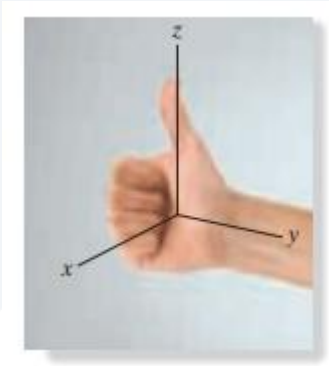
الأشعة الديكارتية

يستخدم التمثيل الديكارتي للأشعة من أجل حل المسائل في الفراغ ثلاثي الأبعاد .

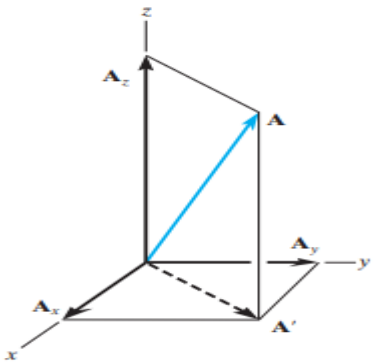
قاعدة اليد اليمنى : يشير أصبع الإبهام إلى الاتجاه الموجب للمحور Z، وتدور أصابع اليد اليمنى حول المحور Z من الاتجاه الموجب للمحور X إلى الاتجاه الموجب للمحور Y.



المركبات النظامية للشعاع :

يرمز للشعاع بشعاع فوق القوة ، أو بخط ، أو بحرف عريض .

يمكن للشعاع A أن يمتلك مركّبة واحدة ، أو اثنتين ، أو ثلاث مركبات نظامية وفق الاتجاهات X,Y,Z. يمكننا تحليل الشعاع A وفق عمليتين متتاليتين لمتوازي الأضلاع :



أولا : يمكننا تحليل الشعاع A وفق مايلي :

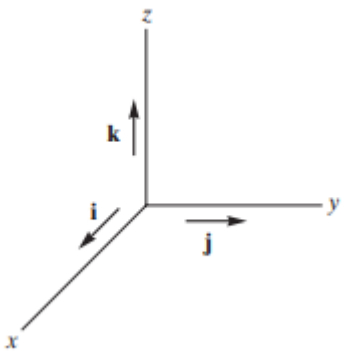
$$A = \grave{A} + A_Z$$

$$\grave{A} = A_x + A_y$$

أي أننا نستطيع كتابة الشعاع A وفق ثلاث مركبات نظامية :

$$A = A_x + A_y + A_z$$

الأشعة الواحدية :تستخدم الأشعة I ,J,K لتحديد اتجاه المحاورX,Y,Z

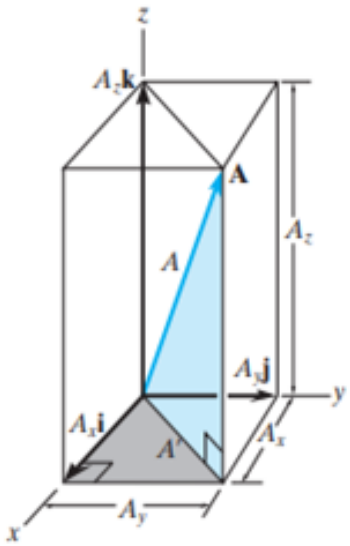


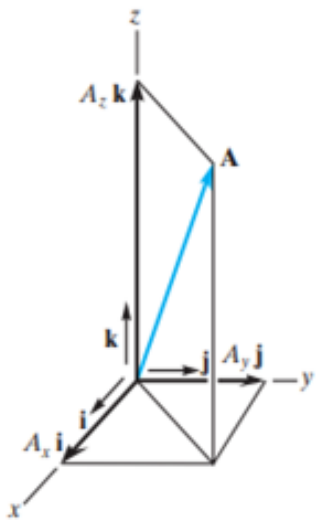
تمثيل الشعاع الديكارتي : يمكننا كتابة الشعاع Aكشعاع ديكارتي وفق الصيغة التالية :

$$\boldsymbol{A} = A_x\ \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$$

طويلة الشعاع الديكارتي :

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

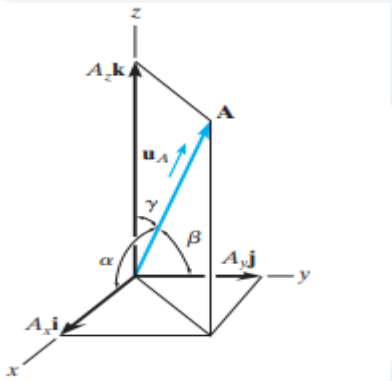




زوايا الاتجاه للشعاع الديكارتي :

نحدد مسقط الشعاع Aعلى محاور الاحداثيات X,Y,Z

لدينا الزوايا التالية مع المحاور التي تسمى " اتجاهات التجيب" :



$$COS\alpha = \frac{A_x}{A} \ , COS\beta = \frac{A_y}{A}, COS\gamma = \frac{A_z}{A}$$

يمكننا الحصول على اتجاهات الزوايا عن طريق كتابة شعاع الواحدة

$$\boldsymbol{U}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{A} = \frac{A_x}{A} . \boldsymbol{i} + \frac{A_y}{A} \boldsymbol{j} + \frac{A_z}{A} \boldsymbol{k}$$

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

$$\boldsymbol{U}_A = COS\alpha . \boldsymbol{i} + COS\beta . \boldsymbol{j} + COS\gamma . \boldsymbol{k}$$

$$COS^2\alpha + COS^2\beta + COS^2\gamma = 1$$

الخلاصة :إذا كانت معطاة قيمة و اتجاه الزوايا للشعاع A ، يمكننا كتابة الشعاع وفق الاحداثيات الديكارتية :

$$\boldsymbol{A} = A . \boldsymbol{U}_A$$

$$\boldsymbol{A} = A.COS\alpha\,.\boldsymbol{i} + A.COS\beta.\boldsymbol{j} + A.COS\gamma.\boldsymbol{k}$$

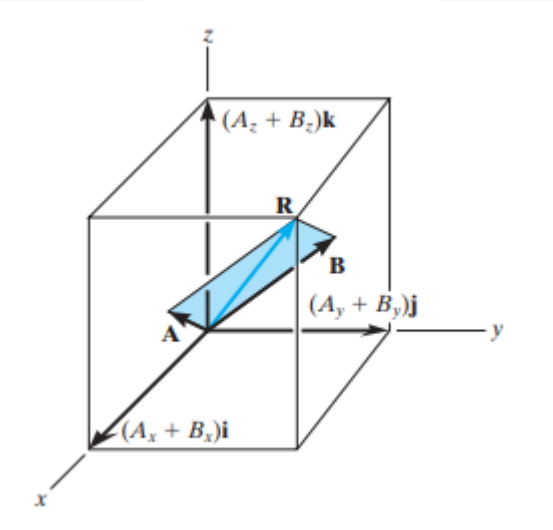
$$= A_X\,.\boldsymbol{i} + A_Y.\boldsymbol{j} + A_Z k$$

جمع وطرح الأشعة الديكارتية :

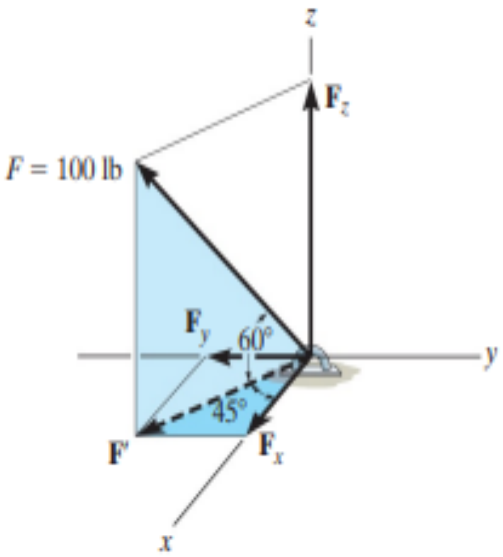
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} + (A_z + B_z)\boldsymbol{k}$$

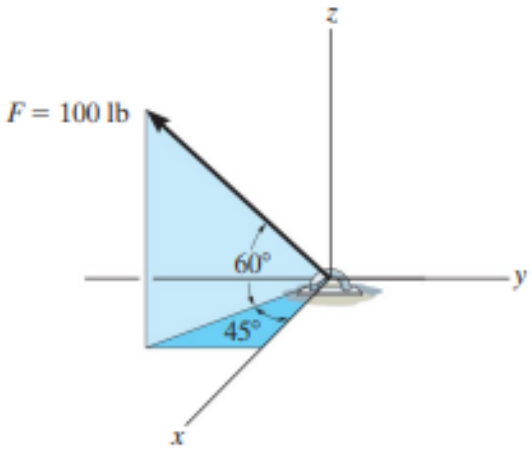
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (A_x - B_x)\boldsymbol{i} + (A_y - B_y)\boldsymbol{j} + (A_z - B_z)\boldsymbol{k}$$

$$F_R = \sum F = \sum F_x\, i + \sum F_y j + \sum F_z k$$



مسألة 2-1- اكتب القوة F وفق الشعاع الديكارتي وأوجد الطويلة وزوايا الاتجاه.





الحل : الزاويتين 60 و45 تعرّفان منحى القوة F ليستا زوايا الاتجاه . نطبق قاعدة متوازي الأضلاع مرتين ،حيث توجد حاجة لتحليل القوة Fإلى مركبات وفق المحاور X,Y,Z، أولا نحلل $F = F' + F_Z,$

وبعدها $F' = F_{X+}F_Y$

F_Z = 100 sin 60 =86.6 lb

$$F' = 100cos60 = 50\ lb$$

$$F_X = F'cos45 = 50cos45 = 35.4lb$$

$$F_y = F'sin45 = 50sin45 = 35.4lb$$

مع ملاحظة أن منحى القوة F_y هو عكس الاتجاه الموجب للمحور y

$$F = \{35.4i - 35.4j + 86.6k\}\ lb$$

من أجل حساب طويلة الشعاع Fيجب أن تساوي 100 LB

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$= \sqrt{(35.4)^2 + (35.4)^2 + (86.6)^2} = 100lb$$

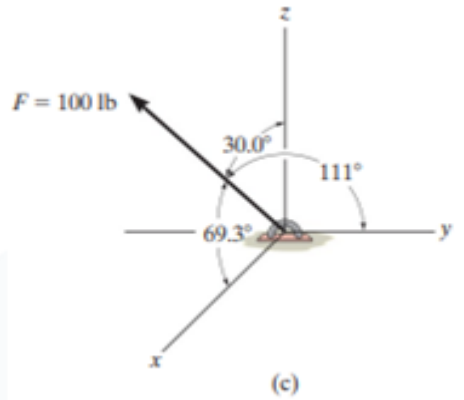
من أجل حساب زوايا المنحى للقوة F يمكن تعريفها عن طريق الأشعة الواحدية المؤثرة باتجاه القوة :

$$U = \frac{F}{F} = \frac{F_x}{F}i + \frac{F_y}{F}j + \frac{F_Z}{F}k$$

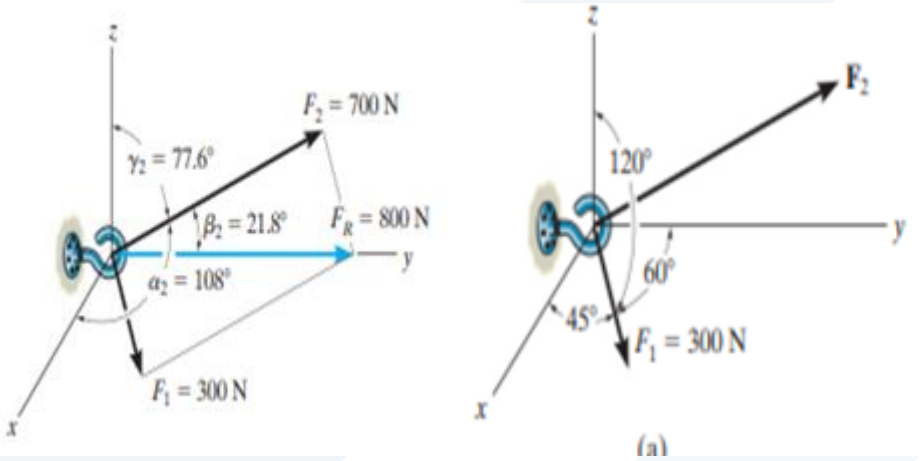
$$= \frac{35.4}{F}i - \frac{35.4}{F}j + \frac{86.6}{F}k$$

$$= 0.354i - 0.354\mathrm{j} + 0.866\mathrm{k}$$

ينتج لدينا الزوايا :

	$\alpha = cos^{-1}(0.354) = 69.3^o$ $\beta = cos^{-1}(-0.354) = 111^o$ $\gamma = cos^{-1}(0.866) = 30^o$

مسألة 2 -2– قوتان F2. F1 تؤثران على الحلقة . احسب طويلة F2 وزو ايا الاتجاه من أجل أن تكون طويلة المحصلة FRتساوي 800نيوتن ، ومتجهة على امتداد الاتجاه الموجب للمحورY.



الحل :

من أجل الحل يجب كتابة المحصلة وفق مركباتها F1و F2 وفق الشكل الديكارتي ، أي أن :

$$F_R = F_1 + F_2$$

باستخدام المعادلة :

$$F_1 = F_1.cos\alpha_1 i + F_1.cos\beta_1.j + F_1.cos\gamma_1 k$$

$$= 300cos45i + 300cos60j + 300cos120k$$

$$N = \{212.1i + 150j - 150k\}$$

$$F_2 = F_{2x}.i + F_{2y}.j + F_{2z}.k$$

حيث أن طويلة المحصلة = 800 N في الاتجاه الموجب للمحور Y نكتب :

$$F_R = (800N)(+J) = \{800J\}N$$

تكتب :

$$F_R = F_1 + F_2$$

$$800J = \{212.1i + 150j - 150k + F_{2x}.i + F_{2y}.j + F_{2z}.k\}$$

$$800J = (212.1 + F_{2x})i + (150 + F_{2y})j - (150 + F_{2z})k$$

عن طريق مساواة مركبات الأشعة الواحدية في طرفي المعادلة ينتج :

$$F_{2x} = -212.1N0 = 212.1 + F_{2x}$$

$$F_{2y} = 650N800 = 150 + F_{2y}$$

$$F_{2Z} = 150N0 = -150 + F_{2Z}$$

ينتج طويلة القوة F2:

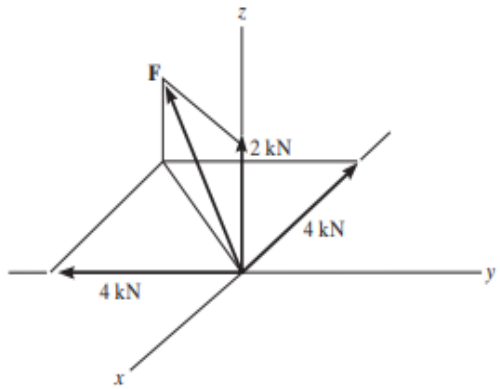
$$F_2 = \sqrt{(-212N)^2 + (650N)^2 + (150N)^2} = 700N$$

نحسب زوايا الاتجاه : $cos\alpha_2 = \frac{-212.1}{700}, \alpha_2 = 108^\circ$

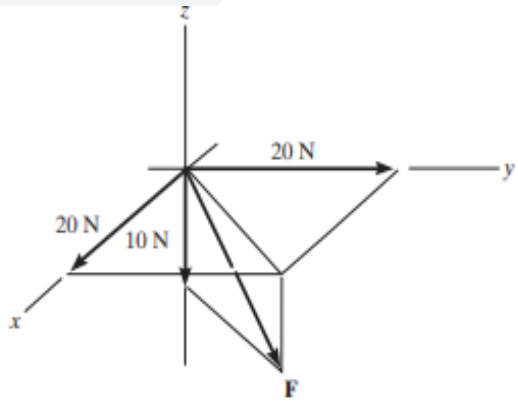
$$cos\beta_2 = \frac{650}{700}, \beta_2 = 21.8^\circ$$

$$cos\gamma_2 = \frac{150}{700}, \gamma_2 = 77.6^\circ$$

مسألة2- 3: اكتب القوة F كشعاع ديكارتي ، واحسب زاوية الاتجاه β.



(a)



(b)

a) $\mathbf{F} = \{-4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\}$ kN

$$F = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (2)^2} = 6 \text{ kN}$$

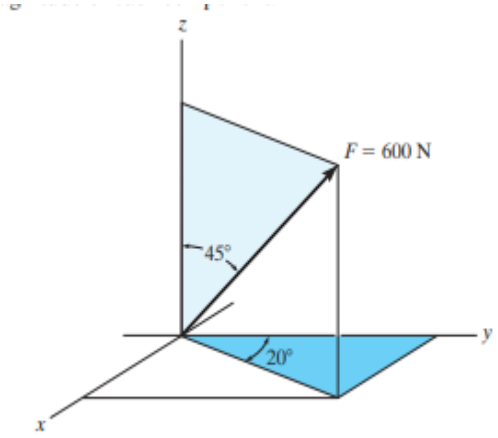
$$\cos\beta = \frac{-2}{3}$$

b) $\mathbf{F} = \{20\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 10\mathbf{k}\}$ N

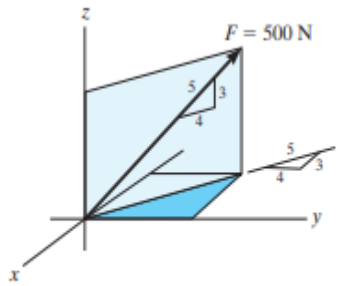
$$F = \sqrt{(20)^2 + (20)^2 + (-10)^2} = 30 \text{ N}$$

$$\cos\beta = \frac{2}{3}$$

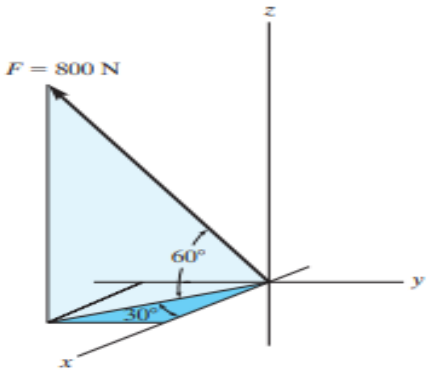
مسألة2- 4 : حلّل كل قوة إلى مركبات وفق المحاورX,Y,Z واحسب طويلة كل مركّبة.



(a)

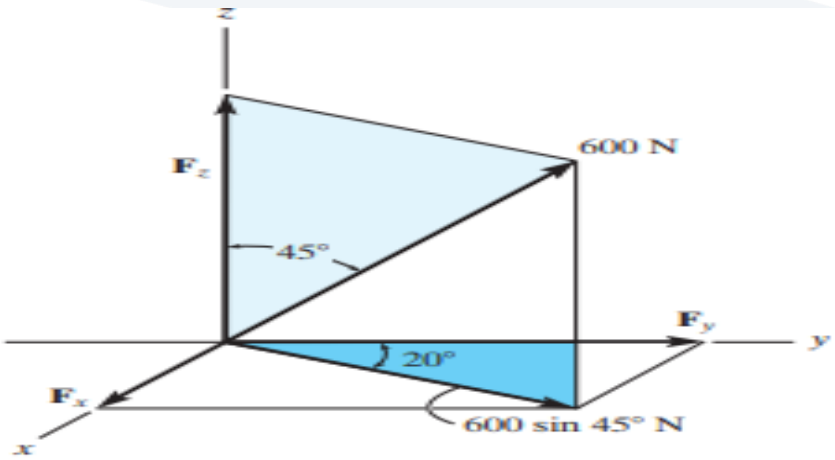


(b)



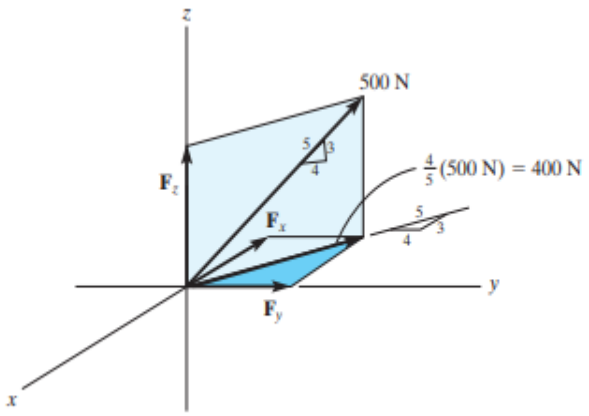
(c)

الحل :



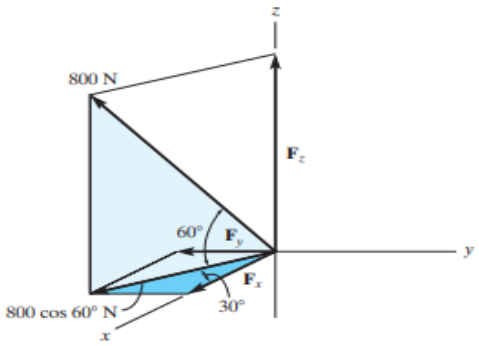
(a)

$$F_x = (600 \sin 45°) \sin 20° \text{ N}$$
$$F_y = (600 \sin 45°) \cos 20° \text{ N}$$
$$F_z = 600 \cos 45° \text{ N}$$



(b)

$$F_x = -\frac{3}{5}(400) \text{ N}$$
$$F_y = \frac{4}{5}(400) \text{ N}$$
$$F_z = \frac{3}{5}(500) \text{ N}$$

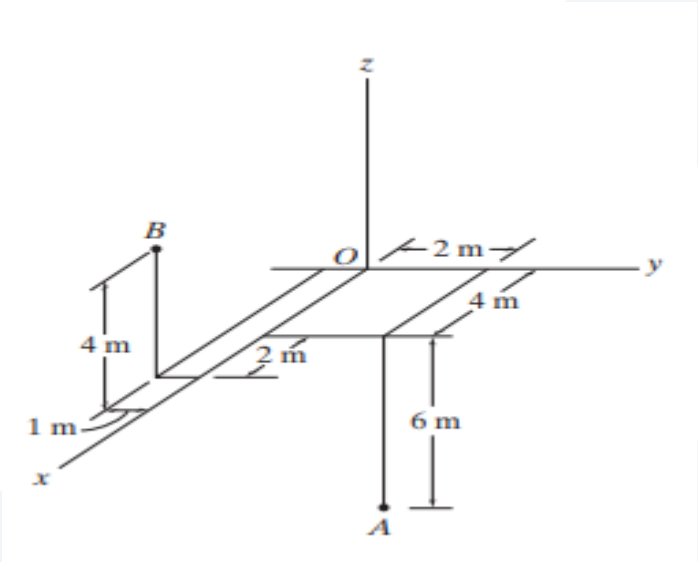


(c)

$$F_x = 800 \cos 60° \cos 30° \text{ N}$$
$$F_y = -800 \cos 60° \sin 30° \text{ N}$$
$$F_z = 800 \sin 60° \text{ N}$$

أشعة الموقع

الاحداثيات X,Y,Z :



يمكن تمثيل النقاط في الفراغ عن طريق جملة احداثيات بالنسبة لمبدأ الاحداثيات Oعن طريق قياسات متتالية وفق المحاورX,Y,Z، مثلا : يمكن الحصول على احداثيات النقطة A منطلقين من المبدأ O وقياس XA= +4 m على امتداد المحورX، و YA=+2mعلى امتداد المحور Y و ZA=-6m على امتداد المحور Z.

أي أننا نستطيع كتابة احداثيات النقطةA : A(4,2,-6). بنفس الطريقة يمكننا كتابة احداثيات النقطة B (6,-1,4)

شعاع الموقع :

يعرف شعاع الموقع r كشعاع ثابت يربط نقطة في الفراغ بنقطة ثانية ، مثلا إذا كان الشعاع r يمتد من المبدأ إلى النقطة p (x ,y , z)، عندها نستطيع كتابة الشعاع r كشعاع ديكارتي وفق العلاقة :

$$r = x\,i + y\,j + z\,k$$

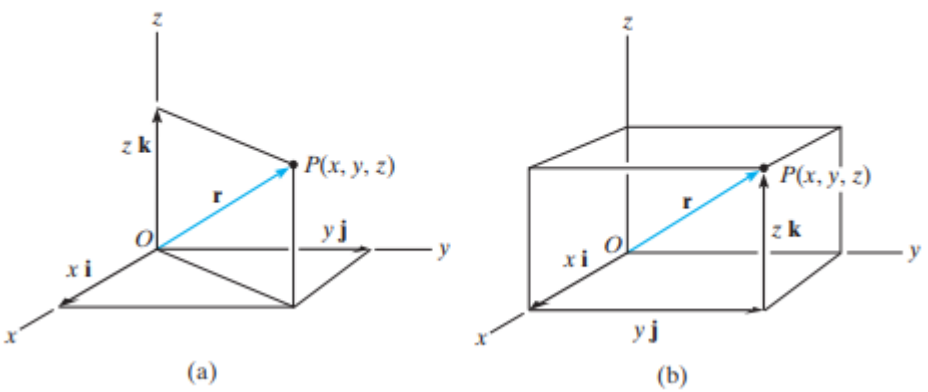
مع ملاحظة طريقة وضع الأشعة (بداية – نهاية) مبتدأين من المبدأ o متحركين بمسافة x وفق الاتجاه I+، وبعدها y باتجاه + j وأخيرا z باتجاه k+، لكي نصل إلى النقطة p(x,y,z).

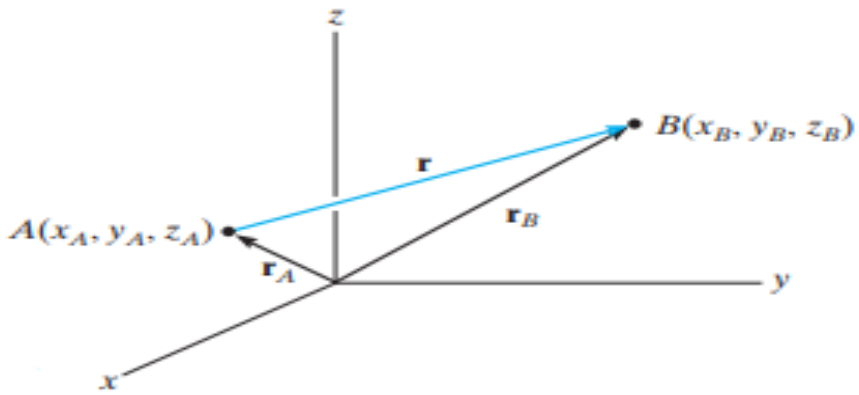
في حالات كثيرة يتجه الشعاع من النقطة A إلى النقطة B

عن طريق وضع الأشعة (بداية –نهاية) لدينا العلاقة :

$$r_A + r = r_B$$

$$r = r_B - r_A$$
$$= (x_B - x_A)i + (y_B - y_A)j + (z_B - z_A)k$$



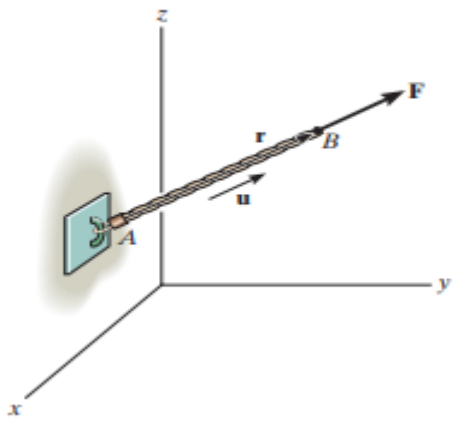


(a)

شعاع القوة المتجه على استقامة خط :

في بعض الحالات يتم تمثيل القوة على خط تأثيرها المار بنقطتين ، مثل القوة F المتجهة على امتداد الحبل AB.

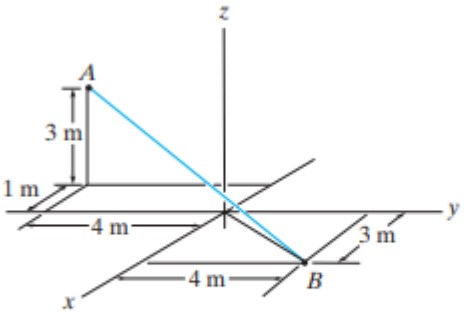
يمكننا تمثيل القوة F كشعاع ديكارتي يمتلك نفس اتجاه شعاع الموقع r ومتجه من النقطة A إلى النقطة B.



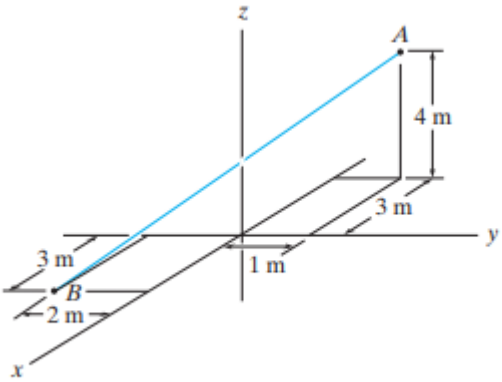
شعاع الواحدة $\mathbf{U} = \frac{r}{r}$

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = F\left(\frac{(x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}\right)$$

مسألة 5-2 : حدد الشعاع المتجه من A إلى B.



(b)

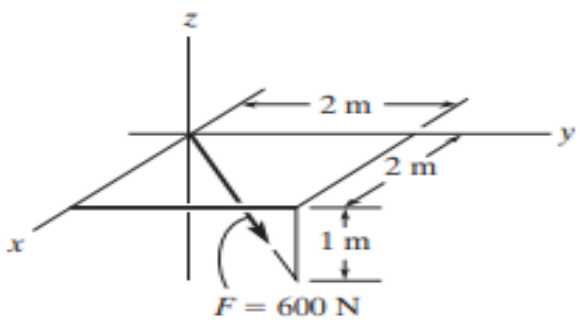


(c)

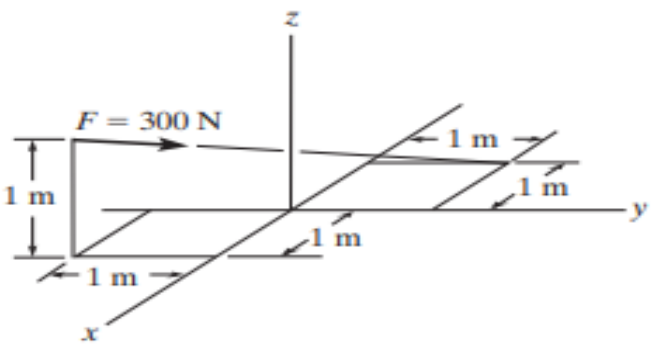
b) $\mathbf{r}_{AB} = \{4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\}$ m

c) $\mathbf{r}_{AB} = \{6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\}$ m

مسألة 6-2 : اكتب القوة F كشعاع ديكارتي .



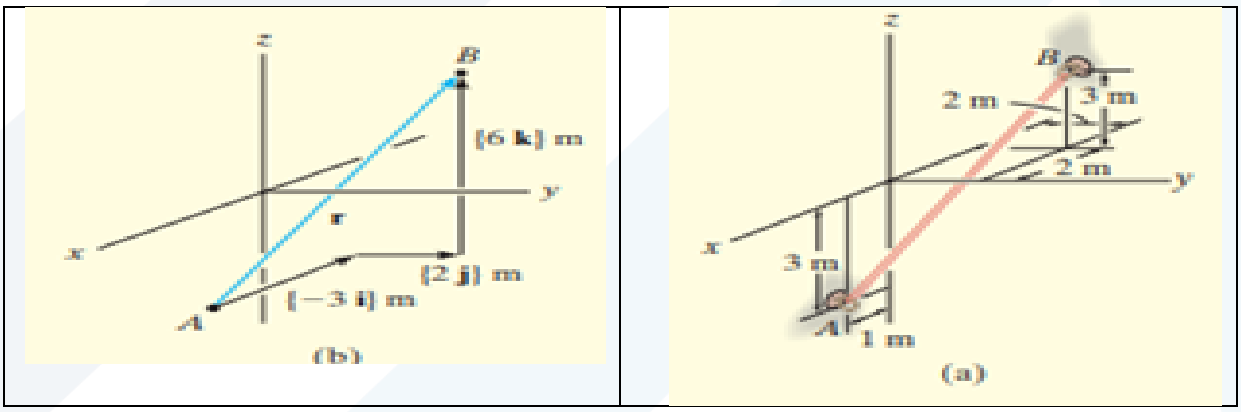
(b)



(c)

$$\text{b) } \mathbf{F} = 600\,\text{N}\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right)$$
$$= \{400\mathbf{i} + 400\mathbf{j} - 200\mathbf{k}\}\ \text{N}$$
$$\text{c) } \mathbf{F} = 300\,\text{N}\left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right)$$
$$= \{-200\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 100\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

مسألة 2-7: حبل من المطاط يصل بين النقطتين A,B. احسب طول الحبل و زوايا الاتجاه مقاسة من A باتجاه B.



الحل :

نحدد أولا شعاع الموقع من Aإلى B. احداثيات نقطة الذيل A(1m,0,-3m).

احداثيات نقطة الرأس B(-2m,2m,3m)

$$r = \{-2m - 1m\}i + \{2m - 0\}j + \{3m - (-3m)\}k$$
$$= \{-3i + 2j + 6k\}m$$

يمكن الحصول على هذه الاحداثيات مباشرة عن طريق تنفيذ الاتجاه والمنحى ،حيث يجب التحرك مسافة محددة على كل محورمن نقطة البداية للوصول إلى

نقطة النهاية ،نتحرك بالترتيب مسافة m3i-على امتداد المحور x،ومسافة 2jعلى امتداد المحور y، وأخيرا مسافة 6kعلى امتداد المحورz

$$= 7m\boldsymbol{r} = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (6)^2}$$

نكتب صيغة شعاع الواحدة باتجاهr r

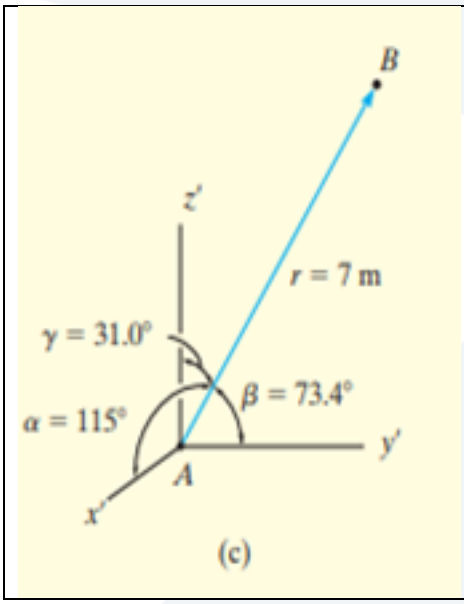
$$\boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}} = -\frac{3}{7}\boldsymbol{i} + \frac{2}{7}\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\boldsymbol{k}$$

مركبات شعاع الواحدة تعطي زوايا المنحى :

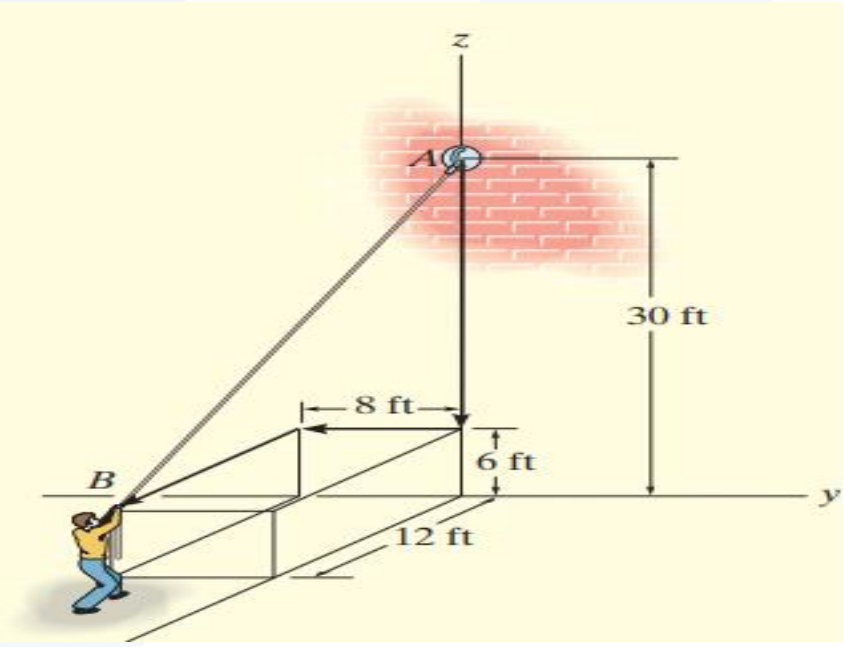
$$\propto = \boldsymbol{cos}^{-1}\left(-\frac{3}{7}\right) = 115^{\circ}$$

$$\beta = \boldsymbol{cos}^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 73.4^{\circ}$$

$$\gamma = \boldsymbol{cos}^{-1} - \left(\frac{3}{7}\right) = 31^{\circ}$$

	$\propto = cos^{-1}\left(-\frac{3}{7}\right) = 115^{\circ}$ $\beta = cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 73.4^{\circ}$ $\gamma = cos^{-1} - \left(\frac{3}{7}\right) = 31^{\circ}$

مسألة 2-8 : يسحب رجل الحبل بقوة مقدارها 70 Lb. اكتب هذه القوة وفق الشعاع الديكارتي واحسب المنحى .



الحل : يتم تحديد منحى القوة F من الشعاع rالذي يتجه من A إلى B ، يمكن حساب rمباشرة ،فمن أجل الذهاب من Aإلى B ، يجب قطع مسافة مقدارها -}

{-24K}، وبعدها مسافة بمقدار {-8j}، وأخيرا مسافة {12i} من أجل الوصول إلى B.

أي أن :

$$r = \{12i - 8j - 24k\}$$

طويلة الشعاع r تمثل طول الحبل AB

$$r = \sqrt{(12)^2 + (-8)^2 + (-24)^2} \quad = 28 \text{ ft}$$

نكتب أشعة الواحدة التي تعرّف منحى و اتجاه كل من Fو r

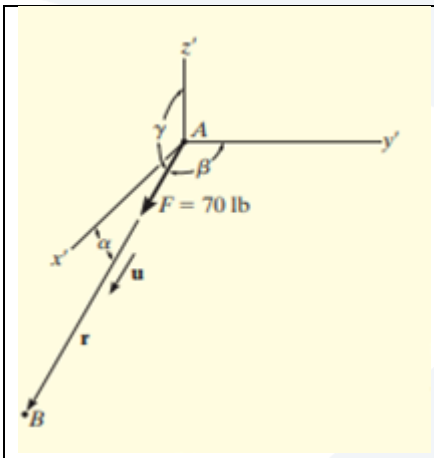
$$u = \frac{r}{r} = \frac{12}{28}i - \frac{8}{28}j - \frac{24}{28}k$$

إذن القوة Fالتي تمتلك طويلة 70 lb ومنى معرّف وفق شعاع الواحدة U

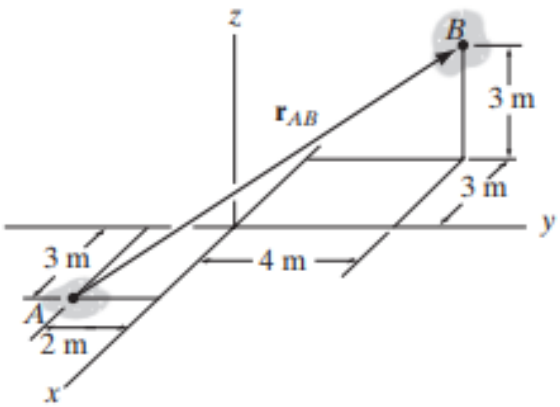
$$F = FU = 70lb\,(\frac{12}{28}i - \frac{8}{28}j - \frac{24}{28}k)$$

$$= \{30i - 20j - 60k)lb$$

منحى زوايا الاتجاه المقاسة بين القوة F أوشعاع الموقع r ، والاتجاه الموجب للمحاورمع المبدأ عند النقطة A. من مركبات أشعة الواحدة نكتب :

	$\propto = cos^{-1}\left(\frac{12}{28}\right) = 64.6^{\circ}$ $\beta = cos^{-1}\left(-\frac{8}{28}\right)$ $= 107^{\circ}$ $\gamma = cos^{-1}\left(\frac{-24}{28}\right) = 149^{\circ}$

مسألة 2-9: اكتب شعاع الموقع rAB كشعاع ديكارتي ،واحسب طويلة الشعاع وزوايا الاتجاه .

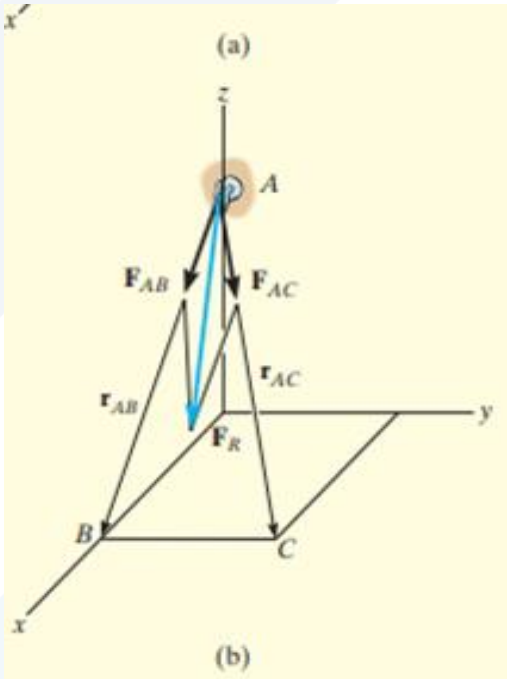


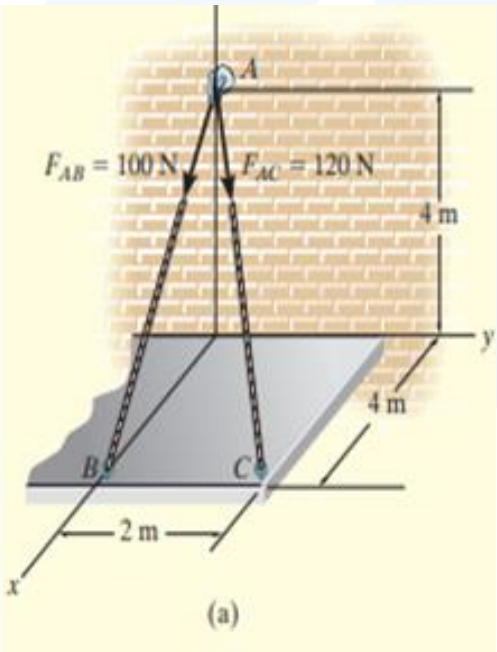
$$\mathbf{r}_{AB} = \{-6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}\ \text{m} \qquad \textit{Ans.}$$

$$r_{AB} = \sqrt{(-6\ \text{m})^2 + (6\ \text{m})^2 + (3\ \text{m})^2} = 9\ \text{m} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\alpha = 132^\circ, \quad \beta = 48.2^\circ, \quad \gamma = 70.5^\circ \qquad \textit{Ans.}$$

مسألة 10-2 : رف معلق بواسطة كبلين .إذا كانت القوة المؤثرة في كل كبل FAB=100N, FAC=120N, عند نقطة التعليق A. احسب محصلة القوى المؤثرة عند A، واكتب هذه المحصلة كشعاع ديكارتي .





الحل : يمكن تمثيل المحصلة بيانيا وكتابتها وفق الشكل الديكارتي ، أولا عن طريق كتابة القوتين F_{AC} ، F_{AB} وفق الشكل الديكارتي ، وكتابة الأشعة الواحدية U_{AC} على امتداد الكبل لأشعة الموقع r_{AB} ، r_{AC} :

من أجل الذهاب من Aإلى B يجب أن نتحرك مسافة [-4k]m وبعدها مسافة m [4j]

أي أن : $r_{AB} = \{4i - 4k\}m$

$$r_{AB} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = 5.66m$$

$$F_{AB} = F_{AB}\frac{r_{AB}}{r_{AB}} = (100N)\left(\frac{4}{5.66}i - \frac{4}{5.66}k\right)$$

$$F_{AB} = \{70.7i - 70.7k\}N$$

من أجل الذهاب من Aإلى C يجب الذهاب مسافة 4K-وبعدها مسافة 2Jوأخيرا مسافة 4I .

أي أن :

$r_{AC}=\{4i+2j-4k\}m$

$$r_{AC} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2(-4)^2} = 6m$$

$$F_{AC} = F_{AB}\left(\frac{r_{AC}}{r_{AC}}\right) = (120)(\frac{4}{6}i + \frac{2}{6}j - \frac{4}{6}k)$$

={80i+40j-80k}

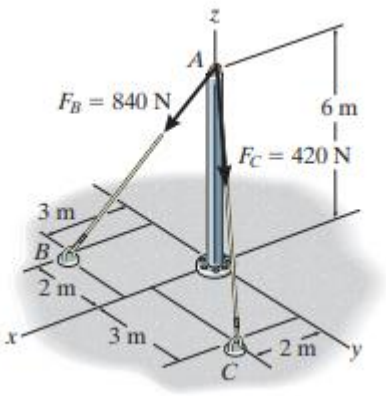
قيمة المحصلة :

$$F_R = F_{AB} + F_{AC}$$

$$= \{70.7\mathbf{i} - 70.7\mathbf{k}\} + \{80\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 80\mathbf{k}\}$$

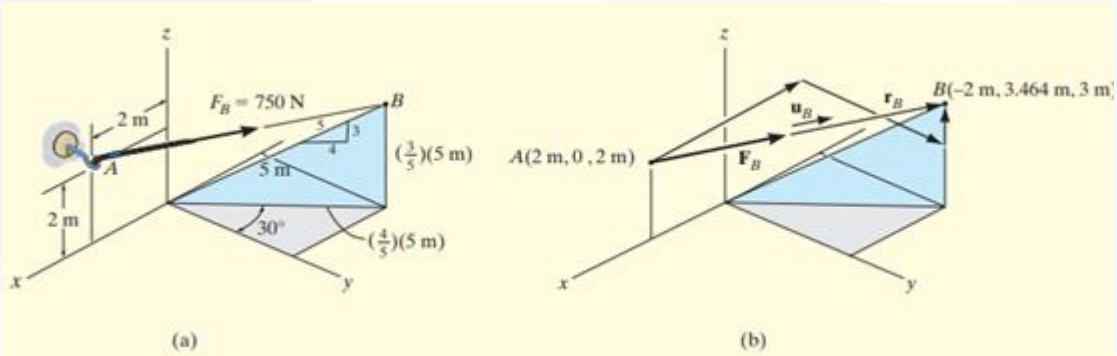
$$= \{151\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 151\mathbf{k}\}N$$

مسألة 2- 11 : احسب قيمة المحصلة واحداثيات زوايا الاتجاه لمحصلة القوى المؤثرة على الحلقة عند A.



$$\mathbf{F}_B = F_B\mathbf{u}_B$$
$$= (840\text{ N})\left(\tfrac{3}{7}\mathbf{i} - \tfrac{2}{7}\mathbf{j} - \tfrac{6}{7}\mathbf{k}\right)$$
$$= \{360\mathbf{i} - 240\mathbf{j} - 720\mathbf{k}\}\text{ N}$$
$$\mathbf{F}_C = F_C\mathbf{u}_C$$
$$= (420\text{ N})\left(\tfrac{2}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} - \tfrac{6}{7}\mathbf{k}\right)$$
$$= \{120\mathbf{i} + 180\mathbf{j} - 360\mathbf{k}\}\text{ N}$$
$$F_R = \sqrt{(480\text{ N})^2 + (-60\text{ N})^2 + (-1080\text{ N})^2}$$
$$= 1.18\text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

مسألة 2- 12 - اكتب القوة المؤثرة عند الخطاف A وفق الشعاع الديكارتي .



احداثيات النقطتين A ,B :

A(2m,0,2m)

$$B\left[-\left(\frac{4}{5}\right)5sin30, \left(\frac{4}{5}\right)5cos30, \left(\frac{3}{5}\right)5\right]$$

$$B(-2m, 3.464m, 3m)$$

من أجل الذهاب من Aإلى B، يجب أن نتحرك [-4i]m وبعدها [3.464j]m.و أخيرا [1k]m.

نكتب شعاع الواحدة :

$$U_B = \frac{r_B}{r_B} = \frac{\{-4i + 3.464j + 1k\}}{\sqrt{(-4m)^2 + (3.464)^2 + (1)^2}}$$

=0.428i+0.463j+0.185k

نكتب شعاع القوة F_B وفق الشكل الديكارتي :

$$F_B = F_B . U_B$$

$$= (750N)(-O.7428i + 0.4633j + 0.185k)$$

$$= \{-557i + 482j + 139k\}N$$