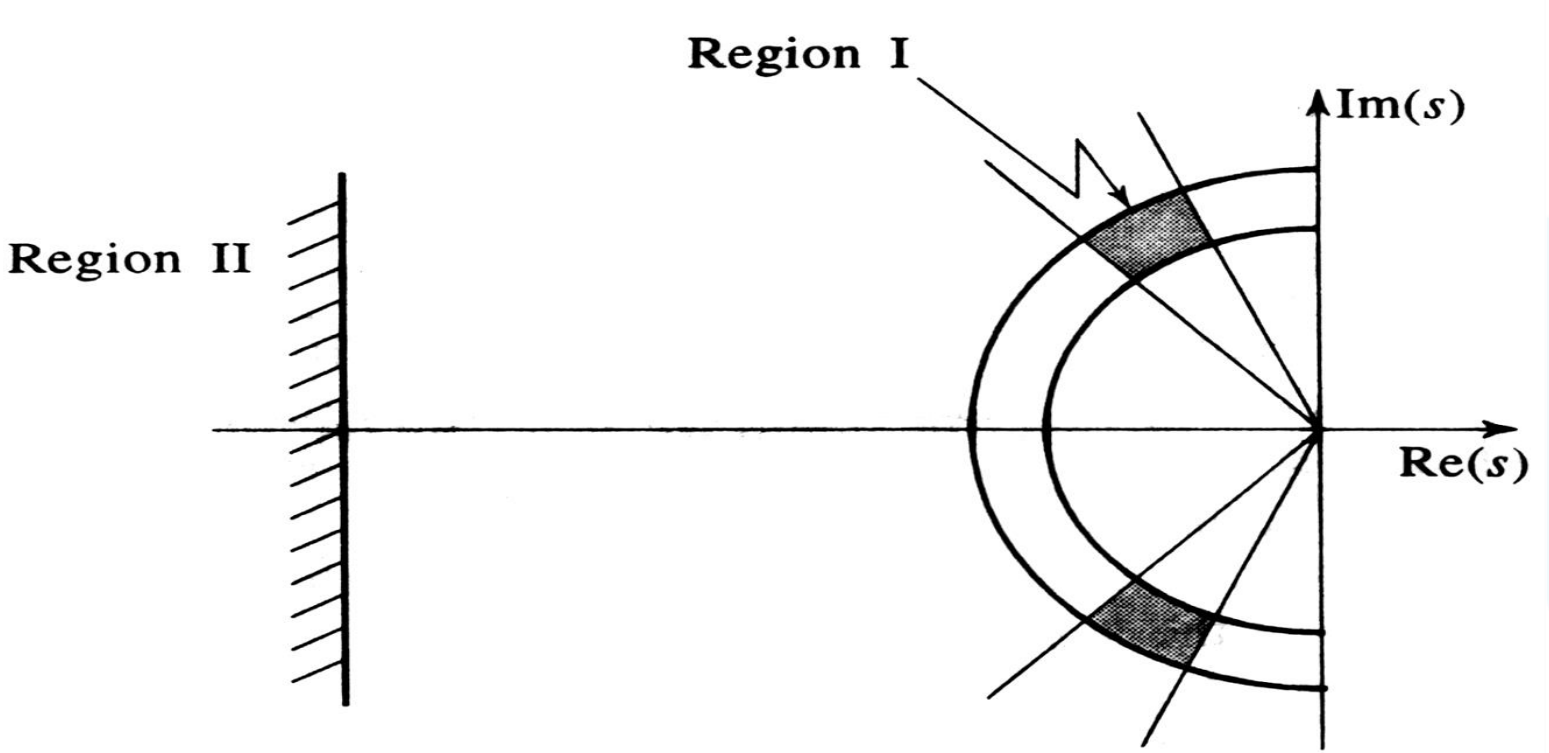
مواقع أقطاب الحلقة المغلقة المرغوبة وشرط السيطرة



مواقع أقطاب الحلقة المغلقة المرغوبة وشرط السيطرة



مواقع أقطاب الحلقة المغلقة المرغوبة وشرط السيطرة



مواقع أقطاب الحلقة المغلقة المرغوبة وشرط السيطرة

$$G_1(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+2)}$$

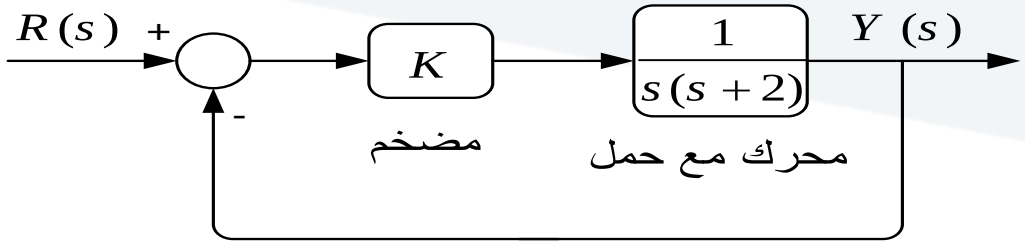
$$G_2(s) = \frac{2(s+1.1)}{1.1(s+1)(s+2)} = \frac{2}{1.1}\left(\frac{0.1}{(s+1)} + \frac{0.9}{(s+2)}\right)$$

$$= \frac{0.18}{(s+1)} + \frac{1.64}{(s+2)}$$

ثوابت خطأ الحالة الثابتة ورقم نوع النظام

$type\ of\ \ input$	$steady\ -state\ error$		
	$type-0\ system$	$type-1\ system$	$type-2\ system$
$unit-step$	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0
$unit-ramp$	∞	$\frac{1}{K_v}$	0
$unit-parabolic$	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$
	$K_p=\lim_{s\to 0} D(s)G(s)$	$K_v=\lim_{s\to 0} sD(s)G(s)$	$K_a=\lim_{s\to 0} s^2D(s)G(s)$

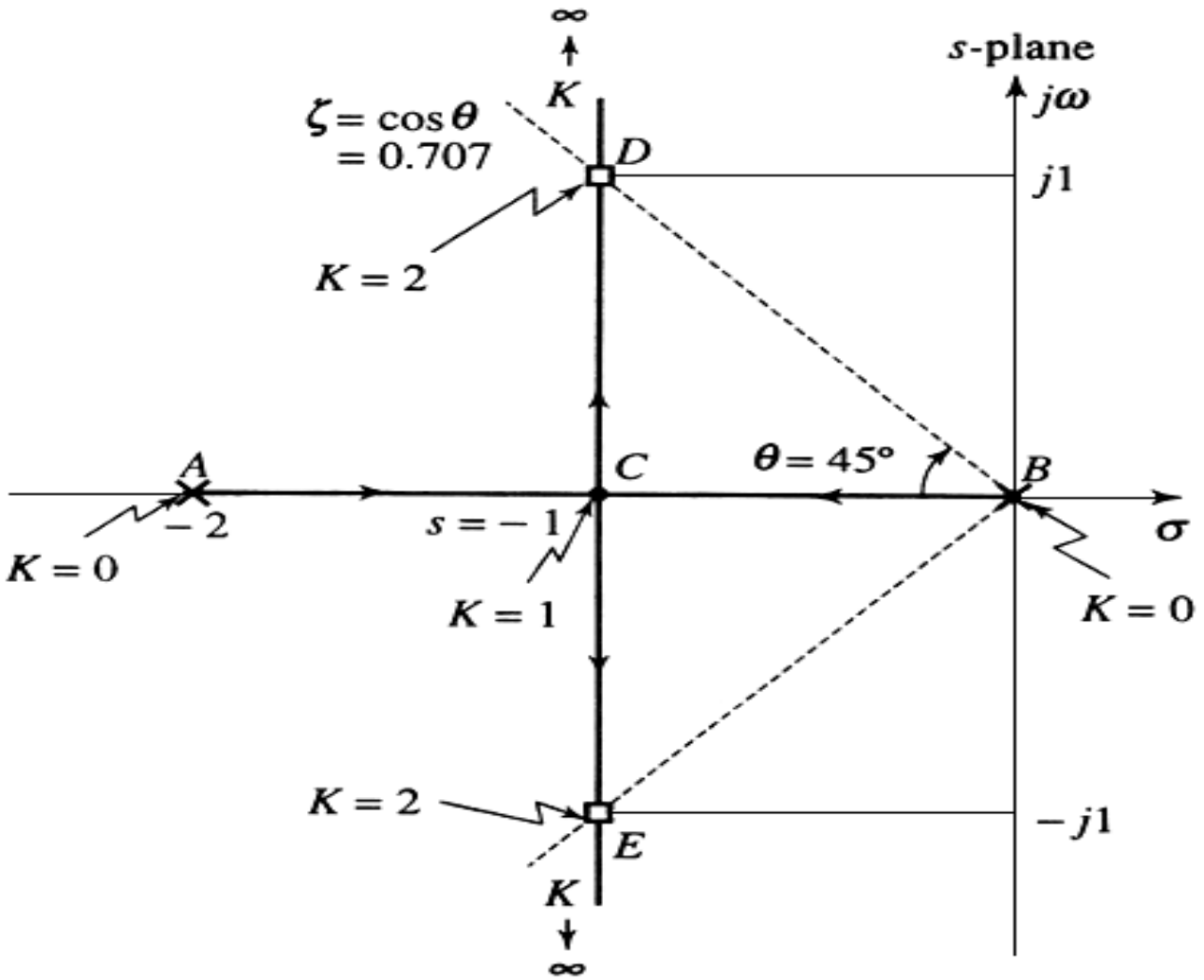
تصميم المعوض باستخدام مخططات مسار الجذور
Compensator Design Using Root Locus Plots



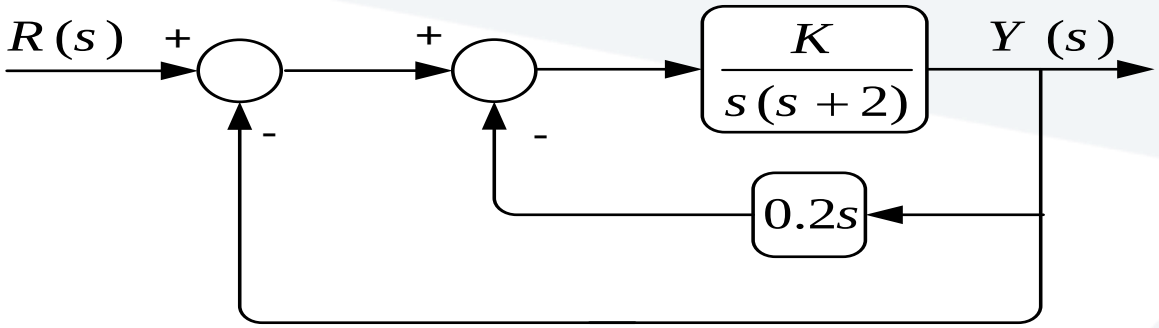
$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^2+2s+K}$$

$$\Delta(s) = s^2 + 2s + K = 0$$

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$$



تصميم المعوض باستخدام مخططات مسار الجذور
Compensator Design Using Root Locus Plots



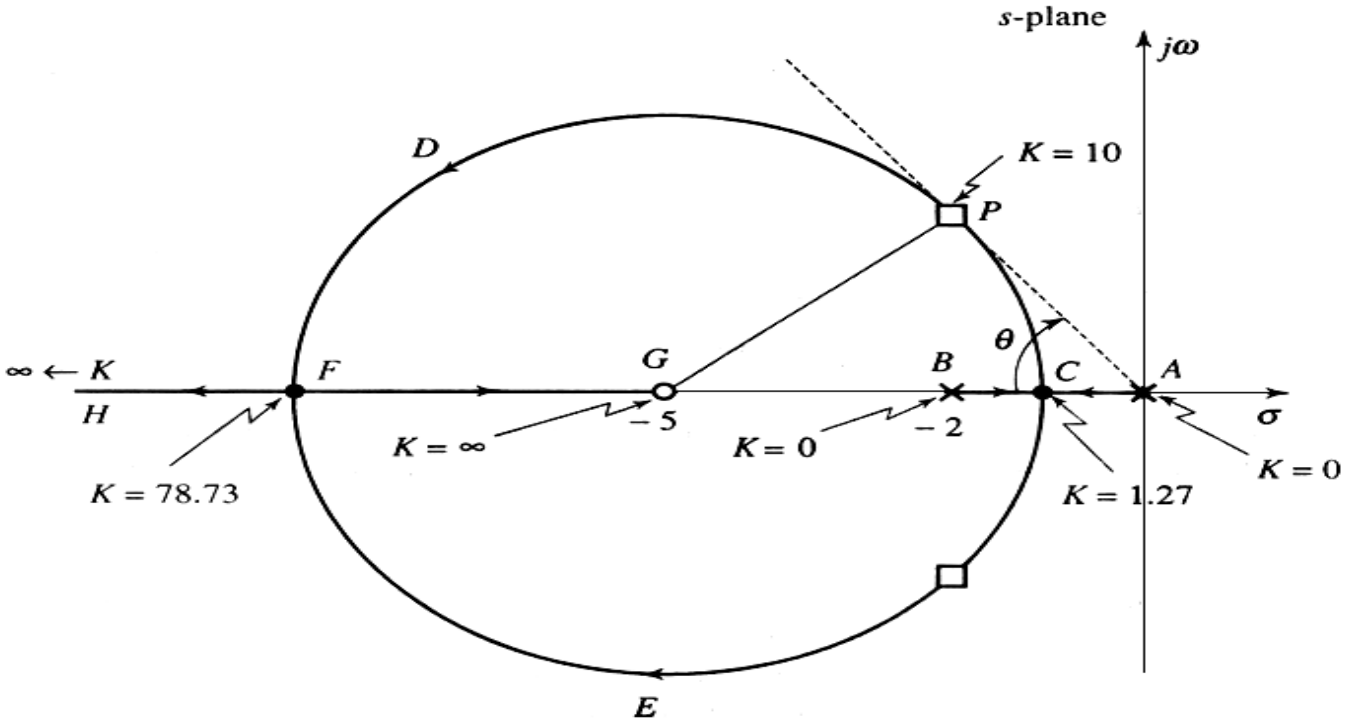
$$M(s) = \frac{K}{s^2 + (0.2K + 2)s + K}$$

$$\Delta(s) = s^2 + (0.2K + 2)s + K = 0$$

$$s^2 + 2s + K(0.2s + 1) = 0$$

$$1 + \frac{0.2K(s + 5)}{s(s + 2)} = 0$$

$$s_{1,2} = -(0.1K + 1) \pm \sqrt{(0.1K + 1)^2 - K}$$



معادلات المسار Locus Equations

$$F(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}=-1$$

Magnitude Criterion

$$|F(s)|=\frac{K\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s+p_j|}=1$$

مAngle Criterion

$$\angle F(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle s+z_i-\sum_{j=1}^{n}\angle s+p_j=\pm 180\,(2q+1);$$

$$q=0,1,2,3$$

القواعد الدليلية لرسم مسارات الجذور

Guidelines for Sketching Root LoCİ

$$1+F(s)=0$$

$$1+K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}=0;\quad K\geq 0, n\geq m$$

من الصفر ١- مخطط مسار الجذور يتألف من مسار جذر عندما تتغير إلى . ويكون مسار الجذور متناظراً بالنسبة للمحور الحقيقي.

من ، فإن مسارات الجذور تبدأ من أقطاب الحلقة ٢- عندما تزداد المفتوحة عندما وتنتهي إما عند أصفار الحلقة المفتوحة أو في اللانهاية عندما ، ويكون عدد المسارات التي تنتهي عند اللانهاية مساوياً إلى عدد أقطاب الحلقة المفتوحة مطروحاً منه عدد أصفارها .

التي تتجه إلى اللانهاية على طول $n-m$ ٣- عدد مسارات الجذور خطوط مقاربة مستقيمة تشع من نقطة وحيدة على المحور الحقيقي (تدعى نقطة تقاطع المقاربات)، حيث:

القواعد الدليلية لرسم مسارات الجذور

Guidelines for Sketching Root Loci

$$-\sigma_A = \frac{\sum real\ parts\ of\ \ open\text{-}loop\ \ poles - \sum real\ parts\ of\ open\text{-}loop\ \ zeros}{number\ of\ poles(n)\ -\ \ number\ of\ zeros(m)}$$

- ولهذه المقاربات زاوية تحدد وفق العلاقة التالية:

$$\phi_A = \frac{(2q+1)180^\circ}{n-m} \qquad q = 0, 1, 2, \ldots, (n-m-1)$$

- ٤- تكون نقطة ما من المحور الحقيقي تقع على مسار الجذور إذا كان مجموع عدد أقطاب الحلقة المفتوحة وأصفارها الواقعة على المحور الحقيقي إلى اليمين من هذه النقطة مساوياً عدداً فردياً. باستخدام هذه الحقيقة الإضافية يمكن تقسيم المحور الحقيقي إلى قطع من المسار on-locus وقطع ليست من المسار not-on-locus ونقاط التقسيم هذه هي أقطاب وأصفار الحلقة المفتوحة الحقيقية.

القواعد الدليلية لرسم مسارات الجذور
Guidelines for Sketching Root Loci

٥- يمكن تحديد نقاط تقاطع مسار الجذور مع المحور التخيلي (إذا وجدت) باستخدام معيار راوث.

٦- زاوية المغادرة للمسار عن قطب الحلقة المفتوحة تعطى:

ϕ_p

حيث هي مساهمة شبكة الزوايا عند هذا القطب لكل أقطاب وأصفار الحلقة المفتوحة الأخرى.

٧- زاوية الوصول للمسار إلى صفر عقدي تُعطى بالعلاقة:

$$\phi_p = 180^\circ + \phi$$

ϕ

حيث هي مساهمة شبكة الزوايا عند هذا الصفر لكل أقطاب وأصفار الحلقة المفتوحة الأخرى.

ϕ_z

$$\phi_z = 180^\circ - \phi$$

ϕ

القواعد الدليلية لرسم مسارات الجذور
Guidelines for Sketching Root Loci

٨- النقاط حيث تحدث الجذور المكررة للمعادلة المميزة (نقاط انفراج أو التقاء مسار الجذور) هي حلول للمعادلة:

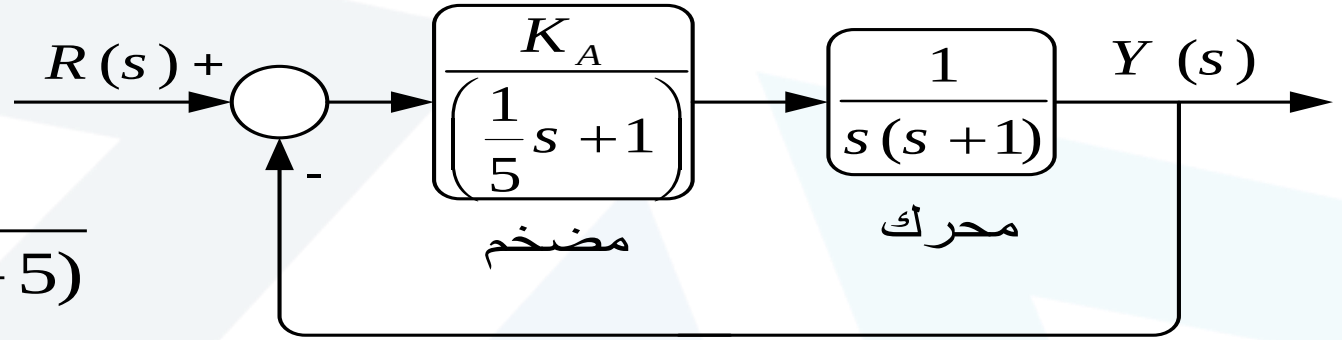
$$\frac{dK}{ds} = 0 \qquad K = \frac{\prod_{j=1}^{n}(s + p_j)}{\prod_{i=1}^{m}(s + z_i)}$$

٩- تُعطى قيم البارامتر K عند أيّ نقطة s_0 على مسار الجذور بالعلاقة:

$$K = \frac{\prod_{j=1}^{n}|(s + p_j)|}{\prod_{i=1}^{m}|(s + z_i)|} = \frac{[product\ of\ \ phasor\ lengths\ (read\ to\ scale)\ from\ s_0\ to\ poles\ of\ \ F(s)]}{[product\ of\ \ phasor\ lengths\ (read\ to\ scale)\ from\ s_0\ to\ zeros\ of\ \ F(s)]}$$

إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الأولى:** ليكن لدينا النظام التالي تابع تحويل دارته المفتوحة هو:

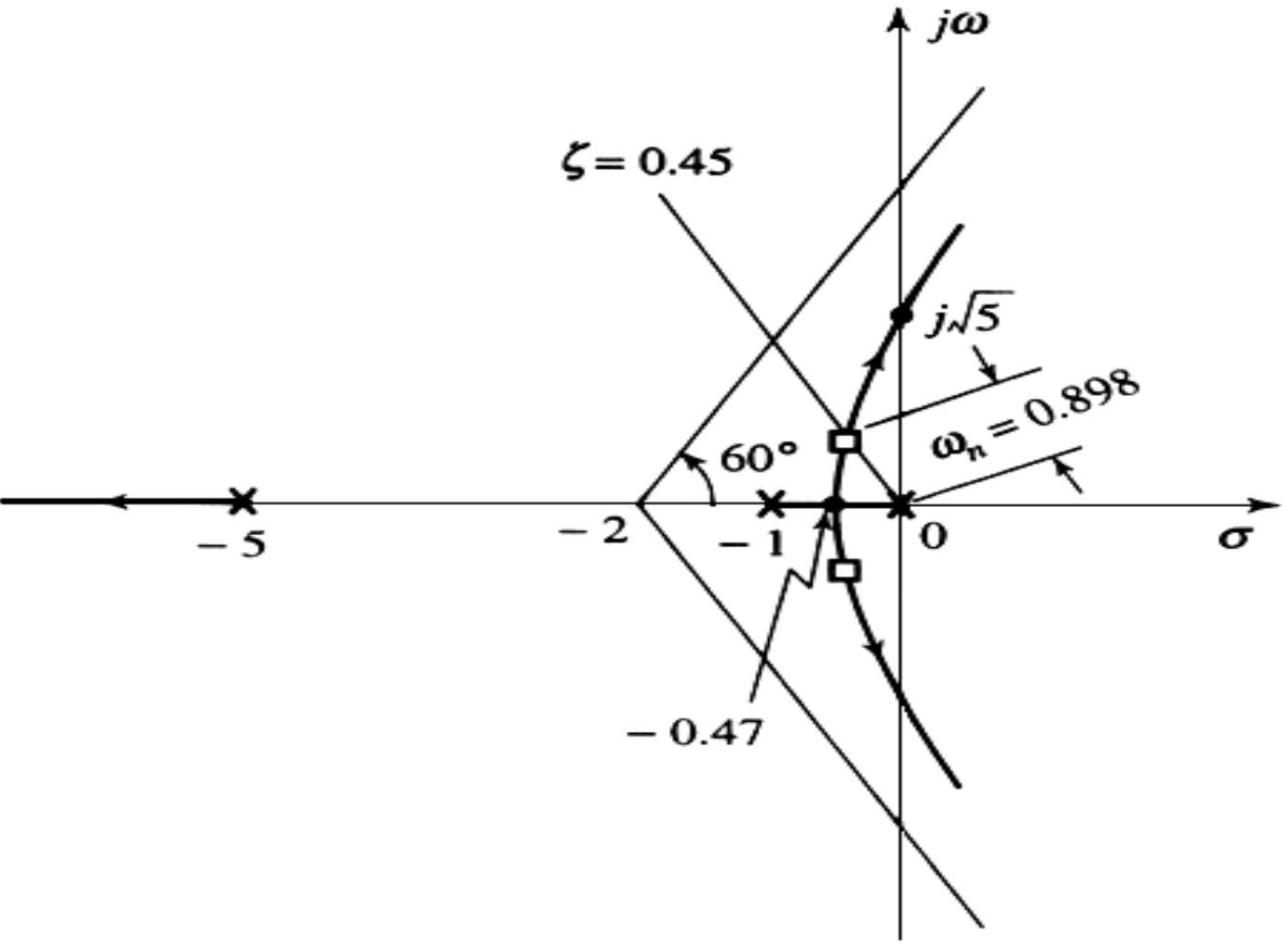


$$G(s)=\frac{5K_A}{s(s+1)(s+5)}=\frac{K}{s(s+1)(s+5)}$$

بفرض أنّ خصائص الاستقرار النسبي تتطلب نسبة تخامد $\zeta = 0.45$ (قمة تجاوز تقريباً 20%). يتقاطع خط ζ مع مسار الجذر عند النقطة $s = -0.404 + j0.802$. فمن أجل زوج الأقطاب المسيطرة، نجد أنّ التردد الطبيعي غير المتخامد $\omega_n = 0.898 rad/\sec$، وزمن استقرار الاستجابة ($t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$) يكون حوالي $9.9\sec$. لذلك تكون الاستجابة العابرة لهذا النظام غير المعوّض بطيئة.

إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- المسألة التصميمية الأولى:

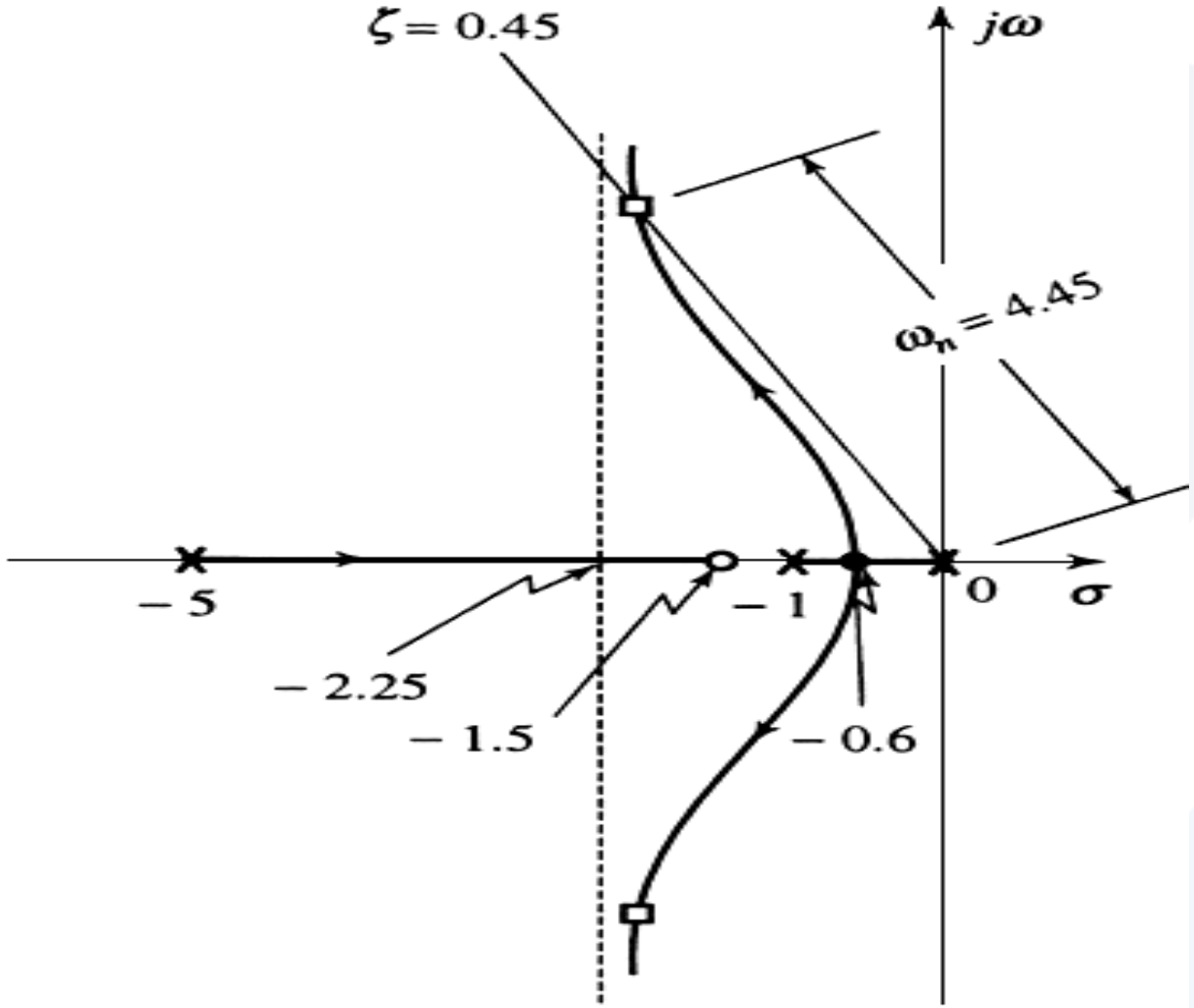


إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الأولى:**

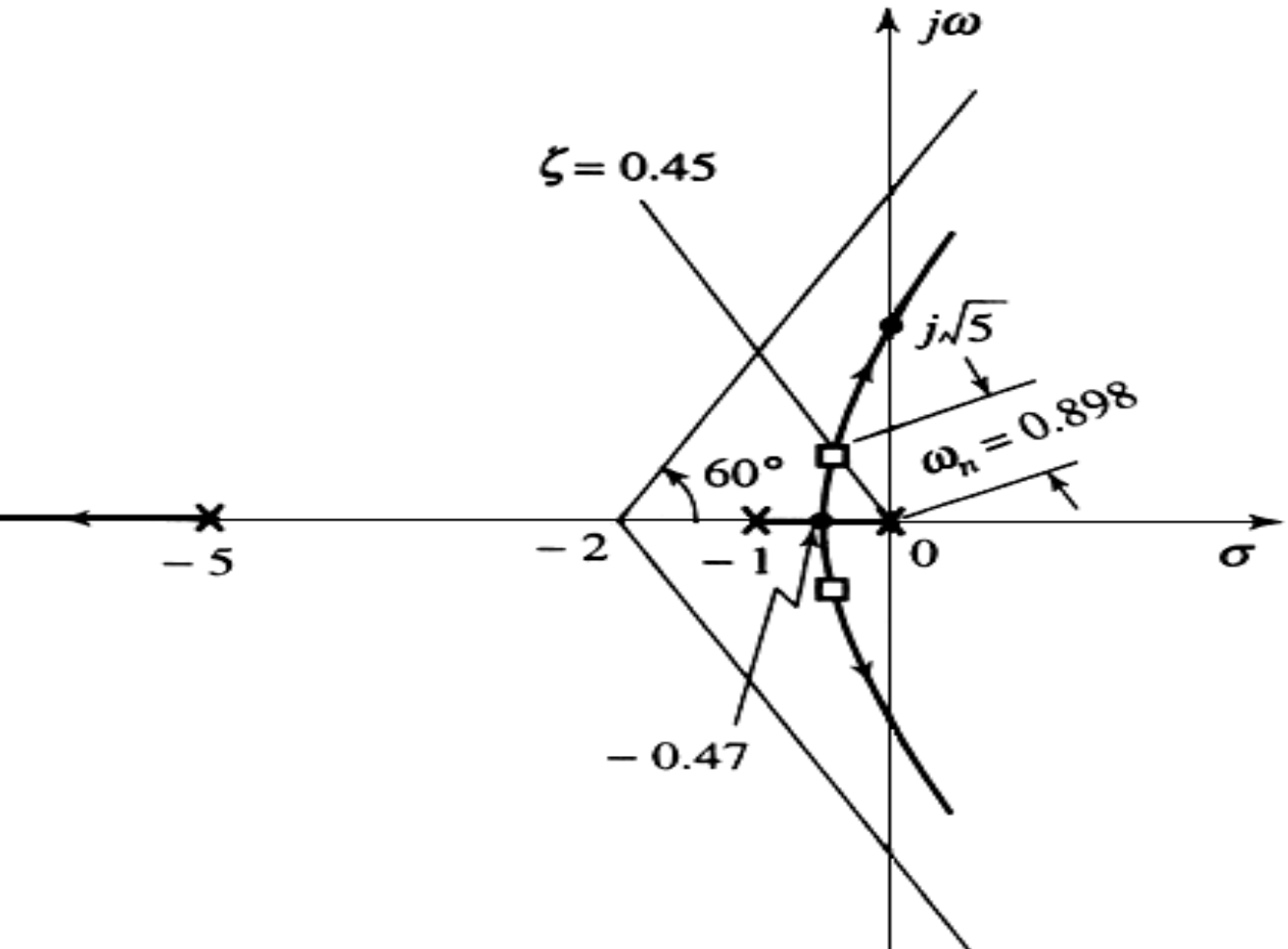
لذلك تكون الاستجابة العابرة لهذا لنظام غير المعوّض بطيئة. لكي نحسن سرعة الاستجابة، يجب إعادة تشكيل مسار الجذور بإزاحته بعيداً إلى اليسار على المحور التخيلي. للوصول لهذا الهدف سنقترح إضافة صفر كمعوّض. يوضح الشكل مخطط مسار الجذور للنظام مع صفر كمعوّض متوضع عند $s=-1.5$. من الملاحظ .أن تأثير الصفر هو تحريك المسار إلى اليسار باتجاه جزء المستوي_s الأكثر استقراراً، وإنّ الخط_ ζ (التي تساوي 0.45) يتقاطع مع مسار الجذر عند $s=-2+j4$. وأيضاً من أجل زوج الأقطاب المسيطرة يكون التردد الطبيعي غير المتخامد $\omega_n = 4.45\, rad/\sec$، وعندئذٍ يكون زمن استقرار الاستجابة حوالي 2 sec. وهكذا فإنّ إضافة الصفر كمعوّض يساعد في تحسين سرعة الاستجابة وذلك من أجل $\zeta = 0.45$.

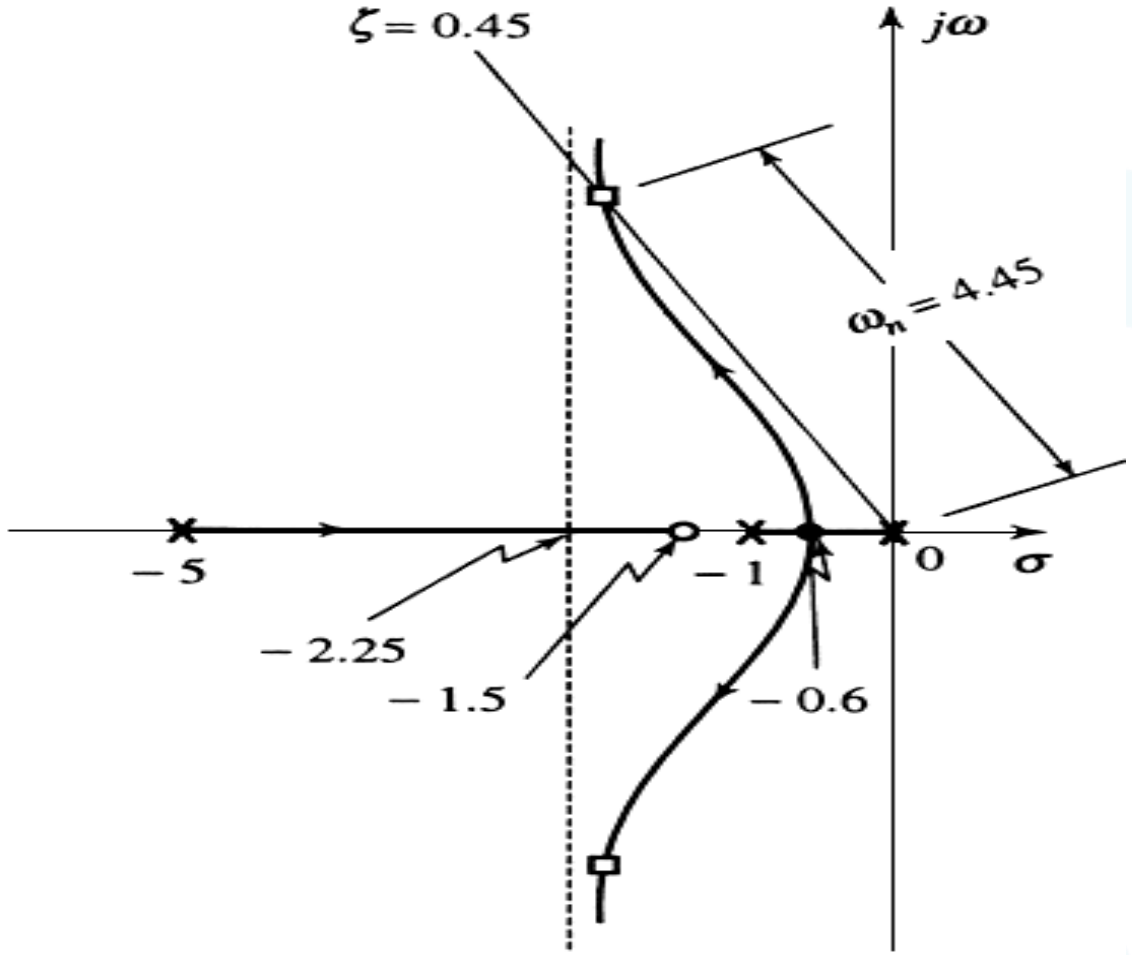
إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus



إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الأولى:**





إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الأولى:**
- يمكن ملاحظة تأثير الصفر كمعوض بتأمل الشكلين السابقين، إذ أنّه بدون الصفر كمعوِّض يكون الجذر الحقيقي المضاف إلى زوج الجذور العقدية المسيطرة يقع دائماً إلى اليسار من قطب الحلقة المفتوحة S=-5 إلى الحقيقي الجذر يتحرك كمعوِّض الصفر وبوجود أخرى جهة من . وبذلك يضعف شرط السيطرة. لكن وبما أن الجذر الحقيقي (الذي هو قطب S=-5 اليمين من الحلقة المغلقة) سوف يتوضع قريباً من الصفر المعوض، فإنّ مطال استجابته سيكون صغيراً. وأيضاً ستكون قيمة الثابت الزمني للجذر الحقيقي قابلاً للمقارنة(أي له قيمة معتبرة) مع الثابت الزمني لزوج الجذور العقدية المسيطرة؛ وبذلك يكون له تأثير على زمن الاستقرار.

إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الأولى:**

الجذور العقدية المسيطرة؛ وبذلك يكون له تأثير على زمن الاستقرار.

يمكن الحصول بشكل عام على استجابة عابرة مقبولة عن طريق ضبط موقع الصفر المعوض على المحور الحقيقي بطريقة التجربة والخطأ. يمكن بسهولة إجراء ذلك إذا وضعنا الصفر المعوض بعيداً جداً إلى اليسار (ليكن قرب قطب الحلقة المفتوحة S=-5)، مما يؤدي إلى تحسين شرط السيطرة، لكن يتم ضغط فروع المسار العقدية نحو اليمين وبالتالي تصبح الاستجابة الديناميكية ضعيفة.

إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الأولى:**

ومن جهة أخرى إذا وُضع الصفر قريباً من مبدأ الإحداثيات (ليكن إلى يمين قطب الحلقة المفتوحة $s = -1$)، فإن فروع المسار العقدية تبتعد إلى اليسار بشكل مفيد ولكن يظهر جذر حقيقي قريب من المبدأ. أيضاً هذا الجذر سوف يكون قريباً من الصفر المعوض؛ لذلك فإنّ مطال الاستجابة الناتج عن هذا الجذر يمكن أن يكون صغيراً. إلا أنّه بما إنّ للجذر الحقيقي ثابت زمني كبير بالمقارنة مع الثابت الزمني لزوج الجذور العقدية المسيطرة، فإن تأثيره على زمن الاستقرار سيكون واضحاً.

ليس هناك قاعدة عامة يمكن أن تقود لاختيار موقع الصفر المعوض الذي يقابل بشكل مقنع كل متطلبات التصميم. والوسيلة الأفضل المتوفرة هي إجرائية التجربة والخطأ. إلا إنّه يمكن اعتبار أنّ الخطوط الدليلية التالية مساعدة.

إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الأولى:**

ضع الصفر المعوض على المحور الحقيقي في المنطقة أسفل موقع قطب الحلقة المغلقة المرغوب وقرب وإلى اليسار من أي قطب حلقة مفتوحة في هذه المنطقة. هذه التقنية تضمن بأن قطب الحلقة المغلقة على المحور الحقيقي والناتج عن وجود الصفر المعوّض سوف يقع قربه وبثابت زمني قابل للمقارنة مع الثابت الزمني لزوج أقطاب الحلقة المغلقة المسيطرة المرغوبة، وبذلك يكون تأثيره على ديناميكية النظام مهملاً. إذا لم يكن للنظام غير المعوَّض قطب للحلقة المفتوحة في المنطقة أسفل أقطاب الحلقة المغلقة المرغوبة، فإنه يجب اختبار شرط السيطرة بواسطة تحديد موقع قطب الحلقة المغلقة المتوضع على المحور الحقيقي والناتج من إضافة الصفر المعوض.

إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الأولى:**

إن إضافة صفر إلى دالة انتقال الحلقة المفتوحة يمكن أن ينجز بوضع معوّض من الشكل:

$$D(s) = s + z = s + 1/\tau$$

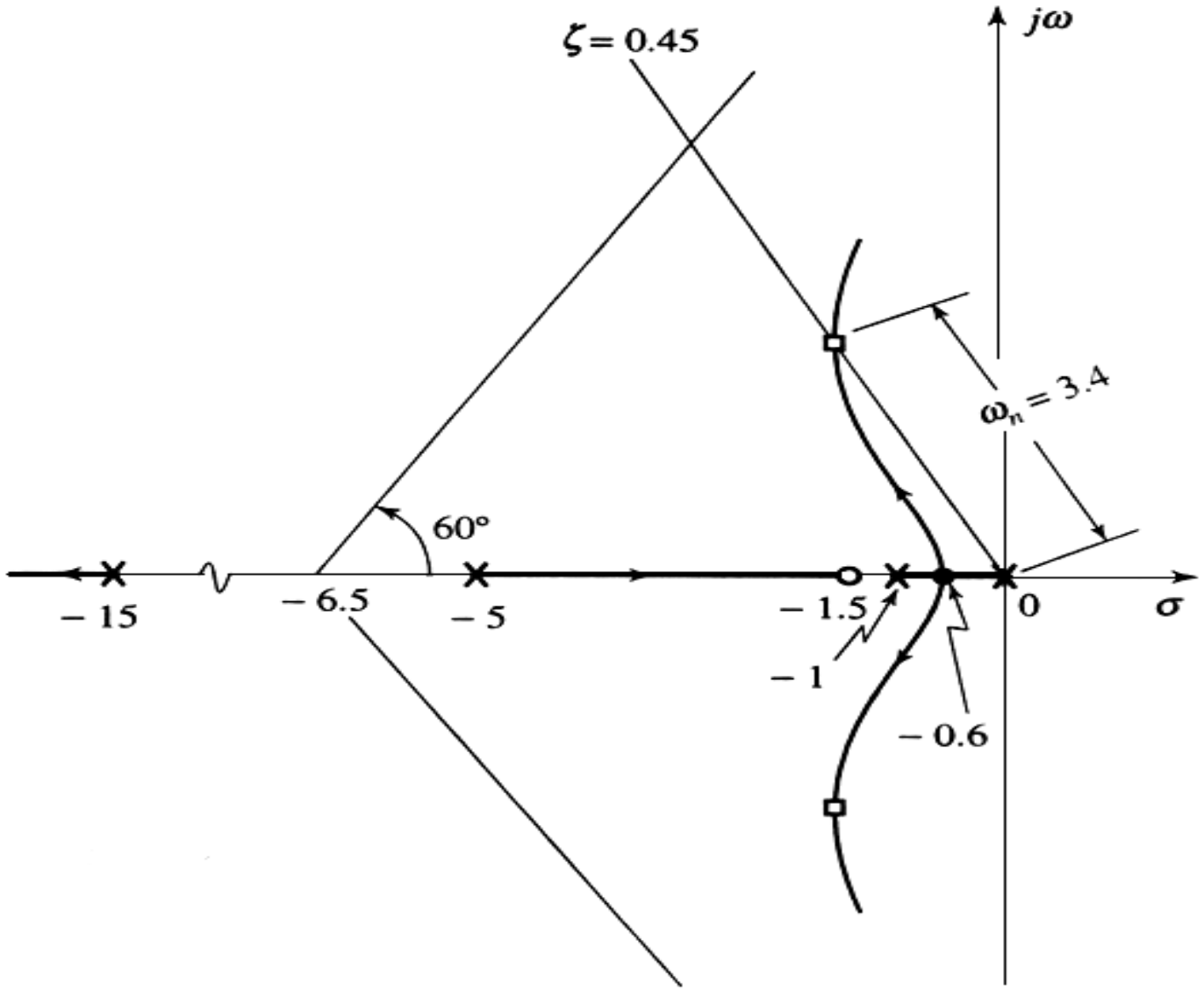
على التسلسل مع دالة انتقال الممر الأمامي.

كما يبدو فإنّ المعوّض هو متحكم تناسبي_تفاضلي PD:

$$D(s) = K_C(1 + T_D s) = K_C T_D(s + 1/T_D) = K_C T_D(s + z)$$

إن مشكلة المعوّض من النوع PD هي تضخيمه الكبير لتشويش الترددات العليا الموجود على مدخل المعوض. وعادة يتم التغلب على هذه المشكلة بإضافة قطب لدالة انتقال المعوض بحيث يقوم بوضع حد لربح الترددات العليا. طبعاً يجب أن يضاف هذا القطب بحيث يكون تأثيره نسبياً مهملاً على مسار الجذور في منطقة حدوث أقطاب الحلقة المغلقة المسيطرة.

إعادة تشكيل مسار الجذور Locus



يتقاطع الخط ζ _ ($\zeta = 0.45$) مع مسار الجذور عند $s = -1.531 + j3.039$ ، ومن أجل زوج الأقطاب المسيطرة يكون التردد الطبيعي غير المتخامد $\omega_n = 3.4$ rad/sec وزمن استقرار الاستجابة حوالي 2.6sec.

إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الأولى:**

إن اختيار موقع قطب المعوض يتطلب إجراء نوع من التوافق بين التأثيرات المتضاربة لإخماد التشويش وفعالية التعويض. في حالات عديدة يتم حل هذا التضارب باختيار موقع القطب على مسافة من 3 إلى 10 مرات من قيمة موقع الصفر.

$$D(s)=\frac{s+z}{s+p}=\frac{s+1/\tau}{s+1/\alpha\tau} \quad ; \quad \alpha=\frac{z}{p}<1\,,\ \tau>0$$

معوض مقدم lead compensator:

إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

المسألة التصميمية الثانية:

ليكن لدينا النظام المبين في الشكل والذي دالة انتقال حلقته المفتوحة هي:

$$G(s) = \frac{5K_A}{s(s+1)(s+5)} = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$$

يظهر الشكل مخطط مسار الجذور للنظام غير المعوّض. بفرض أن خصائص الاستقرار النسبي تتطلب نسبة تخامد $\zeta = 0.45$، يحدث تقاطع خط ζ مع مسار الجذور عند $s = -0.404 + j0.802$ $(K = 4.188)$. لذلك يكون التردد الطبيعي غير المتخامد للنظام هو $\omega_n = 0.898 \text{ rad/sec}$ وزمن الاستقرار $(t_s = 4/\zeta\omega_n)$ $t_s = 9.9 \text{ sec}$. بفرض أن الاستجابة الديناميكية للنظام غير المعوض عند $K = 4.188$ محققة.

إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الثانية:**

ويكون ثابت خطأ السرعة للنظام غير المعوض ($K = 4.188$):

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} s \left\{ \frac{K}{s(s+1)(s+5)} \right\} = \frac{K}{5} = 0.898$$

ويكون خطأ الحالة الثابتة من أجل دخل سرعة واحدية هو:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 1.114 \; rad$$

والذي هو كبير جداً، ولذلك يجب رفع قيمة K_v للنظام. من أجل تحقيق ذلك نضيف متحكم تناسبي_تكاملي PI في الممر الأمامي على التسلسل مع دالة انتقال المنشأة.

إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الثانية:**

ويكون للمتحكم PI دالة انتقال من الشكل:

$$D(s) = K_C\left(1+\frac{1}{T_I s}\right) = K_C\left(\frac{s+1/T_I}{s}\right) = K_C\,\frac{s+z}{s}$$

إذاً يضيف المتحكم PI قطباً عند $s=0$ وصفراً عند $s=-z$ لدالة انتقال الحلقة المفتوحة. وبالتالي يزداد نوع النظام بمقدار واحد نتيجةً لإضافة قطب حلقة لمفتوحة في مبدأ الإحداثيات. ومن أجل تصميم مستقر يجب أن يكون ثابت الخطأ مساوياً قيمةً لا نهائية وبالتالي يكون خطأ الحالة الثابتة صفراً.

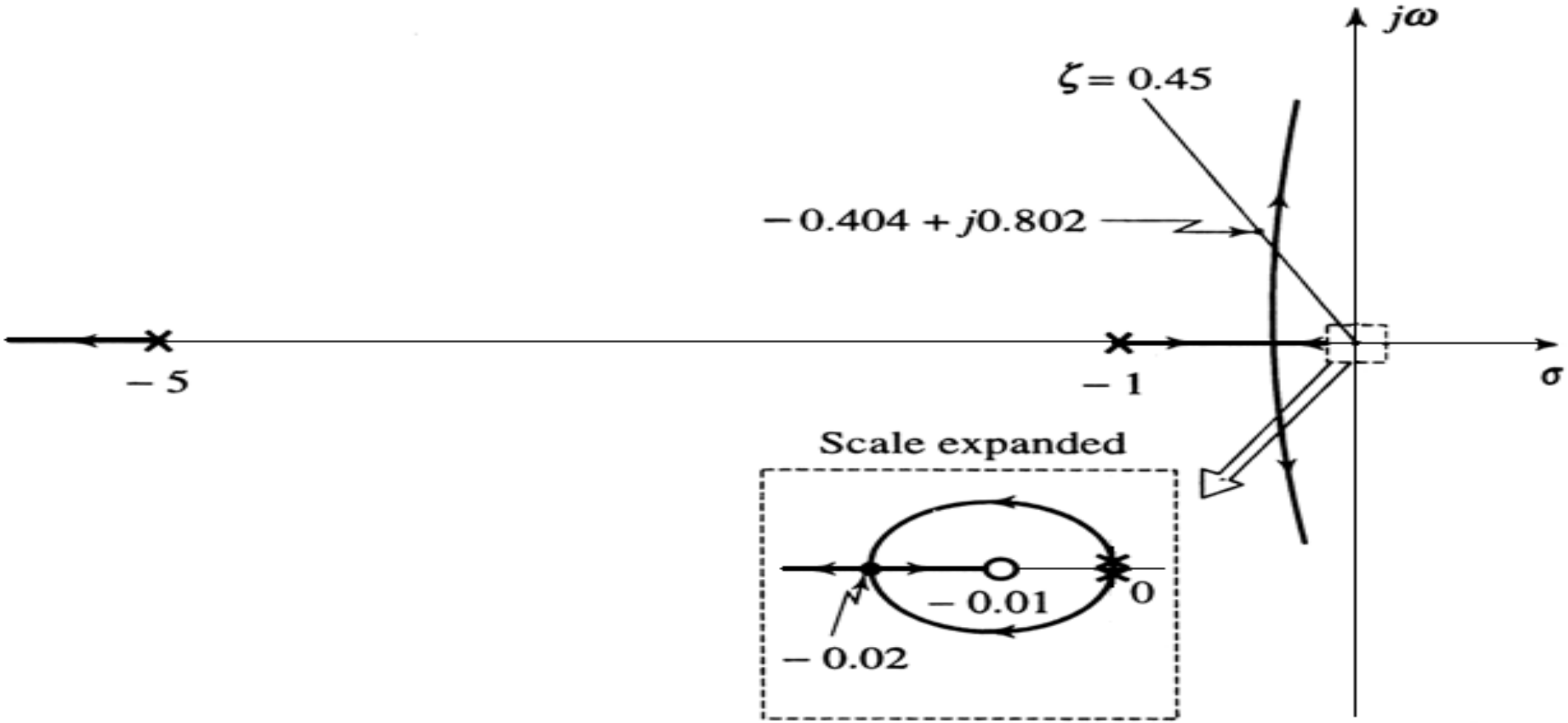
إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الثانية:**

دعنا الآن نرى تأثير زوج قطب_صفر المتحكم PI على الاستجابة العابرة للنظام. يمكننا التأكد بسهولة من أن القطب لوحده سوف يحرك مسار الجذور إلى اليمين، وبذلك يجعل النظام غير مستقر. لكي نقلل من تأثير القطب على الحالة العابرة يجب أن يكون الصفر قرب القطب. يبين الشكل مخطط مسار الجذور للنظام مع صفر كمعوض يقع عند $s = -0.01$، ويكون قطب المعوض موجوداً في مبدأ الإحداثيات. من الملاحظ بأن زوج قطب_صفر المعوّض يساهم بزاوية صغيرةٌ بشكلٍ مهملٍ عند قطب الحلقة المغلقة المرغوب $0.802 + j0.404 -$. ولذلك لا يتأثر مسار الجذور بشكل ملموس في جوار هذه النقطة.

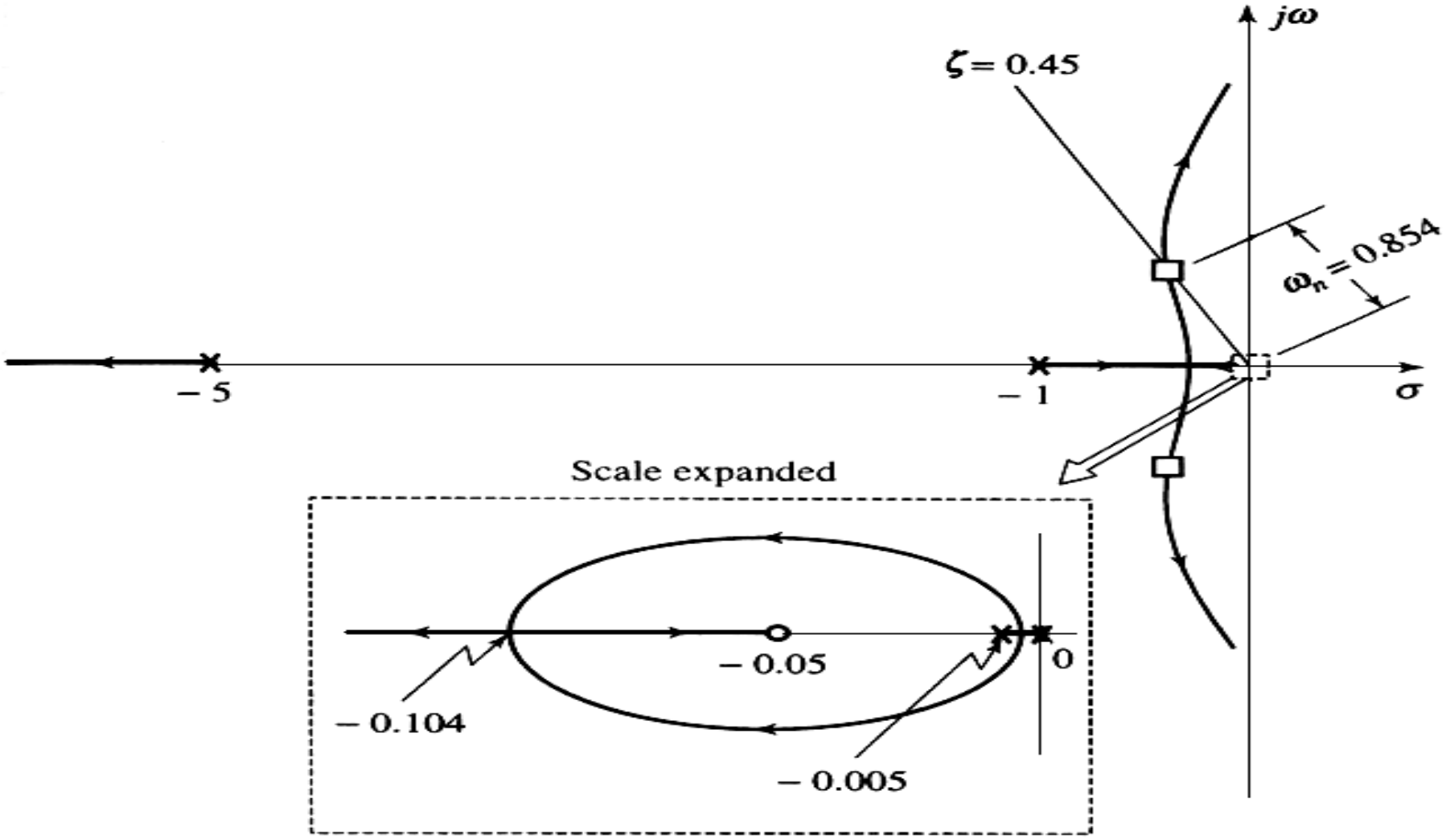
إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الثانية:**



إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الثانية:**



إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الثانية:**

من أجل نظام معوض مضبوط على نسبة تخامد $\zeta = 0.45$، نحصل على النتائج التالية:

الأقطاب المسيطرة:

$$s_{1,2} = -0.384 \pm j0.763$$

ربح مسار الجذور عند s_1 :

$$K = \frac{|s_1||s_1+1||s_1+5||s_1+0.005|}{|s_1+0.05|} = 4.01$$

اعادة تشكيل مسار الجذور

ثابت خطأ السرعة:

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \left\{ \frac{K(s+0.05)}{s(s+1)(s+5)(s+0.005)} \right\}$$
$$= \frac{K(0.05)}{5 \times 0.005} = 8.02$$

التردد الطبيعي غيرمتخامد: $\omega_n = 0.854 \text{ rad/sec}$.

بمقارنة النظام غير المعوّض مع النظام المعوّض نجد أنّ التردد الطبيعي غير المتخامد ω_n قد انخفض بشكلٍ طفيفٍ من 0.898 rad/sec إلى 0.854 rad/sec، ولكن هنالك زيادة ملحوظة في ثابت خطأ السرعة من 0.838 إلى 8.02. في الحقيقة، إنّ هذه الزيادة في قيمة K_v تساوي تقريباً إلى $|z|/|p|$ حيث $s=-z$ هو موقع صفر المعوض و $s=-p$ هو موقع قطب المعوض.

إعادة تشكيل مسار الجذور
Reshaping the Root Locus

- **المسألة التصميمية الثانية:**

يتضح من المناقشة السابقة أن صفر المعوض يجب أن يقع إلى اليسار من قطب المعوض، وكلاهما أي الصفر والقطب يجب أن يكونا في النصف الأيسر من المستوي_s. عندئذ دالة انتقال معوّض الدرجة الأولى تصبح:

$$D(s) = \frac{s+z}{s+p} = \frac{s+1/\tau}{s+1/\beta\tau} \quad ; \quad \beta = \frac{z}{p} > 1 \ , \ \tau > 0$$

يُلاحظ بأنه عندما $\beta > 1$ فإن القطب يقع إلى اليمين من الصفر وبالتالي يكون أكثر قرباً من مبدأ الإحداثيات. ولذا تكون مساهمة $D(s)$ في معيار الزاوية لمسار الجذور سالبة دائماً. هذا النوع من المعوضات يدعى معوض مؤخر lag compensator .

المعوض المقدم التسلسلي Cascade Lead Compensator

خطوات تصميم المعوض المقدم بما يلي:

1. ترجمة مواصفات الاستجابة العابرة إلى زوج من الأقطاب العقدية.
2. رسم مخطط قطب_صفر للنظام غير المعوَّض وتحديد (باستخدام معيار الزاوية) فيما إذا كان من الممكن تحقيق توضع الجذور في المواقع المرغوبة من خلال ضبط الربح فقط. إذا كان ذلك غير ممكن فإنّه يتم حساب مقدار نقص الزاوية ϕ. وحتى يمر مسار الجذور من خلال مواقع الأقطاب المرغوبة يجب أن تُعوض هذه الزاوية بواسطة معوّض مقدّم.
3. وضع صفر المعوض على المحور الحقيقي في المنطقة أسفل الجذر المسيطر المرغوب s_d. إذا كان للنظام غير المعوَّض قطب حلقة مفتوحة على المحور الحقيقي في المنطقة أسفل s_d، فإنّه يجب أن يتم وضع صفر المعوض إلى اليسار من هذا القطب.

المعوض المقدم التسلسلي Cascade Lead Compensator

خطوات تصميم المعوض المقدم بما يلي:

4. تحديد موقع قطب المعوض بحيث تكون الزاوية الكلية المقدمة من زوج قطب_صفر المعوض عند s_d هي ϕ.
5. حساب الربح عند s_d وبعد ذلك حساب ثابت الخطأ.
6. إعادة الخطوات السابقة إذا كان الأداء العابر غير مقنع لأنّ شرط السيطرة ضعيف و/أو إذا كان ثابت الخطأ غير كافٍ.

معوض مؤخر تسلسليCascade Lag Compensator

$$G(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^r\prod_{j=r+1}^{n}(s+p_j)}$$

$$K^{uc}(s_d)=\frac{|s_d|^r\prod_{j=r+1}^{n}|s_d+p_j|}{\prod_{i=1}^{m}|s_d+z_i|}$$

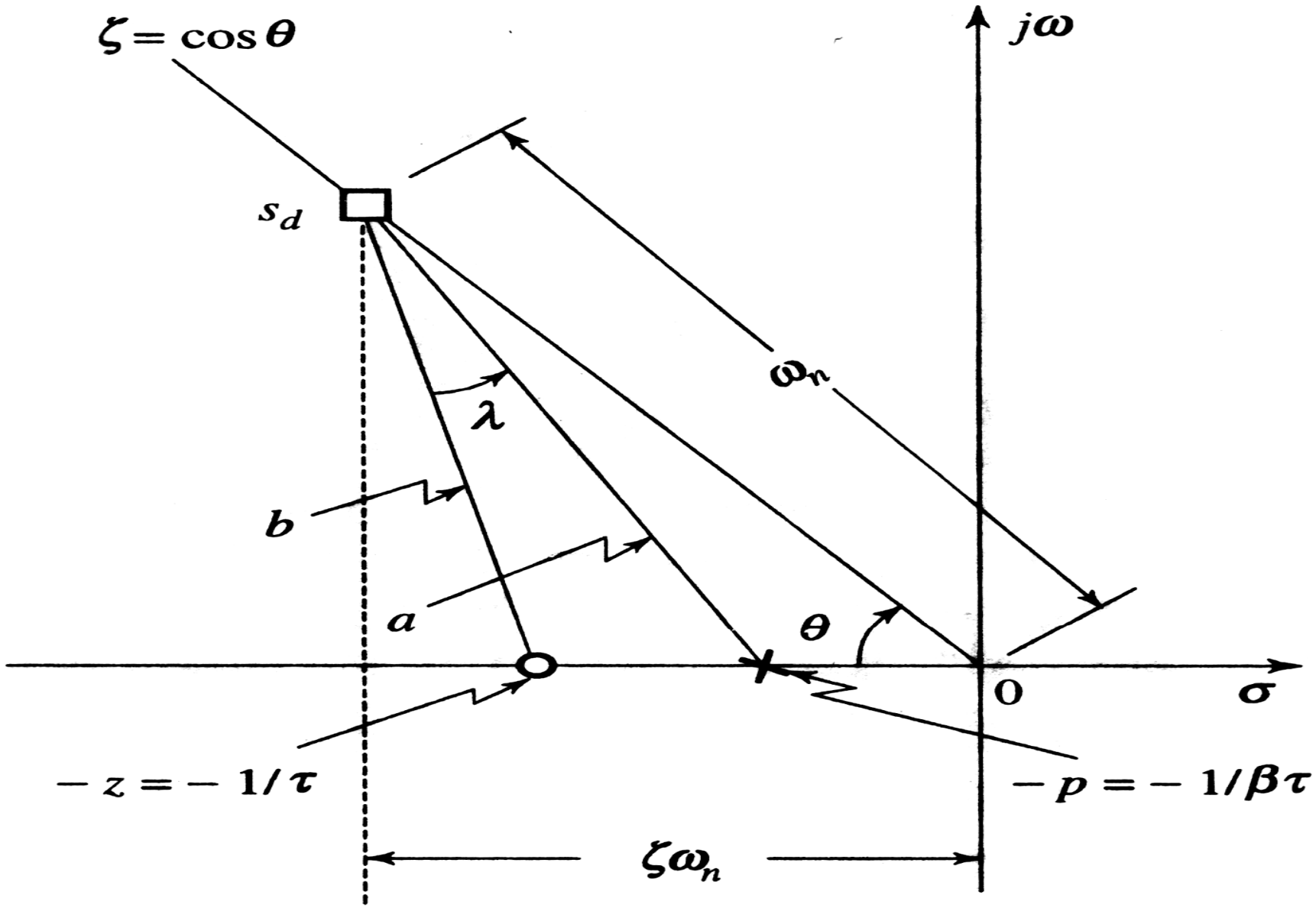
$$D(s)=\frac{s+z}{s+p}=\frac{s+1/\tau}{s+1/\beta\tau};\qquad \beta=\frac{z}{p}>1\ ,\ \tau>0$$

$$K^{c}(s_d)=\frac{|s_d|^r\prod_{j=r+1}^{n}|s_d+p_j|}{\prod_{i=1}^{m}|s_d+z_i|}\left(\frac{\text{a}}{\text{b}}\right)$$

$$b=|s_d+1/\tau|$$

$$a=|s_d+1/\beta\tau|$$

معوض مؤخر تسلسليCascade Lag Compensator



معوض مؤخر تسلسليCascade Lag Compensator

بما أن قطب وصفر المعوض يتوضعان بالقرب من بعضهما البعض، لذا يبعدان مسافات متساوية تقريباً عن s_a، هذا يعني أن $a \cong b$. ولذلك :

$$K^c(s_a) \cong K^{uc}(s_a)$$

يُعطى ثابت الخطأ K_ε (الذي يمثل K_p أو K_v أو K_a حسب نوع النظام) للنظام غير المعوَّض بالعلاقة:

$$K_\varepsilon^{uc} = K^{uc}(s_a) \frac{\prod_{i=1}^{m} z_i}{\prod_{j=r+1}^{n} p_j}$$

معوض مؤخر تسلسليCascade Lag Compensator

ويُعطى ثابت خطأ النظام المعوَّض بالعلاقة:

$$K_e^c = K^c(s_d)\frac{\prod_{i=1}^{m} z_i}{\prod_{j=r+1}^{n} p_j}\left(\frac{z}{p}\right) \cong K_e^{uc}\left(\frac{z}{p}\right)$$

وبما أنّ ثابت الخطأ K_e^c يجب أن يساوي القيمة المرغوبة K_e^d فإننا نجد أن:

$$K_e^d \cong K_e^{uc}\left(\frac{z}{p}\right)$$

أو:

$$\beta = \left(\frac{z}{p}\right) \cong \frac{K_e^d}{K_e^{uc}}$$

معوض مؤخر تسلسليCascade Lag Compensator

خطوات تصميم المعوِّض المؤخر بما يلي:

1- رسم مسار الجذور للنظام غير المعوَّض.

2- ترجمة مواصفات الاستجابة العابرة إلى زوج من الجذور العقدية المسيطرة وتحديد مواقع هذه الجذور على مخطط مسار الجذور غير المعوَّض. وبفرض أنّه يمكن الوصول لأداء عابر مقبول عن طريق ضبط الربح، أيّ وقوع الجذر المسيطر المرغوب على (أو قرب) مسار الجذور غير المعوَّض.

3- حساب ربح النظام غير المعوض عند الجذر المسيطر s_d ومن ثم إيجاد ثابت الخطأ المقابل.

4- تحديد العامل الذي يجب أن يزداد به ثابت خطأ النظام غير المعوَّض ليقابل القيم المحددة. ومن ثم اختيار البارامتر β للمعوض المؤخر بحيث يكون نوعاً ما أكبر من هذا العامل.

معوض مؤخر تسلسليCascade Lag Compensator

خطوات تصميم المعوِّض المؤخر بما يلي:

5- اختيار صفر المعوض ($s=-z$) بحيث يكون قريباً بشكلٍ كافٍ من مبدأ الإحداثيات. وكقاعدة دليلية، يتم إنشاء خط من s_d بحيث يصنع زاوية مقدارها 10° (أو أقل) مع خط $\angle$ المرغوب، ويحدد تقاطع هذا الخط مع المحور الحقيقي موقع صفر المعوض.

6- عندئذٍ يمكن وضع قطب المعوض عند $s=-p=-z/\beta$. والملاحظة الجديرة بالاهتمام هي أن زوج قطب_صفر المعوض يجب أن يساهم بزاوية θ أقل من 5° عند s_d، لذا فإن مخطط مسار الجذور في منطقة s_d لن يتغير بشكل ملحوظ وهذا يحافظ على السلوك العابر المقنع.